CMO 100

我是怎样解数学难题的

奥林匹克数学百题精解

aolinpikeshuxuebaitijingjie

孙安琪 / 编著

sunanqibianzhu

华东理工大学出版社

我是怎样解数学难题的 奥林匹克数学百题精解 华东理工大学出版社

我是怎样解数学难题的

——奥林匹克数学百题精解

孙安琪　编著

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

我是怎样解数学难题的——奥林匹克数学百题精解/孙安琪编著.
—上海:华东理工大学出版社,2001.12
ISBN 7-5628-1223-3

Ⅰ.我... Ⅱ.孙... Ⅲ.数学-竞赛-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 088824 号

我是怎样解数学难题的

——奥林匹克数学百题精解

孙安琪 编著

出版	华东理工大学出版社出版发行	**开本**	850×1168 1/32
社址	上海市梅陇路 130 号	**印张**	5.875
邮编	200237 **电话** (021)64250306	**字数**	151 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2001 年 12 月第 1 版
经销	新华书店上海发行所发行经销	**印次**	2002 年 7 月第 2 次
印刷	上海崇明晨光印刷厂	**印数**	2 051-6 080 册

ISBN 7-5628-1223-3/O·59 定价:10.00 元

内 容 提 要

中学生数学奥林匹克竞赛已越来越受到学生和家长的重视。本书选取了100道共八大类具有一定难度的竞赛题，这些题目来自于国内外中学生数学奥林匹克的考题或备选题，应当说还是具有一定代表性的。

大部分题目的题答由作者给出。结合解答过程中的解题思路，读者能够迅速了解作者在解题时的考虑方法和解题技巧。在100题后，还附有41道难度略低的习题，可供读者操练。

前言

数学是一门古老的学科，它是在人类长期的实践活动中产生和发展的。早在新石器时代，人类已从量的大小关系中获得了数的概念，并开始创设数学符号和记数法；同时，又从制造工具以及对自然界各种物体形状的反复观察与摹写中获得了简单的几何形体的概念，这就是数学的萌芽。从公元前3世纪到公元17世纪的初等数学时期内，包括初等几何、初等代数、算术、三角在内的初等数学得到了巨大的发展，初等数学大体完备。由于17世纪以前，数学研究的对象是常量，所以应用范围很小。然而到了17、18世纪，随着解析几何，微积分及微分方程等学科相继创立，数学从研究常量发展到了研究变量，这使得其应用范围大大地拓宽了，尤其在天文学等学科。到了19、20世纪，数学进一步抽象化，一个建立在算子观点上的，以集合论为基础的数学理论诞生了。更重要的是，随着科学技术的日新月异，应用数学（如对策论、规划论、运筹学、计算数学等）和边缘数学（如经济数学、生物数学）也得到了飞速的发展。现在，几乎所有的尖端科技都要大量运用数学。可以毫不夸张地说，数学是一切高科技的基础，是一个国家发展经济的基础。所以，我们不能仅仅为成绩，为考试而学数学，我们应当要有崇高的理想，为发展我国的科技事业而学数学。

自从1889年罗马尼亚首次举行了中学毕业生数学竞赛以来，已经一个多世纪了。这期间，许多国家都先后举行了数学竞赛。1959年，第一届国际数学奥林匹克（IMO）在罗马尼亚首都布加勒

斯特举行,以后每年由各国轮流举办,迄今已进行了42届。这些数学竞赛无疑是对数学的发展有着积极的意义,比如:1897年的数学竞赛金牌得主Leopolt Fejér在Fourier级数的可加性理论方面做出了许多杰出工作;1912年的金牌得主Gabor Szegö在逼近论方面的贡献引人注目,他和著名数学家George Polya合著的《分析中的定理和问题》已成为经典性著作。然而有些学生和家长一提到竞赛,总认为竞赛中的许多题目学校考试中不会考,没必要去学。他们觉得只有那些在课堂上成绩很好的人才能去参加竞赛。其实,这些看法是没有真正地了解数学竞赛。参加竞赛并不完全是为了得奖。参加到竞赛中去,能促使我们做一定量的有难度的习题,而做了这些习题,使我们思考问题的能力得到了加强,考虑问题的思路变得更清晰,从而使我们的能力真正得到提高。如果我们反复做低层次的简单题,那么尽管在考试中有可能得个高分,但是如果题型稍微变一变,即使难度并未增加,也可能使我们手忙脚乱。而如果参加过竞赛培训,有较强的解题能力,那么哪怕有些题稍微难一点,我们也不会慌张,我们不必苦思冥想是不是见到过这类题,应当用什么方法去做。不仅如此,不少竞赛知识对大学学习也有帮助。事实上,许多竞赛内容就是大学数学学习内容的基础。从中学数学到大学数学之间有一个跨度,而竞赛便是两者之间的纽带。所以,只要是准备念大学的,就完全不必担心这些知识是不是有用。

