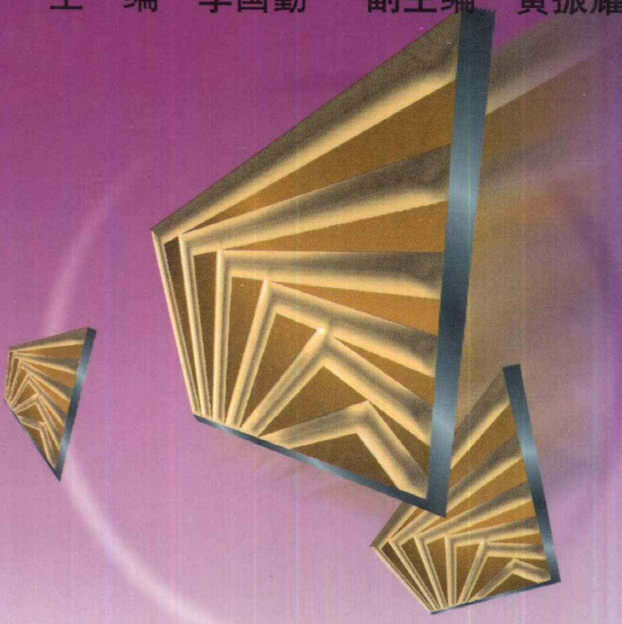
上海财经大学成人教育丛书

WEIJIFEN

微积分

主　编　李国勤　　副主编　黄振耀



上海财经大学出版社

上海财经大学成人教育丛书

微积分

主　编　李国勤
副主编　黄振耀

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/李国勤主编,黄振耀副主编. 一上海:上海财经大学出版社,2000.2
(上海财经大学成人教育丛书)
ISBN 7-81049-403-1/O·09

Ⅰ.微… Ⅱ.①李… ②黄… Ⅲ.微积分-成人教育:高等教育-教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 13686 号

□ 特约编辑 李炳钊
□ 责任编辑 王联合
□ 封面设计 周卫民

WEIJIFEN
微 积 分

主 编 李国勤
副主编 黄振耀

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)
全国新华书店经销
上海第二教育学院印刷厂印刷
上海印刷七厂一分厂装订
2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 16.625 印张 417 千字
印数 1—5 000 定价:24.00 元

前　言

微积分是高等院校经济管理类专业的基础课之一.

本书介绍从事经济管理和经济理论研究所需要的微积分基础知识.本教材是为适应财经类专业专科段学生和成人教育的实际需要而编写的经济数学系列教材之一,根据成人高等教育的特点,在教学大纲范围内及在不影响微积分学系统性和科学性的前提下,编写时适当调整了部分内容的顺序,对基本内容和解题方法着重分析和归纳,并安排了适量的典型例题,力求做到重点突出,通俗易懂,循序渐进.在编写过程中,我们还参考了经济学中的有关内容,充实了经济应用实例.本书每一章都配有适量习题,第一题均为选择题,以帮助读者加深理解有关概念,掌握基本方法.书末附有习题解答,并在附录中录入集合和初等数学知识简介,以便读者使用.另外请注意,本书中正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数按国标要求分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$ 表示.本书可作为高等院校财经类专科和成人教育经济数学(一)微积分课程的教材或教学参考书,也可以作为高等教育自学考试财经类《高等数学(一)》的自学参考书.

上海财经大学成人教育学院的全体数学教师参加了本教材的编写工作,李国勤为主编,黄振耀为副主编.书中的函数、极限与连续部分由集体编写,一元函数微分学和多元函数微分学(包括空间解析几何简介)由黄振耀编写,一元函数积分学(包括微分方程简介)和二重积分由李国勤编写,无穷级数和附录由雍庆生编写,最

后由李国勤统纂定稿.

本书在编写过程中,得到了学院领导和兄弟部门的大力支持和关心,在此谨表谢意.

编　者

2000 年 2 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学中最基本的研究对象. 微积分学研究函数限于实数范围. 本章主要介绍一元函数的概念及其性态讨论、反函数的求法,并给出复合函数与初等函数的概念.

