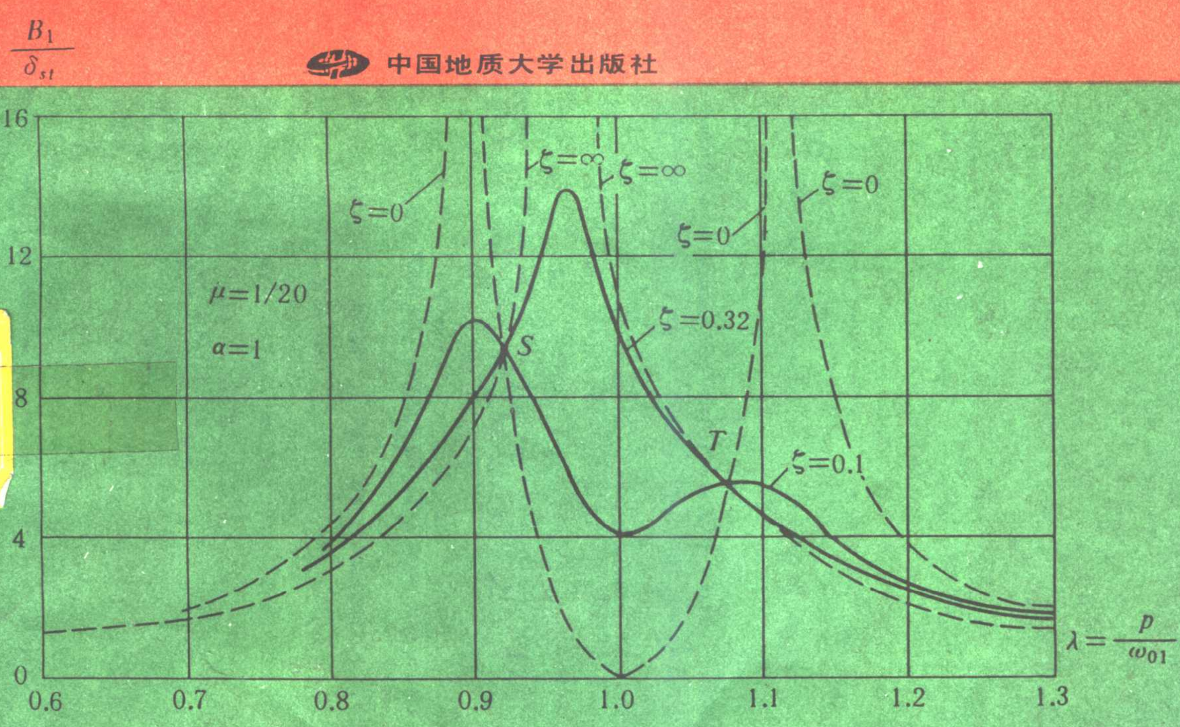
高等学校教材

机械振动

JI XIE ZHEN DONG

张建民 编

中国地质大学出版社



机 械 振 动

张建民 编

中国地质大学出版社

内容简介

本书主要介绍机械振动的基础知识。全书共分六章，分别为概论、单自由度系统的振动、二自由度系统的振动、多自由度系统的振动、多自由度系统的近似解法、振动测试技术及附录。书中在详细阐述机械振动的基本理论的同时，增加了振动理论在工程中实际应用的内容。

本书可作为勘察工程、建筑工程、机械、动力等专业少学时机械振动课程的教材或教学参考书，也可作为有关的工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

机械振动/张建民编．—武汉：中国地质大学出版社，1995.11
高等学校教材
ISBN 7-5625-1014-8

Ⅰ．机…
Ⅱ．张…
Ⅲ．机械振动-高等学校-教材
Ⅳ．TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 21342 号

出　版　中国地质大学出版社（武汉市·喻家山·邮政编码 430074）
责任编辑　赵鹤林　贾晓青　责任校对　胡义珍
印　刷　中国地质大学出版社印刷厂
发　行　湖北省新华书店经销

开本 787×1092　1/16　印张 10.625　字数 270 千字
1995 年 11 月第 1 版　1995 年 11 月第 1 次印刷　印数 1—1000 册
定价：8.35 元