竞赛数学不仅和数学课有着密切的联系,它同时也对许多相关学科如物理、化学、计算机等有很大的帮助。众所周知,理科都是有着相通之处的。数学学得好的人,一般来说,物理和化学都不会差。而计算机和数学的关系就更大了。计算机的编程,说到底,就是做一道数学题。教算法,其实就是教如何解这道数学题。如果数学学得好,你能够完成这道数学题,那么你所要做的就只是如何将解答用计算机语言表达出来。所以,如果你准备选理科,尤其是希望自己向计算机方面发展的话,打下扎实的数学基

础是绝对有利的。

那么如何学好数学呢？怎样才是最佳的学习方法呢？我认为，听、看、做都是必须的，尤其是看和做。由于业余数学学校每年的招生人数很有限，大部分数学爱好者都没有这样的机会去听老师讲课，所以只能主要靠看书和做习题来提高自己的水平。那么主要问题就是看什么书和做什么习题。首先，是要选择适合自己难度的书和习题。足球比赛最忌讳的就是中场脱节。防守时不从中场开始逼抢，退守太深；进攻时后卫直接起脚，没有中场球员输送炮弹，那么失利也就在所难免了。看书做题亦如此。不断做简单题，不仅枯燥乏味，而且很难提高；一味追求难度，则打击信心，可能使自己丧失对数学的兴趣。所以我认为数学题的难度大致可以分为三类。① 教科书、教科书后的练习和课堂练习册。如果这些练习你能有把握做出(95%以上能做出)，那么你就可以进到第2类。② 一般参考书与习题集。这一水平的书有很多，如星级题库。有的书里题目是按难度分类的，可以选择适合自己难度的题目来做。如果你能做出90%以上的题，那么你就可以进到第3类。③ 竞赛参考书和竞赛题。这方面的书也有很多，如《数学奥林匹克》。这些书比较系统地讲述了竞赛的内容。如果能够把这些书也看懂了，大部分习题做出了，那么你就可以试试参加竞赛，争取获奖。开始不一定获奖，但只要坚持，通过这样一步一步的自我训练，一定能有很大的收获。

本书是一本具有一定难度的竞赛辅导书，也就是上述的第三类书。显然，作为一名高中学生，不可能像数学老师那样有着丰富的教学经验，所以本书并不是一本系统性的竞赛教程。但正是因为学生，使得我和读者间有着相当大的相通之处，我从我做过的上千道竞赛训练题中，尽量选出一些有一定难度的，解题思路较为巧妙的题作为例题，共100题，希望读者能够从本书中获得解题的思路和经验。同学们可以同时看一套系统性的竞赛教程如《数学奥林匹克》和本书。前者作为主线，由浅入深，循序渐进；后

者作为辅助和加强，两者相得益彰。本书并不需要读者先看或者后看哪一题，因为每一题都有各自的特点，即使在同一个内容里，所有的题目也不是按难易程度来排列的。并且由于题量小，书本薄，所以可以把本书当作“随身看”，有空就拿出来看看，回味一下精彩的解题方法。每一题的解题过程后还有解题心得，让读者可以知道我是如何想到采用这种方法以及对这道题的感受。之所以不把解题思路放在解题过程前，是因为这样能起到一个实战的效果。许多难题，只要稍微有一点提示，就能变得非常简单。而在考试时是没有一点点提示的，所以希望同学们先尽量去做，不管能不能成功，都应当努力去做。由于这100道题都有相当的难度，所以最好先做一段时间再看答案。当然，你也可以不把答案一下子看完，得到一点思路后继续努力，这样效果更好。最后要提一点，如果你做了几道，一道都没能完成，千万别灰心，因为这本书中的题确实都很难，大约是冬令营的难度。如果你能做出一半以上，赶快报名参加竞赛，否则就失去二等奖甚至一等奖了。总之，经常看看这本书，不管某道题是不是做出，过一段时间再做一遍，是很有好处的，因为这100道题都很值得回味。

