

陈奉芬 编著

混沌学及其应用

中国电力出版社

混
沌
学
真
真
应

陈奉苏 编著

中国电力出版社

内 容 提 要

本书从非线性科学的角度介绍混沌学的基本原理及国内外发展概况和主要研究成果，主要内容包括奇怪吸引子，Lorenz 方程，用 Lyapunov 指数和分形的维数判定混沌，湍流，惯性流形及电力系统中的混沌等。

本书可作为高等院校各相关专业的研究生或高年级本科生的教材或参考书，也可供从事混沌、湍流、电力系统非线性稳定性研究的科技人员学习参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

混沌学及其应用/陈奉芬编著. -北京: 中国电力出版社, 1998

ISBN 7-80125-589-5

I. 混… II. 陈… III. 混沌学-概论 IV. 0414.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 00576 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>)

列电印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

1998 年 7 月第一版 1998 年 7 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 32 开本 9.5 印张 208 千字

印数 0001—1220 册 定价: 11.00 元

版权专有 翻印必究

(本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换)

前 言

客观存在是不以人的意志为转移的。人们经常在思考与探索：为什么天气变化存在着不可预测性？气体和流体在从层流向湍流变化过程中存在着哪些中间步骤？两个电力系统在互联以后不久就会发生 1min 发作 6 次的振荡现象，为什么加装增阻尼 PSS 后振荡仍有发生？为什么两个形式和意义极不相同的方程迭代所出现的倍周期参数收敛比率都完全相同？这些深奥的问题，极可能揭示大自然更深一层的规律。的确，正是对这些问题的研究，诞生了一门崭新的科学——混沌学。

随着人们对混沌学的深入研究，无论是在物理、数学、生物学、化学，还是在天文学、经济学等领域，混沌学都得到了越来越广泛的应用，使得混沌学在现代科学技术中起着十分重要的作用。目前国外已有一些混沌的著作，但绝大多数是理论上的探讨。在国内，对混沌的研究虽已逐渐受到重视，但是这方面的著作则是寥寥无几。为了介绍混沌学的基本理论、最新发展动态及其在湍流和电力系统中的应用，我们撰写了这部著作。

本书将沿用从基本理论到实际应用这样一条思路来进行研究，第一章介绍确定论和概率论的概念、非线性科学的概念，第二章介绍一维、二维迭代映射，第三章介绍 Lorenz 方程，第四章介绍用李雅普诺夫指数判定混沌，第五章介绍奇怪吸引子的分形维数和熵的估计，第六章着重介绍混沌在湍流领域的应用，第七章介绍惯性流形的概念及其有关的应用，

第八章着重介绍混沌在电力系统领域的应用。

本书承北京大学刘式达教授审阅并提出宝贵意见，在此表示衷心感谢。

此外还要感谢上海交通大学电力工程系张益博士研究生协助校对本书。

本书献给我的妻子雷璧芳，孩子陈钢、陈铮，感谢他们多年来对我工作的支持。

作 者

1997年8月

目 录

前 言

1 绪论	1
1.1 确定论和概率论描述	2
1.2 数学上和物理上的非线性	3
2 一维、二维迭代映射	5
2.1 引言	5
2.2 一些基本分岔	6
2.3 逻辑斯蒂映射	8
2.4 倍周期	11
2.5 二维迭代映射的不动点和不变流形	12
2.6 Hopf 分岔	16
2.7 Smale 马蹄	18
2.8 混沌性态	21
3 Lorenz 方程	33
3.1 引言	33
3.2 同宿轨道	34
3.3 与同宿轨道相关的分岔	36
3.4 奇怪吸引子	43
4 用 Lyapunov 指数确定混沌	47
4.1 混沌、轨道离散和不可预测性	47
4.2 确定一维映射的混沌	48
4.3 李雅普诺夫指数谱	51
4.4 从运动方程计算李雅普诺夫指数谱	56
4.5 根据实验资料估计李雅普诺夫指数谱	62
5 奇怪吸引子的分形维数和熵的估计	66

5.1	信息流和维数	66
5.2	正式推导	70
5.3	分数维举例	74
5.4	分数维的度量	78
5.5	从单个时间序列度量计算维数	83
5.6	关联维的计算方法举例	84
6	湍流	87
6.1	引言	87
6.2	一些流动(耗散系统)的混沌的研究	88
6.3	耗散系统吸引子的维数和李雅普诺夫指数 之间的关系	91
6.4	湍流的传递和相干结构的随机事件	95
6.5	用有限维近似研究湍流的一种设想	105
7	惯性流形	156
7.1	引言	156
7.2	锥性质	157
7.3	惯性流形	163
7.4	近似惯性流形	169
7.5	惯性流形应用于科学计算	209
8	电路及电力系统中的混沌	217
8.1	引言	217
8.2	非线性电路中的分岔和混沌	218
8.3	电力系统中的混沌现象	232
8.4	电力系统中的结构稳定性	240
8.5	电力系统的电压崩溃	250
附 录	从实验的时间序列中取出定性信息 ——奇异值分解(SVD)	265
1.	引言	265
2.	动力系统和延迟法	265