前 言

随着科学技术的进步和现代工业的飞速发展，各种机械产品和工程结构在设计、制造和使用过程中对其动态性能的分析、研究和控制日益成为工程实际中需要进行研究和解决的重要课题。与此同时，振动理论也随之得到迅速发展。由于高速数字计算机和电子测试仪器的不断完善也使振动分析的方法和手段有了飞跃性的变革，这就为对复杂的机器和各种工程结构进行振动分析提供了可靠的保证。因此，了解和掌握机械振动的基本理论和分析方法对于工程技术人员来说不仅是必要的，而且也是应当具备的基础知识。

本书可作为勘察工程、建筑工程、机械、动力等专业机械振动课程的教材或教学参考书，也可作为有关的工程技术人员的参考书。

本书的胶印本曾在中国地质大学勘建学院有关专业使用多遍，这次编写对原讲义进行了必要的修改和补充，同时汲取了国内有关机械振动的内容。

本书共分六章。第一章介绍机械振动的基础知识。第二章讨论单自由度系统的振动，着重介绍固有频率的计算方法和强迫振动理论的应用。考虑到初学者的困难，第三章讨论二自由度系统振动的理论及应用。第四章着重讨论多自由度系统运动方程建立的刚度法和柔度法、固有频率和主振型的计算及应用振型叠加法求系统的各种响应，讨论中利用了矩阵代数这一数学工具。第五章介绍多自由度系统的近似解法。以上各章为本书的基本内容，此外，还配有一定数量的例题和习题，并附有习题答案以方便读者自学和练习。考虑到振动测试是振动分析必不可少的一种手段，第六章介绍振动测试的一些基础知识。

本书的各章正文部分由张建民编写，习题及附录部分由张莹编写。

本书的编写和出版过程中，得到中国地质大学出版社及地质矿产部力学课程教学研究委员会的大力支持和帮助。力学课程教学研究委员会主任委员殷绥域教授、中国地质大学周汉明教授分别审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见。在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

1995 年 3 月

目　录

第一章　概　论

§1.1　概　述

一、机械振动的概念

机械振动是指动力系统在其静平衡位置所作的往复运动。所谓动力系统是具有质量而且各部分可以作相对运动的物质所组成的系统。一个动力系统可以很简单，也可以很复杂，它可以是一个工程结构，如桥梁、高楼、水坝等，也可以是一台机器或者其部件，或一组机器等。从运动学的观点来看，机械振动是指动力系统的某些物理量（位移、速度、加速度、应力及应变等）作时而增大时而减小的反复变化。本课程仅研究机器或结构在其静平衡位置附近的微小弹性运动。

在振动研究中，通常把所研究的对象即动力系统（如一台机器）称为振动系统，简称为**系统**。把能完全描述系统运动所需的独立坐标的个数称为**自由度**。而把能唯一确定系统位置的独立参变量称为**广义坐标**。它可以是坐标，也可以是角度等。

在振动研究中，我们把外界对系统的作用称为**激励**（输入），它的作用是输入能量，它可以作用于质量，也可以作用于阻尼器或弹簧上，它可以表现为初始位移、初始速度或者外部作用力。系统在激励作用下产生的动态行为（运动）称为**响应**（输出）。振动分析就是研究系统与激励和响应三者之间的关系。这三者之间关系用下面框图表示：

$$\xrightarrow[\text{（输入）}]{\text{激励}} \boxed{\text{系统}} \xrightarrow[\text{（输出）}]{\text{响应}}$$

二、振动研究的基本问题

振动研究的总目标是：探究振动产生的原因和它的运动规律；振动对机器及人体的影响；寻求控制和消除振动的方法。

振动研究的问题，根据上面的框图，可归纳为以下三类：

1. 已知激励和系统，求响应

这一类问题称为**系统动力响应分析**，又称**振动设计**。这是工程中最基本和最常见的问题。其主要任务在于为计算和校核机器、结构的强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。动力响应包括位移、速度、加速度、应力及应变等。

2. 已知激励和响应，求系统

这一类问题称为**系统识别**。所谓求系统，主要是指获得系统的物理参数（如质量、刚度及阻尼系数等），以便了解系统的固有特性（如固有频率、主振型等）。在目前现代化试验手段已十分完善的情况下，这一研究十分有效。

3. 已知系统和响应，求激励

这一类问题称为**环境预测**。例如，为避免产品在运输过程中损坏，需要通过实地记录车辆的振动或产品的振动，以便了解运输过程是怎样一种振动环境，对产品产生怎样的激励，为减振包装提供依据。