在本书的撰写过程中，得到了控江中学许敏老师的大力支持，在此表示深切的谢意。

由于水平和时间等原因，难免有错误和不妥之处，也许一些题目有更佳的解法，热忱欢迎老师和学生批评指正。

作　者

2001.10

目 录

第一章

数论

人类最早从量的大小关系中获得数的概念,从自然数 1,2,3 … 开始,然后再出现 0 和负整数 $-1,-2,-3\cdots$,进而分数、无理数… 所以与整数有关的问题是最早出现的,自然也占有极重要的位置。数论便是专门研究这类问题的数学分支,在竞赛中占的比例很大。数论题可以是一些很简单的趣题,也可以是很难的题目。最著名的莫过于费马大定理了。这道题的表述是如此的简单和迷人:"方程 $x^n+y^n=z^n$ 当 n 为大于 2 的自然数时没有正整数解",以至于小学生也能够看懂。然而事实上,这是一道相当不容易的题目,三百多年来无数数学家和数学爱好者对此进行了孜孜不倦的研究,直到 1995 年才由美国数学家 Wiles A 给出了最完美的解答。本书第 24 题有着异曲同工之妙。问题很简单,解答尽管和费马大定理不能同日而语,但也够费心思的了。而第 23 题可能是本书最难的题了,难在不仅要借助于复数来解决整数问题,而且似乎除了这个方法外很难再有其他的方法了。

题 1 若整数 x,y,z,w 满足 $x^{14}+y^{14}+z^{14}=w^{14}$

求证:$7\mid xyzw$

证:首先自然想到用反证法。假设 x,y,z,w 四数都不是 7 的倍数,设法推出矛盾。

当 $x\equiv\pm1$ 时, $x^{14}\equiv1\pmod 7$

当 $x\equiv\pm2$ 时, $x^{14}\equiv4\pmod 7$

当 $x\equiv\pm3$ 时, $x^{14}\equiv2\pmod 7$

所以 x,y,z 对 7 的模只可能是(1) $\pm1,\pm1,\pm3$; (2) $\pm2,\pm2;\pm1$; (3) $\pm3,\pm3,\pm2$。

(1) 因为 x,y,z 对称,不妨设 $x=7x_1\pm1,y=7y_1\pm1,z=$

$7z_1 \pm 3$，而 $w = 7w_1 \pm 2$，

$$(7x_1 \pm 1)^{14} + (7y_1 \pm 1)^{14} + (7z_1 \pm 3)^{14} = (7w_1 \pm 2)^{14} \cdots \quad (1-1)$$

用二项式定理打开，

$$(7x_1 \pm 1)^{14} = (7x_1)^{14} \pm C_{14}^{1}(7x_1)^{13} + \cdots \pm C_{14}^{13}(7x_1) + 1$$

因为前13项显然是49的倍数，第14项中 $C_{14}^{13} = 14$，所以前14项不仅是7的倍数，而且是49的倍数，所以 $(7x_1 \pm 1)^{14} \equiv 1^{14} \pmod{49}$

于是在(1 - 1)式两边对49取同余，应有 $1^{14} + 1^{14} + 3^{14} \equiv 2^{14} \pmod{49}$

但 $1^{14} + 1^{14} + 3^{14} \equiv 32$ 而 $2^{14} \equiv 18 \pmod{49}$ 矛盾。

(2) ± 2，± 2，± 1；

(3) ± 3，± 3，± 2 同样方法可证。

综上，x, y, z, w 中不可能全不是7的倍数，即 $7 \mid xyzw$。

解题思路与心得：

解不定方程常用的方法是试几个数，设法猜出方程的解，若解有无限多个，则可用归纳法等方法证明；若解只有有限多组（一般不会很多），则只要代入验算即可。关键在于证明剩下的全不是解，通常采用对方程两边求同余，常见的有模2、模3等。而本题要证 x, y, z, w 中至少有一个是7的倍数，所以很自然地想到两边模7。但是模7后仍然剩下一小部分满足“两边对7的模相同”。于是把这些“解”代入方程，两项式打开后，发现这个14是很有用的。于是模49，立刻得证。本题难点在于对49求同余。