§1　变量及其变化范围

一、常量与变量

在考察自然现象、进行科学实验或各种经济活动时,常常会遇到各种各样的量,其中有的量在过程中不变化,也就是保持一定的数值,这种量叫作**常量**;还有一些量在过程中变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫作**变量**.

例如,某工厂工人的月工资分为两部分:基本工资和效益工资,基本工资是根据工人的技术等级等因素决定的,通常在一个时期(如一年内)是不变的,也就是常量. 而效益工资是根据工人每月的产品产量和质量来决定的,所以它就是个变量.

当然,一个量是常量还是变量,要根据具体情况作具体分析,同一个量在某个过程中是常量,而在另一个过程中完全有可能是变量. 例如,就一个时段内而言,基本工资是常量,但就一个比较长的时段而言,由于有晋级等因素,基本工资则是变量.

通常以 x,y,z,u,t 等表示变量;以 a,b,c,x_0,x_1,y_0 等表示常量.

在数轴上,每一点都唯一地代表一个实数,而任一实数也都对

应数轴上唯一的一点. 正因为全体实数与数轴上的点的这种一一对应关系，故常量可以用数轴上的定点表示，变量可以用动点表示，并可以把“实数 a”也说成“数轴上的点 a”或“点 a”.

二、区间、邻域

区间是最常见的一类数集，分为两种：

(1)有限区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$，则

称数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为**闭区间**，记作 $[a,b]$；

称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)；

称数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 为**半开半闭区间**，分别记为 $(a,b]$ 和 $[a,b)$；

并称 a 为区间的左端点，b 为区间的右端点，以上有限区间的长度均为 $b-a$.

开区间 (a,b) 表示数轴上介于 a 与 b 两点之间的所有点的全体；闭区间 $[a,b]$ 比开区间多两个端点；而 $(a,b]$ 只比 (a,b) 多了一个右端点，$[a,b)$ 只比 (a,b) 多了一个左端点(见图 1－1).

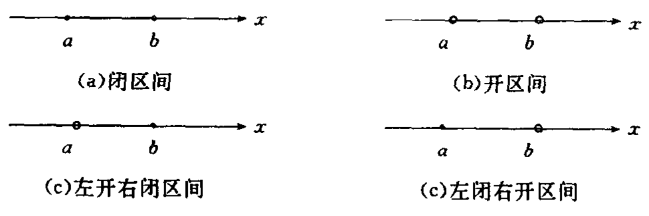


图1－1 数轴的区间表示法

(2)无限区间

设 a 为实数，满足不等式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x，可用区间

$$[a,+\infty)$$

表示. 记号“$+\infty$”，读作“正无穷大”；

满足不等式 $x>a$ 的全体实数 x，可用区间

$$(a,+\infty)$$

表示.

类似地可以定义：区间 $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$；

区间 $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$.

其中记号“$-\infty$”读作“负无穷大”.

全体实数 $\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 也可以用区间形式表示为：

$$(-\infty,+\infty).$$

以后，我们还经常要用到与区间有关的邻域概念.

定义 设 a 与 δ 都是实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体叫作**点 a 的 δ 邻域**. 点 a 叫作该邻域的中心，δ 叫作该邻域的半径.

由于上述绝对值不等式与

$$-\delta<x-a<\delta$$

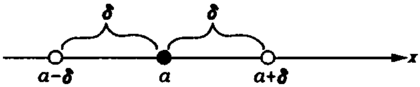


图 1—2 邻域示意图

等价，因此有

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

从而，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间

$$(a-\delta,a+\delta)$$

(见图 1—2). 所以，点 a 的 δ 邻域，也就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间.

例如，“点 $x_0=5$ 的 $\frac{1}{10}$ 邻域”就是指满足不等式

$$|x-5|<\frac{1}{10}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的全体实数，即开区间：(4.9,5.1).

§2 函　数

一、函数概念

在某个变化过程中，往往同时有几个变量在变化着，这些变量往往是相互联系的，并且遵循着一定的变化规律. 下面我们先考察几个例子.

例 1　某种商品的售价为每件 10 元，则销售收入 R 与销售量 q 之间由公式

$$R=10q \quad (q>0)$$

联系着，销售量 q 的值确定了，销售收入 R 也就随之唯一确定了.