3. 延迟法的统计方法	272
4. 应用于 Lorenz 模型	281
5. 小结	291
参考文献	292

1

绪 论

1963年气象学家 Lorenz 在数值试验中发现, Saltzman 在前一年提出的简化的液体对流模型虽然是一个完全确定的三阶常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -6(x - y) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

但却在一定参数范围内给出非周期的,看起来很混乱的输出。1964年天文工作者 Hénon 等人发现,一个自由度数目为2的不可积的哈密顿系统

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

当能量渐高时其轨道在相空间的分布似乎越来越随机。1971年 Ruelle 等为耗散系统引入奇怪吸引子的概念,建议了一种新的湍流发生机制。1976年 May 在一篇综述文章中指出,生态学中非常简单的数学模型

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \quad (1.3)$$

具有非常复杂的动力行为,包括分岔序列和混沌。随后 Feigenbaum 和 Couillet 等人独立地发现了倍周期分岔现象中的标度性和普适常数。人们把这一类现象称为混沌 (Chaos)。

1.1 确定论和概率论描述

对于同一个客观世界，在物理学中有确定论和概率论的两套描述体系。牛顿力学，或更确切地说，天体力学曾经是确定论描述的典范。热力学、流体力学这类宏观描述，须借助统计概念论证，可以作为概率论描述的代表。在一定意义上说，这是两套基本精神相反的描述。天体力学是一一对应的，一组确定的初值对应一条确定的轨道，它决定着体系的过去与未来。热力学是多一对应的，一个平衡态对应瞬息万变的众多微观状态，它又可以是许多非平衡的归宿，由平衡态本身无法判断它从何而来。无穷小分析的 ϵ - δ 语言，体现在力学之中就是只要初始条件的变动很小，轨道的改变也不应很大，否则“轨道”概念本身就不再适用。只要外力不突变，运动方式就不会自发地产生突变。而热力学描述中可能有相变现象，这时控制参数（温度、压力…）原则上无限小的变化，会使系统的某些特征表现出有限的突变、无穷的尖峰等。力学方程是可逆的，热力学允许有不可逆过程，如此等等。

确定论的思想自牛顿以来根深蒂固，以至对于物理学中统计描述的必要性，长期以来有两种对立的解释。一种观点把统计的必要性归结为自由度和方程数目太多，不可能完全列举初始条件，模型中不能计入一切次要因素等等外在的和技术上的原因。另一种观点则强调统计规律性是复杂系统所特有的，决不能把它还原为力学规律；物质运动和结构由低级向高级的发展是统计规律性的后果，决不应来自力学描述中没有计入的次要因素。

1.2 数学上和物理上的非线性

在数学上，如果算子 L 满足

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

$$L(\lambda u) = \lambda L(u)$$

λ 是实数，则 L 是线性算子。对于非线性算子来说，上述关系式不再成立，因而带来处理问题中的许多困难。Berger 1977 年曾归纳出非线性问题中的六点困难，除了唯一性被破坏，对参数具有临界依赖性外，他还指出，在非线性问题中，对称的原因可能引起非对称的效果。

在物理上，线性和非线性物理现象之间至少在三个方面有不同的特征：

(1) 运动本身在性质上是不同的。线性系统典型地在空间和时间表示光滑、规则运动，可以用光滑函数表示。但是，非线性系统往往表示从光滑的运动变为混沌运动，甚至看上去像随机行为。混沌的量的描述是非线性科学的一大成功。

(2) 对于线性系统来说，当它的参数有小的变化时，其响应曲线通常是光滑的。但是对于非线性系统来说，参数的小的变化可以产生运动中巨大的量的差别。

(3) 线性系统中的一个局部的脉冲通常会随着时间而传播、衰减。这现象称为色散，在线性系统中引起波，失去它们的同一性并消失，例如当低幅水波离开原始干扰时消失的现象。但是，非线性系统可以有高度相干的稳定局部结构，例如湍流中的涡流可以长时间维持。

在数学上，线性问题只是非线性问题的特殊情况。在物理上，真实的系统总是非线性的，所谓线性只是一种模型。但

是这种模型极为重要，因为它能解释许多物理现象。这说明真实的非线性系统在经过线性化后，依然保持了某些定性的或定量的结果。非线性理论在一定程度上只是证实了线性理论的合理化，如指出在哪些情况线性化并不引起定性的变化，或者指出由于线性化会引起多少定量的误差。