题2 求不能表示成 $|3^a - 2^b|$ 的最小素数 p，这里 a, b 是非负整数。

解：先从 $p = 2, 3, \cdots$ 开始，发现41以下的素数都可用较小的 a, b 表示，而41却总是写不成 $|3^a - 2^b|$ 的形式。

于是试着证明41不能表示成 $|3^a - 2^b|$ 的形式。

若 $3^a - 2^b = 41$，则 $a \geq 4, b \geq 2$，两边对9取同余 $-2b \equiv 5$，

即 $2^b \equiv 4 \pmod 9$,

因为 $2^6 \equiv 1$,所以 $2^{6k} \equiv 1$, $2^{6k+1} \equiv 2$, $2^{6k+2} \equiv 4$, $2^{6k+3} \equiv 8$, $2^{6k+4} \equiv 7$, $2^{6k+5} \equiv 5 \pmod 9$

所以 b 必定是 $6k+2$ 的形式,即 b 是偶数。设 $b = 2d$, d 为非负整数。

再两边对 4 取同余, $3^a \equiv 1$, 即 $(-1)^a \equiv 1 \pmod 4$

显然,a 是偶数。设 $a = 2c$, c 为非负整数。

于是 $3^{2c} - 2^{2d} = 41$,

因式分解,得 $(3^c - 2^d)(3^c + 2^d) = 41$,

因为 41 是素数,所以 $3^c + 2^d = 41$, $3^c - 2^d = 1$, 得 $3^c = 21$,不可能。

若 $2^b - 3^a = 41$,则 $b \geqslant 6$,

两边对 8 取同余,得 $-3^a \equiv 1$, 即 $3^a + 1 \equiv 0 \pmod 8$

因为 $3^2 \equiv 1$, 所以 $3^{2k} \equiv 1$, $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$

所以 $3^a + 1 \equiv 2$ 或 $4 \pmod 8$,矛盾。

综上,不存在非负整数 a, b 使 $|3^a - 2^b| = 41$。

解题思路与心得:

要证明比 41 小的素数可表示成 $|3^a - 2^b|$ 的形式并不难,只要找出对应的 a, b 即可。$2 = 3 - 1$, $3 = 4 - 1$, $5 = 9 - 4$, $7 = 9 - 2$, $11 = 27 - 16$, $13 = 16 - 3$, $17 = 81 - 64$, $19 = 27 - 8$, $23 = 32 - 9$, $29 = 32 - 3$, $31 = 32 - 1$, $37 = 62 - 27$。而做到 41 时,发现较小的 a, b 代入都不成功。所以猜测 41 即是题中的 p。本题关键就在于证明 41 不可表示成 $|3^a - 2^b|$ 的形式。解不定方程通常用到的方法就是取同余。

题 3　正整数 k, l, m, n 满足 $k < l < m < n$ 且 $kn = ml$

求证: $\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \geqslant k + 2$

证: 设 $l = k + a$, $m = k + b$,其中 a, b 为自然数。

于是,$n = \frac{(k+a)(k+b)}{k} = k + a + b + \frac{ab}{k}$。

因为 n,k,a,b 都为整数，所以 $\frac{ab}{k}$ 也为整数，所以 $ab \geqslant k$

$$(n-k)^2=\left(a+b+\frac{ab}{k}\right)^2 \geqslant (2\sqrt{ab}+1)^2$$

$$=4ab+4\sqrt{ab}+1 \geqslant 4k+4\sqrt{k}+1$$

当 $k \geqslant 4$ 时，$(n-k)^2 \geqslant 4k+8$ 成立。

当 $k=1$ 时，$l \geqslant 2, m \geqslant 3, n \geqslant 6, \left(\frac{n-k}{2}\right)^2=6.25 \geqslant 3=k+2$

当 $k=2$ 时，$l \geqslant 3, m \geqslant 4, n \geqslant 6, \left(\frac{n-k}{2}\right)^2=4=k+2$

当 $k=3$ 时，若 $m=5$，则 $l=4$，此时 n 不是整数。

所以 $l \geqslant 4,\ m \geqslant 6,\ n \geqslant 8,\ \left(\frac{n-k}{2}\right)^2=6.25 \geqslant 5=k+2$。

综上，原不等式成立。

解题思路与心得：

本题实际上就是："在 k 已知的情况下，估计 n 与 k 的差距。"显然，k 一定时，m,l 越大，n 越大，$n-k$ 也越大。换句话说，m,l 太小（只比 k 大一点点）是不行的。比如 $l=k+1, m=k+2$，则 $kn=k^2+3k+2$，于是 $k|2$。也就是，若 $k \geqslant 3$，l,m 就要比 $k+1$，$k+2$ 大。受这个方法的启发，设 $l=k+a, m=k+b$，设法证明 a,b 不可能太小，获得成功。