例 2　某企业上半年甲种零件月产量统计表：

t(月序)	1	2	3	4	5	6
产量 y(万个)	2.4	3.2	2.8	2.7	2.0	2.9

该统计表体现了月序 t 自 1 至 6 的任何一个值都有唯一确定的产量 y 与之对应.

例 3　图 1－3 中的曲线 l 表达了某种商品的销售成本. 对于销售量 x 在 $[0,b]$ 上的任一取值 Q，都能从图上找到相应的成本值 $y=c$.

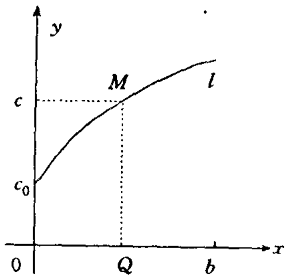


图1－3

以上三例，如果抽去所考虑的实际意义，那么，它们都表达了两个变量之间的相依关系. 这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值

与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 D 是非空的实数集合，x 和 y 是两个变量，如果对于 x 的取值范围 D 内的每一个值，按照某一个确定的对应法则 f，变量 y 有唯一确定的值与之对应，则称 y **是确定在 D 上的 x 的函数**，记作

$$y=f(x), x\in D.$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

这类一个自变量的函数称为一元函数.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取 D 中某个定值 x_0 时，因变量 y 的相应值称为 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作

$$f(x_0), \text{或 } y|_{x=x_0}, f(x)|_{x=x_0}.$$

此时，也称**函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义**. 当自变量 x 在定义域上取值时，其相应的函数值的全体，称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

常用的函数表示法有三种：

(1)解析法

用数学算式(公式)表示一个函数，称这种表示函数的方法为**解析**法，也称为公式法. 如例 1 中的函数：

$$R=10q \quad (q>0);$$

还有像指数函数、对数函数等，如

$$y=5^x, x\in(-\infty,+\infty),$$

$$y=\log_2 x, x\in(0,+\infty),$$

都是用解析法表示的函数.

(2)列表法

把自变量所取的值和对应的函数值列成表格来表示函数的方法，称为**列表**法，也称为**表格**法. 如例 2，还有，我们使用的各种数学用表等，都是用列表法来表示函数的例子.

(3)图像法

由图像给出函数的对应法则的方法称为**图像法**，也称为**图示法**. 如例 3 实质上由图 1－3 表示了销售成本函数：$y=C(x)$. 因为，当自变量 x 在$[0,b]$上任意取定值 Q 时，即有成本曲线 l 上相应的点 M 的纵坐标为 C(即因变量 y 的值)，反过来也可以说函数 $y=C(x)$的图像(图形)是曲线 l.

函数的这三种表示法各有所长：用表格法表示的函数，查阅方便；用图像法表示的函数，直观、便于考察函数的变化规律；用解析法表示的函数，便于进行各类运算和理论研究. 本课程中讨论的函数大多由解析法表示. 当然，在讨论函数时，往往并不局限于用一种方法. 例如，我们经常对解析法表示的函数借助于函数的图像加以分析、研究.

对于用解析法表示的函数，其定义域如果没有作特别指明，那么，它的存在域就是它的定义域，即此时函数的定义域就是使解析式有意义的自变量值的全体.

例如，函数：

$$y=x^2,$$

也就是函数：

$$y=x^2, x\in(-\infty,+\infty);$$

又如，函数：

$$y=\log_2 x,$$

也就是函数：

$$y=\log_2 x, x\in(0,+\infty).$$

由函数定义可知，定义域和对应法则是构成函数的两大要素. 当且仅当定义域相同、对应法则也相同的函数才认为是相同的函数. 值得注意的是，两个相同的函数，其相应的对应法则的表达形式可能不同. 例如，函数：

$$f(x)\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$$

与函数：

$$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$$

实质上是相同的.

例 4 下列 $f(x)$和 $g(x)$是相同函数的为( ).

A. $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

B. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$;

C. $f(x)=\log_3 x^2$, $g(x)=2\log_3 x$;

D. $f(x)=\log_3\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}\log_3|x|$.

解 应选 B.