60年代和70年代是非线性科学研究突飞猛进的时代。首先是关于哈密顿系统（或保守系统）的研究中，提出了著名的KAM定理，即用其发现者Kolmogorov、Arnold和Moser名字命名的定理，开始揭示了保守系统中的混沌现象。接着是Smale提出的马蹄变换，为70年代混沌理论作好了重要的数学理论准备。给出混沌解第一个例子的是1963年Lorenz的文章《确定性的非周期流》，在企图分析长期天气预报不可能时，他从对流问题中提炼出一组三维常微分方程组，发现它的解是混沌的。

2

一维、二维迭代映射

2.1 引言

这一章我们将介绍一维、二维映射的一些主要性质。考察一维映射

$$T: x \rightarrow f(x) \quad (2.1)$$

有时写成

$$\dot{x} = f(x)$$

或者写成迭代形式

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

除非另有说明，我们认为 $f(x)$ 充分光滑，并假定 $f(x)$ 的范围包含在它的定义域内。用 $f^m(x)$ 表示 $f(x)$ 的 m 次迭代，与 m 次幂 $(f(x))^m$ 不同。

满足 $T\xi = \xi$ ，即

$$f(\xi) = \xi \quad (2.2)$$

的点 ξ 称为 T 的不动点。从任何起始点 x_0 ，取迭代 $x_n = T^n x_0$ 的序列 $\{x_n\}$ ，我们可以作一向前的轨道。不动点的轨道只包含这单点。下一个可能是由周期点构成的环或周期轨道。 m 阶的周期点 ξ 是 $f^m(x)$ 的不动点，当 m 是使它成立的最小的自然数。于是 $T\xi, T^2\xi, \dots, T^{m-1}\xi$ 是类似的 m 阶周期点。

不动点 ξ 的邻域内的局部性态由它的乘子确定：

$$\lambda = f'(\xi) \quad (2.3)$$

式中 f' 是 f 的导数。它给出下列一些可能：

$$\begin{aligned} |\lambda| < 1 & \quad \text{吸引或稳定} \\ \lambda = 0 & \quad \text{超稳定} \\ |\lambda| > 1 & \quad \text{排斥或不稳定} \\ |\lambda| = 1 & \quad \text{不确定} \end{aligned}$$

对于周期轨道来说有类似的分类。设 x_0, x_1, \dots, x_{m-1} 为 m —环的元素。于是所有这些都是 $f^m(x)$ 的不动点，且关于那个映射它们有相同的乘子

$$\lambda = f'(x_0)f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{m-1}) \quad (2.4)$$

应注意，含有临界点，即满足 $Df(x_0) = 0$ 的点 x_0 的周期轨道是超稳定的。

对于起始点为 x_0 的轨道来说有下列可能性：

(1) x_0 是个不动点。

(2) x_0 是个周期点。

(3) x_0 是个最终周期点。这表示对于某个整数 m , $T^m x_0$ 是个周期点。

(4) x_0 是个渐近周期点。这表示轨道含有一子序列收敛于稳定的周期点。

(5) x_0 是个非周期点当它不属于上述类型的点。轨道称为非周期的或混沌的。

2.2 一些基本分岔

我们时常考察一系列映射

$$T: x \rightarrow f(\mu, x) \quad (2.5)$$

式中 μ 是实参数。于是我们可以研究当 μ 变化时 T 的性质如

何改变。如果我们固定注意一个特殊的不动点 $\xi(\mu)$ ，它的特性可以从稳定变为不稳定且这可以按乘子 $\lambda(\mu)$ 的符号发生两种情形。当 μ 通过某一定值时可能突然出现或消失另外一些不动点。有三类分岔，我们用典型的例子来说明各个类型。

2.2.1 超临界分岔

$$x_{n+1} = (1 + \mu)x_n + x_n^2 \quad (2.6)$$

我们感兴趣的不动点总是 $x=0$ 。乘子 $\lambda=1+\mu$ 接近 1，所以 μ 看作小的分岔参数。当 $\mu>0$ 时不动点不稳定，当 $\mu<0$ （当然 $\mu>-2$ ）时它是稳定的。还有第二个不动点， $x=-\mu$ 。它的乘子是 $\lambda=1-\mu$ 。当 $\mu<0$ 时它是不稳定的，当 $\mu>0$ ($\mu<2$) 时，它是稳定的。这可以用所谓的分岔图表示于图 2.1。