题 4 求所有的正整数 n，使 n 能被所有不大于$\sqrt{n}$ 的正整数整除。

解：设 $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$

当 $k \geqslant 3$ 时，$1|n, 2|n, \cdots, k|n$，

因为$(k-2,k-1)=1,\ (k-1,\ k)=1,\ (k-2,\ k) \leqslant 2$，

所以$\frac{1}{2}k(k-1)(k-2) \mid n$，

所以$\frac{1}{2}k(k-1)(k-2) \leqslant n < (k+1)^2$

所以 $k^3-5k^2-2k-2<0$,即 $(k^2-2)(k-5)<12$

得:$k=3, 4$ 或 5

所以 $n<36$。

当 $1 \leqslant n<4$,有 $1|n$, $n=1,2,3$ 都满足条件;

当 $4 \leqslant n<9$,有 $1|n$, $2|n$, $n=4,6,8$ 都满足条件;

当 $9 \leqslant n<16$,有 $1|n$, $2|n$, $3|n$, 即 $6|n$, $n=12$ 满足条件;

当 $16 \leqslant n<25$, 有 $1|n$, $2|n$, $3|n$, $4|n$, 即 $12|n$, $n=24$ 满足条件;

当 $25 \leqslant n<36$,有 $1|n$, $2|n$, $3|n$, $4|n$, $5|n$, 即 $60|n$,无 n 满足条件;

综上,本题的解为 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24。

解题思路与心得:

首先,这道题给人的第一感觉是 n 是一个质因子比较多的数,因为 1,2,3,4,5,… 都是 n 的约数。先试几个,发现几个比较小的如 6,12 都满足条件。于是再来个大一点的,60,由题意,1—7 都应是 60 的约数。但 1—7 的最小公倍数却是 420,远大于 60。而若 n 比 420 大,如 480,那么由题意,1—21 都应是 480 的约数。但 1—21 的最小公倍数却远大于 480。至此得到对本题解法的大致思路,即用不等式的方法求出 n 应小于几,再对少量的比较小的数逐个讨论,而不是用求同余的方法。

题 5　求出所有的自然数 n,使对于这样的 n,总存在自然数 m 使 $n|2^m-1$ 成立。

解:当 n 为偶数时,显然不存在 m 使 $n|2^m-1$。

当 n 为奇数时,以下用归纳法证明总存在自然数 m 使 $n|2^m-1$ 成立。

$n=1$ 时,显然存在 m 使 $1|2^m-1$。

设当 $n \leqslant 2k-1(k \in N)$ 时,都存在自然数 m 使 $n|2^m-1$,

则当 $n=2k+1$ 时,

① n 为奇质数时,由费马小定理,$n|2^{n-1}-1$。

② n 为奇质数的幂次，即 $n=p^{a}$，p 为奇质数，$a\geqslant 2$，

则 $p^{a-1}\leqslant 2k-1$，所以存在 m 使 $p^{a-1}|2^{m}-1$，所以 $2^{m}\equiv 1(\bmod p)$

于是 $2^{mp}-1=(2^{m}-1)(2^{m(p-1)}+2^{m(p-2)}+\cdots 2^{m}+1)$

因为 $p^{a-1}|2^{m}-1$，

且 $2^{m(p-1)}+2^{m(p-2)}+\cdots 2^{m}+1\equiv 1+1+\cdots+1=p\equiv 0(\bmod p)$

所以 $p^{a}|2^{mp}-1$。

③ n 有若干个不同的奇质因子，设质数 $p|n$，自然数 a 满足 $p^{a}|n$，且 p^{a+1} 不整除 n，

令 $n_1=p^{a}, n_2=\dfrac{n}{p^{a}}$，则 $(n_1,n_2)=1, n_1\leqslant 2k-1, n_2\leqslant 2k-1$，

所以存在 m_1, m_2 使 $n_1|2^{m_1}-1, n_2|2^{m_2}-1$。

令 $m=m_1m_2$，则 $n_1|2^{m}-1, n_2|2^{m}-1$，

因为 $(n_1,n_2)=1$，所以 $n_1n_2|2^{m}-1$，即 $n|2^{m}-1$。

由上述归纳法可知，只要 n 为奇数，总存在自然数 m 使 $n|2^{m}-1$ 成立。

解题思路与心得：

首先一眼就看出 n 不可为偶数。然后试了几个奇数 1,3,5,7,… 发现都满足条件，所以猜测所有奇数都满足条件。然后看到 n 为质数时，只要 $m=n-1$ 即可。再用类似于归纳法的方法证明②③。

