

# 混凝土的强度和破坏 译文集

水利水电科学研究院译

水利出版社

5075  
TUS28

# 混凝土的强度和破坏

## 译 文 集

水利水电科学研究院译

水利出版社

## 内 容 提 要

本书有译文18篇，涉及混凝土强度和破坏的最新试验研究方法和成果，以及某些著名的经典理论。内容包括：混凝土多轴应力状态下的强度和变形，混凝土的破坏机理和准则，断裂理论及其在混凝土中的应用，混凝土断裂韧性的研究等。

本书可供水利水电和土建专业的科技工作者和高等院校师生参考。

### 混凝土的强度和破坏译文集

水利水电科学研究院译

\*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

\*

850×1168毫米 32开本 9 $\frac{1}{2}$ 印张 262千字

1982年5月第一版 1982年5月北京第一次印刷

印数0001—3920册 定价1.25元

书号15047·4183

## 目 录

译者序 .....	( 1 )
破裂理论 .....	[英]A.A.Griffith ( 8 )
受压岩石中Griffith裂缝上的摩擦作用	
..... [美]F.A.McClintock, J.B.Walsh	( 19 )
关于Griffith断裂理论推广到岩石问题	
..... [美]W.F.Brace	( 33 )
硬化水泥浆和混凝土的断裂	
..... [丹麦]Fariborz Radjy, Torben C.Hansen	( 40 )
结构元件的水泥混凝土材料的断裂韧性	
..... [日]Masanori suyama, [南朝鲜]Sang-chul kim [日]Hideo kitagawa	( 58 )
混凝土梁开裂的断裂分析 .....	[美]N.M.Hawkins, Andreas N.Wyss, Alan H.Mattock ( 64 )
断裂力学在混凝土中的应用	
..... [美]Clyde Kesler, Dan J.Naus, James L.Lott	( 84 )
双轴荷载下的混凝土应力-应变特性和断裂	
..... [美]M.Ebrahim Tasuji, Floyd O.Slate, Arthur H.Nilson	( 96 )
对双轴压缩下轻质混凝土性质的研究( $T_1 \geq T_2, T_3 = 0$ )	
..... [波兰]Jozef A.Glomb, Piotr J.Patas	( 111 )
在三轴荷载作用下混凝土变形和破坏的试验研究	
..... [意]P.Bertacchi, R.Bellotti	( 118 )
考虑空间压应力状态和水的渗透压力确定	
萨扬诺-舒申斯克水电站大坝混凝土的设计应力	
..... [苏]И.Б.Соколов, В.А.Логунова, В.В.Пермякова, М.А.Печенкина, И.Н.Филипович	( 131 )

- 适用于承受短期多轴应力的普通混凝土破坏的诺模图 ..... [英]D.J.Hannant (149)
- 对混凝土试件进行三轴强度研究的试验装置 ..... [西德]Helmut Winkler (180)
- 素混凝土破坏理论与设计准则 ..... [英]K.Newman, J.B.Newman (194)
- 三轴应力作用下混凝土的性能 ..... [法]H.Gachon (247)
- 混凝土的破坏机理 ..... [日]小林昭一 (266)
- 混凝土的破坏准则 ..... [丹麦]N.S.Ottosen (290)
- 混凝土的破坏强度和弹性极限的比较研究 ..... [意]G.Robutti, [意]E.Ronzoni,  
[丹麦]N.S.Ottosen (301)

## 译 者 序

近二十年来，对混凝土基本力学性能等的研究逐渐增多，取得了不少成果。为方便读者阅读本书有关文章，我们在这里简要地介绍一下混凝土的破坏机理、断裂和强度理论。

混凝土是由集料和硬化水泥浆组成的复合材料。用X光摄影可以发现，没有受过荷载的混凝土在其集料和硬化水泥浆的结合面上就存在某些微裂缝，这种缝就是所谓“结合缝”。浇注混凝土后的泌水作用和干燥期间水泥浆的收缩受到硬骨料的限制，是产生结合缝的主要原因。所以，混凝土本身就是一种带微裂缝的固体。

人们很早就发现，固体的实际强度（即宏观强度）一般仅为理论强度的 $1/10 \sim 1/1000$ 。1920年Griffith用实际固体中存在很多随机方向的微裂缝或缺陷来解释这种现象。当受到作用力时，固体中某些裂缝端部附近就产生应力集中。当应力达到理论强度时，裂缝就开始扩展。随着荷载的增加，众多的裂缝不断扩展，裂缝体系变得不稳定，最终导致固体的破裂。混凝土比较接近这样的固体，所以，它的破坏实质上就是一个裂缝开展和失稳的过程。

Griffith理论认为，使固体产生新的断裂表面，必须消耗能量，即固体表面能。如果裂缝扩展释放的应变能达到形成新表面所需要的表面能时，裂缝就处于临界状态；由此可求出材料的宏观强度 $\sigma_t$ ：

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (1)$$

式中 $E$ 为材料的弹性模量； $\gamma_s$ 为材料的单位面积表面能； $a$ 为裂缝半长。

根据弹性理论，可以求得均匀受拉的无限大平板中椭圆形裂缝（Griffith裂缝）缝端的最大应力：

$$\sigma_m = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} = \alpha_0 \sigma, \quad \rho \ll a \quad (2)$$

式中  $\alpha_0 = 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ ，即应力集中系数； $\rho$  为缝端曲率半径； $\sigma$  为宏观应力，其方向与裂缝垂直。由式(1)和式(2)可得：

$$\sigma_t \sqrt{\pi a} = \frac{1}{2} \sigma_m \sqrt{\pi \rho} = \text{常数} = K_{Ic} \quad (3)$$