2.2.2 叉型分岔

$$x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + x_n^3 \quad (2.7)$$

不动点 $x=0$ 在 $\mu=0$ 时失去稳定。还有两个别的不动点，但是它们不接近 $x=0$ ，所以对我们来说无关紧要。但是，当 $\mu>0$ 时便有 2-环 $\pm\sqrt{\mu}$ 出现。它的乘子是 $\lambda=f'(\sqrt{\mu})f'(-\sqrt{\mu})=(1-2\mu)^2$ ，当 μ 充分小时，它是稳定的。分岔图表示于图 2.2。

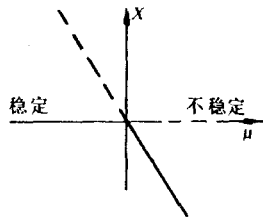


图 2.1 超临界分岔

2.2.3 折叠分岔

$$x_{n+1} = \mu + x_n - x_n^2 \quad (2.8)$$

当 $\mu<0$ 时，根本没有不动点。当 $\mu>0$ 时，有两个不动点 $\pm\sqrt{\mu}$ 。相应的乘子为 $1 \mp 2\sqrt{\mu}$ 。这表示当 μ 通过分岔点 $\mu=0$ 时，产生一对不动点，其中一个是稳定的而另一个是不

稳定的。分岔图表示于图 2.3。

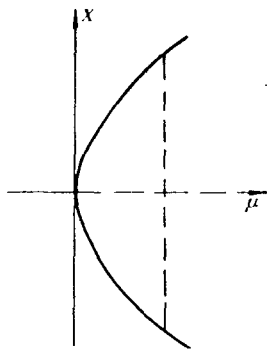


图 2.2 叉型分叉

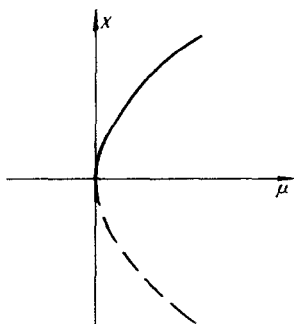


图 2.3 折叠分岔

说明各种类型分岔的上述三个例子是一般的，且可以看作仅存在最低次非线性项的标准形式。当 $x=0$ 和 $\mu=0$ 时出现叉型分岔的任何映射可以写成

$$x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x_n^k$$

按标准形式的理论，存在一个可以消去一切偶次项的变换。一切奇次项与 $\lambda = -1$ 相协调，不能消去。

2.3 逻辑斯蒂映射

May 在 1976 年就指出最简单的非线性迭代过程

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad 0 < a \leq 4 \quad (2.9)$$

已经有非常复杂的动力学性态。如果把式 (2.9) 看作是人口动力学的模型， x_n 表示第 n 代个体的相对个数，那么 a 应该限于实区间 $(0, 4)$ 。

式 (2.9) 的基本分岔性态表示于图 2.4。不动点和它们的乘子分别为 $x=0, \lambda=a$ 和 $x=1-\frac{1}{a}, \lambda=2-a$ 。在 $a=1$ 出现转换稳定性的折叠分岔。在 $a=3$, 按叉型分岔稳定支失去稳定性。当 $q = ap(1-p)$, $p = aq(1-q)$ 时, 产生 p, q 2-环。简单计算得到

$$p + q = (a + 1)/a, \quad pq = (a + 1)/a^2$$

所以 p 和 q 是方程

$$a^2x^2 - a(a + 1)x + (a + 1) = 0$$

的根, 由式 (2.4) 推得它们的乘子为

$$\lambda = a^2(1 - 2p)(1 - 2q) = -a^2 + 2a + 4$$

要注意的是当 $a=3$ 时 $\lambda=1$, 当 $a=1+\sqrt{6}=3.449490$ 时 $\lambda=-1$ 。这再一次表示 p -支和 q -支都是叉型分岔。2-环失去稳定并产生稳定的 4-环。这仅仅是无限序列叉型分岔和倍周期的开始。产生 2^k -环的前面一些 a_k 值列于下面:

a_1	3	a_5	3.568759
a_2	3.449490	a_6	3.569692
a_3	3.544090	a_7	3.569891
a_4	3.564407	a_8	3.569934

这些值好像以几何级数收敛于极限 a_∞ :

$$a_k \approx a_\infty - c\mathcal{F}^{-k} \quad (2.10)$$

式中 $a_\infty = 3.569946\dots$

$$c = 2.6327\dots$$

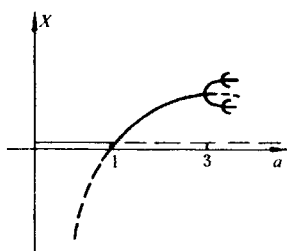


图 2.4 逻辑斯蒂映射到倍周期的分岔图