具体地讲，振动研究的问题大体可归纳为下面几个方面：

(1) 确定系统的固有频率，预防共振的发生；

(2) 计算系统的动力响应，以确定机器或结构受到的动载荷或振动的能量水平；

(3) 研究平衡、隔振和消振方法，消除振动的影响；

(4) 研究自激振动及其他不稳定振动产生的原因以便有效地控制；

(5) 进行振动检测，分析事故原因及控制环境噪声；

(6) 振动技术的利用。

在以上问题中，最后两个问题，目前已形成独立的学科。本书着重讨论前两个问题。

§1.2 振动系统的元件

一个振动系统有 3 个组成部分，即分别把力与位移、速度、加速度联系起来的 3 部分，这 3 部分可以称为系统的 3 个基本元件，它们是**弹簧、阻尼器和质量**。下面对这 3 个基本元件加以说明。

一、弹簧

弹簧是表示**力与位移关系的元件**。在力学模型中，它被抽象为无质量并具有线弹性的元件。如图 1-1 所示。当弹簧的一端受到力 F_k 作用时，则其另一端必产生大小与 F_k 相等，方向与之相反的力 F_k'，力的大小与弹簧两端的相对位移成正比，即

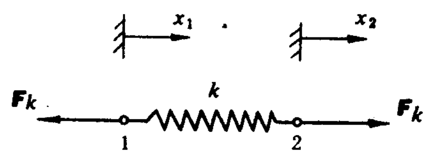


图 1-1

$$F_k=k\ (x_2-x_1) \qquad (1\text{-}1)$$

式中：k 为比例常数，通常称为弹簧常数或弹簧刚度；x_1、x_2 是弹簧两端点 1 和 2 处的位移。式 (1-1) 适于直线振动系统，式中位移 (x_2-x_1) 是相应于质量的直线位移。

在传动机构的扭振系统中，质量作扭转运动，这时用扭转弹簧。扭转弹簧刚度为 k_t*，对应的广义力为扭矩，位移为角位移。在式 (1-1) 中，若将 x_1、x_2 看作广义坐标，F_k 看作广义力，则式 (1-1) 适于扭振系统。

从能量的观点看，弹簧是一个能量储存元件，可以储存势能（应变能）。

二、阻尼器

阻尼器是表示**力与速度关系的元件**。在力学模型中，它被抽象为无质量而具有线性阻尼系数的元件。当它的一端受到力 F_r 的作用，则它的另一端必产生大小相等方向相反的力 F_r'。这个力称为阻尼力，其大小与阻尼器两端的相对速度成正比，即

---

* 在本书中弹簧刚度均用 k 表示。

$$F_r = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{1-2}$$

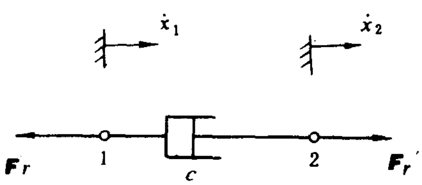


图 1-2

式中：c 为比例常数，称为阻尼系数；$\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 分别为阻尼器两端的速度。根据式(1-2)，阻尼力与相对速度一次方成正比，这种阻尼称为**粘性阻尼**，系数 c 又称**粘性阻尼系数**。

从能量的观点来看，阻尼器是一个能量耗散元件，它会消耗系统的能量。

三、质量

质量是表示**力与加速度关系的元件**。在力学模型中它被抽象为绝对不变形的刚体。当它受到力 F_m 作用，就会产生一个与 F_m 相同方向的加速度 $\ddot{x}$，对于直线的平移运动，力与加速度的关系为

$$F_m = m\ddot{x} \tag{1-3}$$

式中：m 是比例常数，它是刚体所具有的惯性的一种度量，称为刚体的质量。对于扭振系统，广义力为扭矩，广义加速度为角加速度，对应的比例常数则为转动惯量 J。

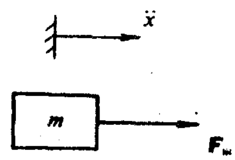


图 1-3

从能量的观点来看，质量也是一个能量储存的元件，可以储存动能。

应当指出，在一个振动系统中，上述 3 个元件 m、c、k 的值通常称为**系统参数**，并且对于任何给定的问题，这些参数均假设为**时间不变量**。

在国际单位制中，质量的单位是公斤（kg）；转动惯量的单位是公斤·米^2（kg·m^2）；力的单位是牛顿（N），扭矩的单位是牛顿·米（N·m）；直线弹簧刚度是牛顿/米（N/m），扭转弹簧刚度是牛顿·米/弧度（N·m/rad）；阻尼系数 c 的单位是牛顿·秒/米（N·s/m）。