因为在 A,C,D 中,$f(x)$的定义域和 $g(x)$的定义域都不相同;

在 B 中,$f(x)$和 $g(x)$既有相同的定义域$(-\infty,+\infty)$,又有实质相同的对应法则,所以 B 中的 $f(x)$和 $g(x)$是同一个函数.

例 5 求下列函数的定义域:

(1)$y=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$;

(2)$y=\frac{1}{x-3}+\log_5(x-2)$.

解 (1)因为偶次根号内的被开方式必须非负,分式的分母不能为零,从而当$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\ \sqrt{2x-1}\neq 0\end{cases}$即 $x>\frac{1}{2}$时,$y=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$才有意义.

所以 $y=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$的定义域为:$(\frac{1}{2},+\infty)$.

(2)因为分式$\frac{1}{x-3}$只有当 $x-3\neq 0$ 时才有意义,而 $\log_5(x-2)$当真数$(x-2)>0$ 时有意义.

由$\begin{cases}x-3\neq 0\\ x-2>0\end{cases}$ 解得:$x>2$ 且 $x\neq 3$.

所以,函数 $y=\frac{1}{x-3}+\log_5(x-2)$的定义域为:

$$(2,3)\cup(3,+\infty).$$

二、分段函数

在用解析法表示的函数中有一种函数称为**分段函数**，它在定义域的不同部分用不同的算式来表示变量间的对应法则，即对于其定义域内自变量的不同值，函数不能用一个相同的解析式表达，而要用两个或两个以上不同的解析式来按段表达.

例如，$y=f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ 2, x=0\\ -x, x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数，此函数的对应法则是：当 $x\in(0,+\infty)$时，按 $y=x^2$ 来确定函数 y 的值；当 $x=0$时，函数 y 的对应值为 2；当 $x\in(-\infty,0)$时，按 $y=-x$ 来确定函数 y 的值.

应该明白，一个分段函数只是在定义域的不同部分需要用相应的解析式计算函数值，不能看作是几个函数. 分段函数的定义域是各分段定义域的并集. 例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为：$(-\infty,+\infty)$. 函数图像见图 1－4.

又如函数

$$y=g(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

的定义域为：$[0,+\infty)$，函数图像见图 1－5.

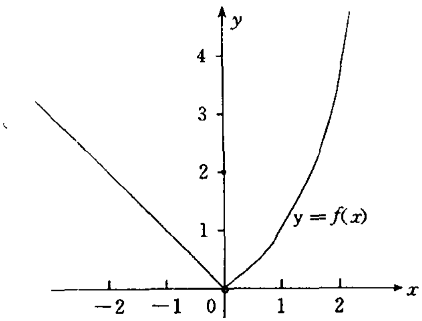


图1－4

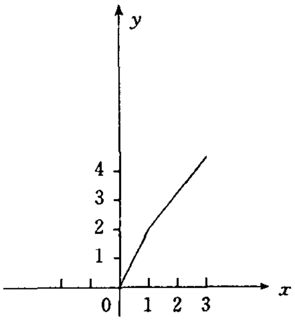


图1－5

例 6 求下列函数值：

(1) $y=x^2+x+3$. 求：$y|_{x=-4}$，$y|_{x=0}$，$y|_{x=2}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<-1 \\ x^3, & -1<x\leqslant\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x}, & x>\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ 求：$f(-2)$，$f(0)$，$f(6)$.

解 (1)因为 $y=x^2+x+3$，

所以
$$y|_{x=-4}=(-4)^2+(-4)+3=15;$$
$$y|_{x=0}=0^2+0+3=3;$$
$$y|_{x=2}=2^2+2+3=9.$$

(2)因为 $f(x)$ 是分段函数，

$x=-2$ 属于 $x<-1$ 的范围内，故 $f(-2)$ 的值按第一段公式来求；$x=0$ 在 $-1<x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 的范围内，故 $f(0)$ 的值按第二段公式来求；而 $x=6$ 在 $x>\dfrac{3}{2}$ 的范围内，故 $f(6)$ 按第三段解析式来求.

所以
$$f(-2)=(-2)^2-1=3;$$
$$f(0)=0^3=0;$$
$$f(6)=\frac{1}{6}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com