题 6　设 $n\in N$，求证：$z^{n+1}-z^{n}-1=0$ 有模为 1 的复根的充要条件是 $6|n+2$。

证：若 $6|n+2$，设 $n=6k-2, k\in N$。

则取 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^{n+1}-z^{n}-1=z^{n}(z-1)-1$

$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1=0$$

所以原方程有一个模为 1 的根 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

若 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的根 α，则由 $\alpha^n(\alpha-1)-1=0$ 得 $|\alpha-1|=\left|\frac{1}{\alpha^n}\right|$，

而 $|\alpha|=1$，所以 $\left|\frac{1}{\alpha^n}\right|=1$。

所以 $(\alpha-1)(\bar{\alpha}-1)=1$，即 $\alpha\bar{\alpha}-\alpha-\bar{\alpha}+1=1$。

因为 $|\alpha|=1$，所以 $\alpha\bar{\alpha}=1$，所以 $\alpha+\bar{\alpha}=1$。

所以 $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，于是，由 $\alpha^n(\alpha-1)-1=0$，得：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

所以 n 是 $6k-2$ 的形式。

解题思路与心得：

本题证明充分性的方法是凑出一个模为 1 的根。由于注意到 $n=6k-2$，所以猜幅角为 $\frac{2\pi}{6}$ 的复数。而证明必要性有一点难度。一般很难想到解出 α 后，再证明 $6\mid n+2$。证明必要性需要我们熟练的运用复数运算。

题 7 如果 a,b 与 n 为正整数，证明：有整数 x,y 使得 $(a^2+b^2)^n=x^2+y^2$。

证：要直接证明有整数 x,y 有一定的困难。但由于 n 是一个正整数，所以考虑用归纳法。

当 $n=1$ 时，只要 $x=a,y=b$ 即可。

设当 $n=k$ 时，有 x,y 使：$(a^2+b^2)^k=x^2+y^2$，

则当 $n=k+1$ 时，$(a^2+b^2)^{k+1}=(x^2+y^2)(a^2+b^2)$

$=x^2a^2+x^2b^2+y^2a^2+y^2b^2=(xa-yb)^2+(xb+ya)^2$

所以当 $n=k+1$ 时，$(a^2+b^2)^n$ 仍可以拆成两个平方数之和。

由上述归纳法可知，原命题成立。

本题还有一种方法,可不用归纳法直接证明原命题。

$(a^2+b^2)^n=(a+bi)^n(a-bi)^n$

设$(a+bi)^n=x+yi$,由二项式定理,不难证明,

$(a-bi)^n=x-yi$

所以$(a^2+b^2)^n=(a+bi)^n(a-bi)^n=(x+yi)(x-yi)$

$=x^2+y^2$。

解题思路与心得:

这道题比较简单,不需要多少解题技巧。第一种方法是对 n 用归纳法,比较容易想到。其中$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(xa-yb)^2+(xb+ya)^2$ 是一个比较常用的恒等式。第二种方法很巧妙。本题所涉及的 a,b,n,x,y 都是整数,但第二种方法却用到了复数,最后回到整数上。其实有不少关于整数的题目,用到复数后可能使题目简化。

题 8　设 n 是给定的奇数,$n>3$,假设 n 能分解为$n=uv$,其中 u,v 都是正整数且$0<u-v\leqslant\sqrt[4]{64n}$。

证明:这样的分解是唯一的。

证:$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2=\left(\frac{u-v}{2}\right)^2+uv\leqslant2\sqrt{n}+n<(\sqrt{n}+1)^2$

所以$\frac{u+v}{2}<\sqrt{n}+1$

因为 n 是奇数,所以 u,v 都是奇数,所以$\frac{u+v}{2}$为整数

所以 $\frac{u+v}{2}\leqslant[\sqrt{n}+1]$

而另一方面,$\frac{u+v}{2}>\sqrt{uv}=\sqrt{n}$

所以$\frac{u+v}{2}=[\sqrt{n}+1]$,即 $u+v=2[\sqrt{n}+1]$。

于是,$u+v=2[\sqrt{n}+1]$,$uv=n$,可解出 u,v。即分解的方法唯一。