§1.3 机械振动的分类

在工程实际中遇到的振动形式多种多样、各不相同。因此在分析、研究时往往要加以归纳分类。机械振动可根据不同的特征进行分类，下面作一简要的介绍。

一、按产生振动的原因分类

1. 自由振动

系统受初始激励后产生的振动，或系统在激励消失后所作的振动。

2. 强迫振动

系统在外激励作用下的振动。

3. 随机振动

系统在非确定性的随机激励作用下的振动。如在公路上行驶的汽车的振动等。

4. 自激振动

系统在输入和输出之间有反馈（输出对输入有反作用的影响）特性，并有能量补充产生的振动，或激励是自身运动的函数的振动。如飞机机翼的颤振等。

二、按系统的运动规律分类

1. 简谐振动

系统的响应是简谐函数的振动。

2. 周期振动

系统的响应是时间的周期函数的振动。

3. 瞬态振动

系统的响应是时间的非周期函数的振动。

三、按系统的自由度分类

1. 单自由度系统振动

只要一个独立坐标就能确定的系统的振动，或只有一个自由度的系统的振动。

2. 多自由度系统振动

需要多个独立坐标才能确定的系统的振动，或具有有限多个自由度的系统的振动。

3. 弹性体振动

需要无限多个独立坐标才能确定的系统的振动，或具有无限多个自由度的系统的振动。

四、按系统的运动微分方程分类（一）

1. 线性振动

能用常系数线性微分方程描述的振动。

2. 非线性振动

只能用非线性微分方程描述的振动。

五、按系统的运动微分方程分类（二）

1. 离散系统的振动

能用常微分方程描述的系统的振动，又称集中质量系统的振动。

2. 分布参数系统振动

只能用偏微分方程描述的运动，又称连续系统的振动。

除上述各种分类方法外，还有一些其他分类，这里不再介绍。

§1.4 谐和运动的向量表示法

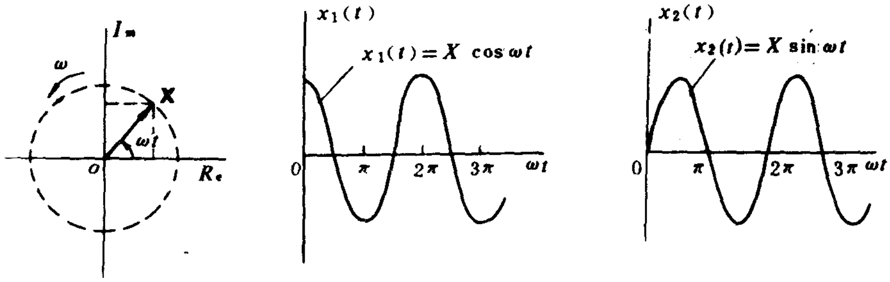
一、谐和运动的向量表示

谐和运动又称简谐振动，它是以正弦或余弦的时间函数所表示的运动。

在振动分析中，用旋转矢量表示谐和运动十分方便。设向量 $\boldsymbol{X}$ 的模为 X，等角速度为 ω，如图 1-4 所示。它在实轴 R_e 的投影为 $x_1(t)=X\cos\omega t$，在虚轴 I_m 的投影为 $x_2=X\sin\omega t$，则旋转向量可表示为

$$\boldsymbol{X}=X\cos\omega t+iX\sin\omega t=Xe^{i\omega t} \tag{1-4}$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，称为单位虚数。



（a）向量表示法　　（b）谐和运动

图 1-4

设一谐和函数为 $x(t)=X\sin\omega t$，则可用 $x(t)=I_m[e^{i\omega t}]$，其中 I_m 表示向量 X 的虚部。应当指出，用一旋转向量表示只是为了方便，它使指数 $e^{i\omega t}$ 包括在有谐和函数的方程中，这样可以大大简化数学运算。实际上，所有物理量如位移、速度、加速度、力等都必须是实数量。

谐和函数的微分运算也可用向量表示。向量 X 的微分为

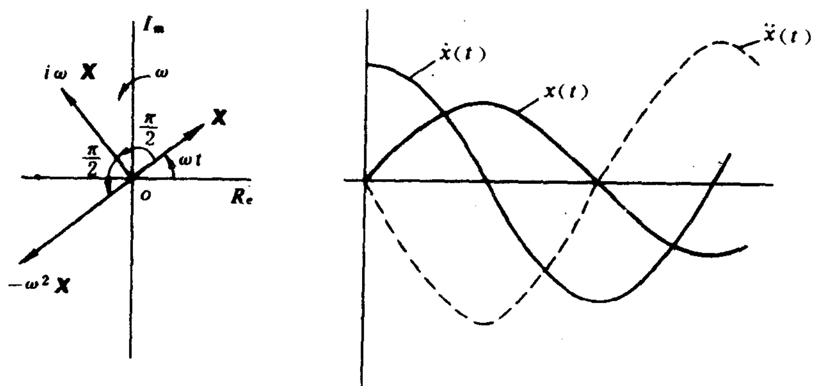
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Xe^{i\omega t})=i\omega Xe^{i\omega t}=i\omega X\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{X}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i\omega Xe^{i\omega t})=(i\omega)^2Xe^{i\omega t}=-\omega^2\boldsymbol{X}\end{aligned}\tag{1-5}$$

因此，每一次微分相当于将向量 X 乘上 $i\omega$，X 是向量的大小，ω 是实数，$|i|=1$，故每一次微分使向量的大小改变 ω 倍。由于将一向量乘上 i 相当于使其提前 90°相位角，故每一次微分使向量提前 90°角。

对于谐和函数 $x(t)=X\sin\omega t$，则其位移与速度、加速度之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}&\text{位移}\quad &x&=I_m(Xe^{i\omega t})=X\sin\omega t\\ &\text{速度}\quad &\dot{x}&=I_m(i\omega Xe^{i\omega t})=\omega X\cos\omega t\\ &&&=\omega X\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})\\ &\text{加速度}\quad &\ddot{x}&=I_m[(i\omega)^2Xe^{i\omega t}]=-X\omega^2\sin\omega t\\ &&&=X\omega^2\sin(\omega t+\pi)\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

位移、速度、加速度的向量表示如图 1-5 所示。



（a）向量表示法　　（b）谐和运动

图 1-5

二、谐和函数的加法

设向量 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 分别表示谐和函数 $x_1=X_1\cos\omega t$ 和 $x_2=X_2\cos(\omega t+\alpha)$，则

$$\boldsymbol{X}_1=X_1e^{i\omega t}$$

$$\boldsymbol{X}_2=X_2e^{i(\omega t+\alpha)}$$

那么，如图 1-6 所示为其向量和的图解法。

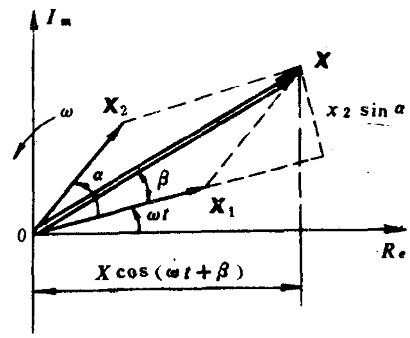


图 1-6

其向量和为

$$\because\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2=X_1e^{i\omega t}+X_2e^{i(\omega t+\alpha)}$$

$$=(X_1+X_2e^{i\alpha})e^{i\omega t}=Xe^{i\beta}e^{i\omega t}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{X}=Xe^{i(\omega t+\beta)} \tag{1-7}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} &X=\sqrt{(X_1+X_2\cos\alpha)^2+(X_2\sin\alpha)^2}\\ &\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{X_2\sin\alpha}{X_1+X_2\cos\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

$$x=x_1+x_2=R_e(\boldsymbol{X})=Re[Xe^{i(\omega t+\beta)}]=X\cos(\omega t+\beta)$$

由此可见，谐和函数合成的结果仍为谐和函数。

§1.5 任意周期函数的傅立叶分解

在振动分析中，若遇到激励是复杂的周期函数的情况，分析就比较困难，这个困难可以用傅立叶分解的办法解决。傅立叶指出，凡是周期函数都可以分解为频率是基频整数倍的各种简谐函数。对于线性系统，叠加原理有效。因此，一个受任意周期函数激励的系统的响应，等于构成该任意周期函数的各阶简谐激励产生响应的总和。这种分析方法称为傅立叶分析，或谐波分析，或频谱分析。

设有一任意周期函数 $F(t)$，其周期为 T，圆频率为 $p=\frac{2\pi}{T}$。在满足上述条件下，可以展开为傅氏级数，即

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos pt+a_2\cos 2pt+\cdots+b_1\sin pt+b_2\sin 2pt+\cdots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}[a_j\cos jpt+b_j\sin jpt] \tag{1-9}$$

其中，p 称为基频；a_0、a_j、b_j 为待定常数，只要函数 $F(t)$已知，则可用下述方法求出。

求 a_0 时，式（1-9）两边都乘以 $\mathrm{d}t$；求 a_j 时，两边都乘以 $\cos jpt\mathrm{d}t$；求 b_j 时，两边都乘以 $\sin jpt\mathrm{d}t$，然后依次在 $t=0$ 到 $t=T$ 的一个周期内逐次积分，并利用三角函数的正交性条件：

$$\int_0^T\cos ipt\cos jpt\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{T}{2} & i=j\end{cases}$$

$$\int_0^T\sin ipt\sin jpt\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \frac{T}{2} & i=j\end{cases}$$

$$\int_0^T \sin ipt\cos jpt\mathrm{d}t = \int_0^T \cos ipt\sin jpt\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^T \cos jpt\mathrm{d}t = 0 \quad j \neq 0$$

$$\int_0^T \sin jpt\mathrm{d}t = 0$$

从而得到

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t \\ a_j &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos jpt\mathrm{d}t \\ b_j &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin jpt\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

令

$$A_j=\sqrt{a_j^2+b_j^2},\ \mathrm{tg}\varphi_j=\frac{a_j}{b_j} \tag{1-11}$$

则

$$a_j\cos jpt+b_j\sin jpt=A_j\sin(jpt+\varphi_j) \tag{1-12}$$

于是，(1-9)式可改写为

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}A_j\sin(jpt+\varphi_j) \tag{1-13}$$

例 1-1 试将图 1-7 所示的周期函数 $F(t)$ 展开为傅立叶级数。

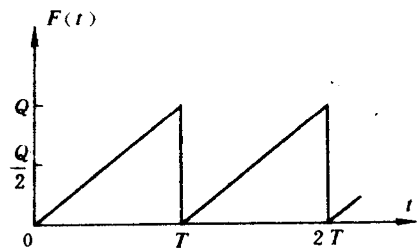


图 1-7

解 图示的周期函数的数学表达式为

$$F(t)=\frac{Q}{T}t \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

由(1-10)式可得各系数为

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{Q}{T}t\mathrm{d}t = Q$$

$$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{Q}{T}t\cos jpt\mathrm{d}t = 0$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{Q}{T}t\sin jpt\mathrm{d}t = -\frac{Q}{j\pi}$$

代入(1-9)式得

$$F(t)=\frac{Q}{2}-\frac{Q}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sin jpt$$

即

$$F(t)=\frac{Q}{2}-\frac{Q}{\pi}[\sin pt+\frac{1}{2}\sin 2pt+\frac{1}{3}\sin 3pt],p=\frac{2\pi}{T}。$$

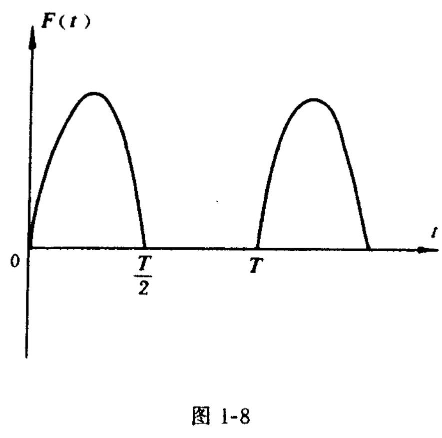


图 1-8

例 1-2 试将图 1-8 所示的周期函数展开为

傅氏级数。

解 图示周期函数为半正弦波，可表示为

$$F(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{2\pi}{T}t & (0\leqslant t<\dfrac{T}{2})\\ 0 & (\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T)\end{cases}$$

由(1-10)式可得

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t\mathrm{d}t+0=\frac{2}{T}$$

$$a_j=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos jpt\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t\cos jpt\mathrm{d}t+0$$

$$a_j=\begin{cases}0 & j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\\ -\dfrac{2}{(j^2-1)\ \pi} & j=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\end{cases}$$

$$b_j=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin jpt\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t\sin jpt\mathrm{d}t+0$$

$$b_j=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & j=1\\ 0 & j\neq 1\end{cases}$$

所以

$$F(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin pt-\frac{2}{\pi}\sum_{j=2,4,6,\cdots}\frac{1}{j^2-1}\cos jpt$$

即

$$F(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin pt-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{1\times 3}\cos 2pt+\frac{1}{3\times 5}\cos 4pt+\cdots),p=\frac{2\pi}{T}。$$

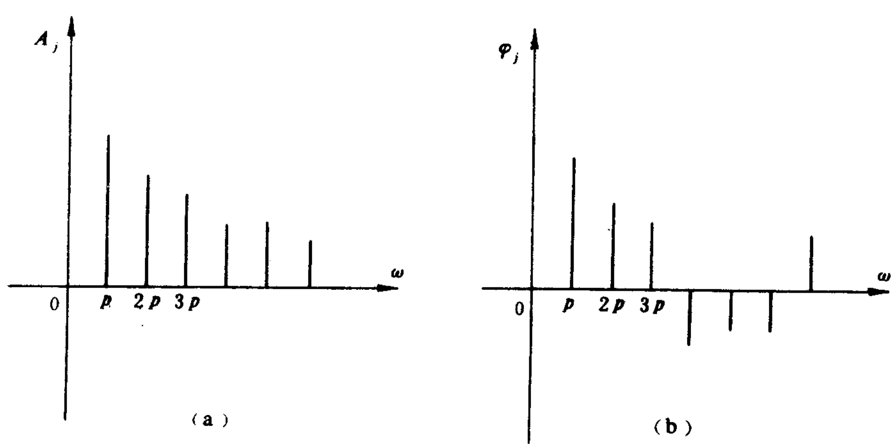
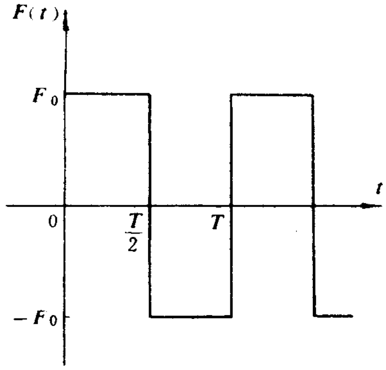


图 1-9

在机械振动中，通常将周期函数的傅立叶分解称为谐波分析。令 $\omega=jp$，为了将谐波分析的结果形象化，可以将式(1-13)中的 A_j 和 φ_j 与 ω 之间的变化关系用图形表示。其中，A_j 与 ω 之间的变化关系如图 1-9(a)所示，此图称为**振幅频谱图或频谱图**；而 φ_j 与 ω 之间的变化关系如图 1-9(b)所示，称为**相位频谱图**。由于 j 取正整数，两张频谱图中的图形都是离散的垂直线，称为**谱线**。将上述方法用于振动分析，称为**频谱分析**。下面举例说明之。

例 1-3 试将图 1-10 (a) 所示的矩形波表示的周期函数展开为傅氏级数，并画出频谱图。



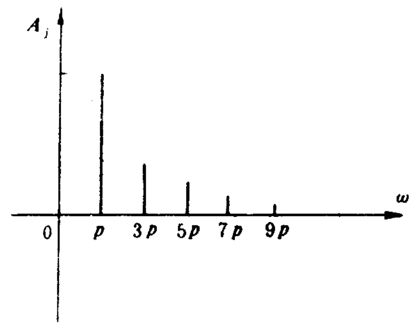


图 1-10

解 图示周期函数 $F(t)$ 可表示为

$$F(t)=\begin{cases} F_0 & (0\leqslant t<\dfrac{T}{2}) \\ -F_0 & (\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant T) \end{cases}$$

由(1-10)式，可得

$$a_0=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}-F_0\mathrm{d}t\right]$$
$$=0$$
$$a_j=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\cos jpt\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}-F_0\cos jpt\mathrm{d}t\right]$$
$$=0$$
$$b_j=\frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}}F_0\sin jpt\mathrm{d}t+\int_{\frac{T}{2}}^{T}-F_0\sin jpt\mathrm{d}t\right]$$
$$b_j=\begin{cases}\dfrac{4F_0}{j\pi} & j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots \\ 0 & j=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\end{cases}$$

故

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{j=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{j}\sin jpt$$

或

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}(\sin pt+\frac{1}{3}\sin 3pt+\frac{1}{5}\sin 5pt+\cdots),\ p=\frac{2\pi}{T}$$

因为

$$A_j=\frac{4F_0}{j\pi}\ (j=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)$$

以 $\omega=jp$ 为横坐标，A_j 为纵坐标画出矩形波的频谱图如图 1-10（b）所示。

由以上各例可知，将周期函数展开为傅氏级数的关键在于计算各系数 a_0、a_j、b_j。由高等数学可知，若函数 $F(t)=F(-t)$，则 $F(t)$为偶函数；若 $F(t)=-F(t)$，则 $F(t)$为奇函数。而 $\cos jpt$ 是偶函数，$\sin jpt$ 是奇函数。若 $F(t)$是偶函数则展开式中便不会有 $\sin jpt$ 的各项，即 $b_j=0$；若 $F(t)$是奇函数则展开式便不会有 $\cos jpt$ 的各项，即 $a_j=0$。这样可以减少一些计算量。

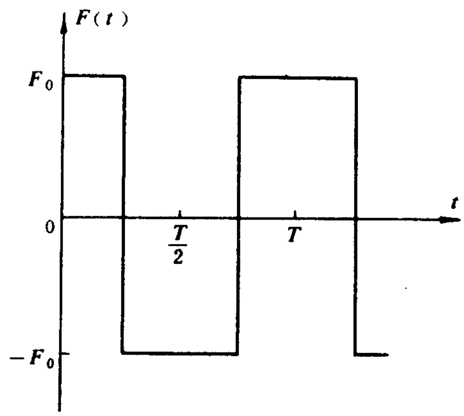
习　　题

1-1　试将图示方波展开为傅氏级数。

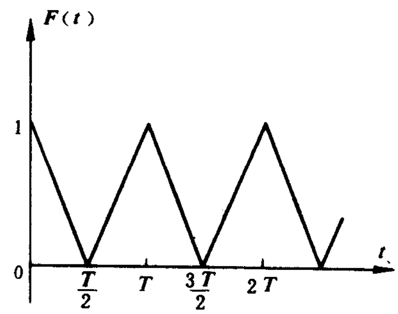
答　$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}(\cos pt-\frac{1}{3}\cos 3pt+\cdots)$

1-2　试将图示三角形波展开为傅氏级数。

答　$F(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}(\cos pt+\frac{1}{3^2}\cos 3pt+\frac{1}{5^2}\cos 5pt+\cdots)$



题 1-1 图

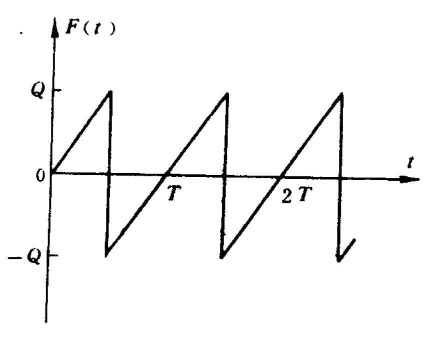


题 1-2 图

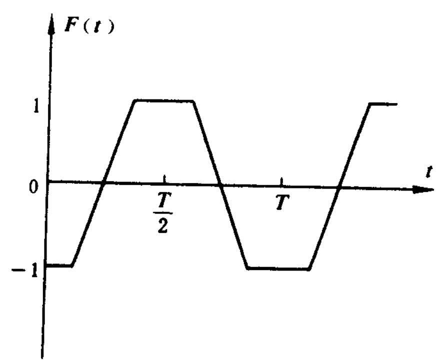
1-3　试将图示周期函数展开为傅氏级数。

答　$F(t)=\frac{2Q}{\pi}[\sin pt-\frac{1}{2}\sin 2pt+\frac{1}{3}\sin 3pt-\frac{1}{4}\sin 4pt+\cdots]$

1-4　试将图示周期函数展开为傅氏级数。



题 1-3 图



题 1-4 图

答 $F(t)=-\frac{16}{\pi^2}\sum_{j=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{j^2}\cos\frac{j\pi}{4}\cos jpt$

1-5 试将下面谐和函数进行合成，求出其合成运动的振幅和相角。

(a) $x_1=3\cos\omega t, x_2=5\cos(\omega t+35°)$

(b) $x_1=3\cos\omega t, x_2=6\sin(\omega t-\frac{\pi}{4})$

答 (a) $x=7.65, \beta=22°$；

(b) $x=4.42, \beta=106°19'$。