显然，确定 $\sigma_t$ 和 $a$ 要比确定 $\sigma_m$ 和 $\rho$ 容易得多。 $K_{Ic}$ 可称之为断裂韧度，是一个材料参数，用以测定材料抵抗断裂的能力（也可视为缝端分子结合力）。

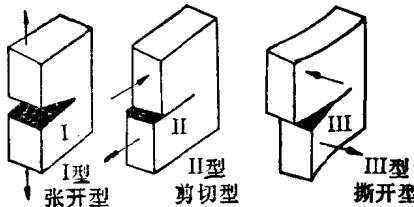


图 1 开裂的三种基本型式

Irwin利用Westergaard应力函数，求得了缝端应力和位移的近似表达式。对于 I 型裂缝（图 1），其缝端应力和位移为：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{K_1}{8\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \begin{bmatrix} (2\nu-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2\nu+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中  $r$  和  $\theta$  为以缝端为坐标原点的极坐标； $\mu$  为剪切模量；对于平面应变  $\nu=3-4\nu$ ， $\nu$  为泊桑比，对于平面应力  $\nu=(3-\nu)/(1+\nu)^{-1}$ 。 $K_I$  即应力强度因子，代表缝端应力场的强度。随着外力的增加， $K_I$  也增加，当  $K_I$  达到  $K_{Ic}$  时，断裂就发生。对于 Griffith 裂缝， $K_I=\sigma\sqrt{\pi a}$ ；对于其他裂缝问题， $K_I$  可以用解析方法求得。 $K_{Ic}$  则可用各种实验方法求出。

对于 II 型和 III 型裂缝，也存在相应的应力和位移表达式，以及  $K_{II}$ 、 $K_{III}$  和  $K_{IIc}$ 、 $K_{IIIc}$ 。

测定  $K_c$  最简便的方法是把预制了切口或裂缝的试件 加荷 到断裂，求得裂缝失稳时的荷载  $P_m$ ，再把  $P_m$  代入计算 该型试件的  $K$  的公式中，即可求出  $K_c$ 。目前研究  $K_{Ic}$  的资料较多，研究  $K_{IIc}$  和  $K_{IIIc}$  的较少，研究复合型断裂的则更少。

由于混凝土存在结合缝，而缝端或切口端部由于应力集中，又会形成某种微裂缝区。裂缝的生成和扩展会消耗能量，因此微裂缝对断裂韧度的影响值得加以研究。

Hawkins 研究了一个受均匀拉力的圆柱体。他用位于圆柱体中央的一个空心球，来模拟圆柱体中众多的微裂缝对试件刚度的削弱作用，利用柔度的概念求出了如下关系式：

$$G_{Ic} = \frac{\sigma_t^2 R}{0.494^2 E} \approx \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (6)$$

式中  $R$  是圆柱体的半径。抗拉强度  $\sigma_t$  可由试验求得。上式显示了尺寸效应。

虽然早在 1960 年 Kaplan 就进行了混凝土断裂韧度试验，但目前仍无标准的混凝土断裂韧度测试方法。今后应当继续研究试件的尺寸效应、微裂缝和不均质性等对韧度的影响。

断裂理论可以用来研究混凝土的破坏机理；用来判断混凝土结构中某些严重裂缝的危害程度（如闸墩、支墩坝和原子能电站压力容器等上的裂缝）；用来改进结构的设计方法（如计算钢筋混凝土构件的开裂荷载和判定混凝土浇筑块中贯穿缝的稳定条件等）。人们还期望能用断裂理论革新重力坝等的设计理论。

随着科学和技术的发展，一些能使材料处于复杂应力状态下的试验机陆续出现，如二轴压力机、假三轴压力机（ $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ； $\sigma_i$ 代表主应力）和真三轴压力机（ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ），在试验研究混凝土强度破坏曲面和曲线方面取得不少进展。

通常，在任意力作用下的固体的可能破坏应力组合，可用一个有 6 个自变量的曲面来表示。虽然混凝土实际上是一种非均质的多相材料，但在现阶段，还只能近似地把它看成均质、各向同性的连续介质，以便应用连续介质力学来分析混凝土结构。因此，混凝土的强度破坏曲面，可用下式来表示（设 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ，压为正，拉为负）：

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (7)$$

材料试验表明，延性金属材料的屈服主要是切应力引起的，所以材料的屈服与静水压力无关，屈服面是以  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  为轴的圆柱体的表面。混凝土的抗拉和抗压强度相差悬殊，其破坏与静水压力关系很大，所以破坏面是以  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  为轴的锥形体的表面。与  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  直线垂直的平面的方程为  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = c$ ， $c$  为任意常数。 $c=0$  的平面叫  $\pi$  平面， $c \neq 0$  的其它平面叫等体积应力平面。等体积应力平面与破坏曲面相交，就在该平面上留下静水压力为某一常数的破坏线。图 2 便是一个典型的例子。由图 2 可知，实测等体积应力平面上的破坏曲线的曲率，随着体积应力的增大而增加，破坏曲面呈凸形，即三瓣曲面。

虽然人们能够用试验方法测定材料的破坏曲面，但不能对每个结构物都进行系统的材料试验；对于结构工程师和研究人员来说，也需要有理论根据又符合试验结果的强度理论作为判断材料破坏的依据和本构关系的基础，以便对某些结构进行非线性分析。可是，至今还没有一种强度理论能很好地符合混凝土强度试验的结果。一般认为，库仑-摩尔理论和 Griffith 强度理论对混凝土破坏的预测比较接近试验结果。

库伦理论认为，材料破坏时其剪应力  $\tau$  和正应力  $\sigma$  有如下关系：

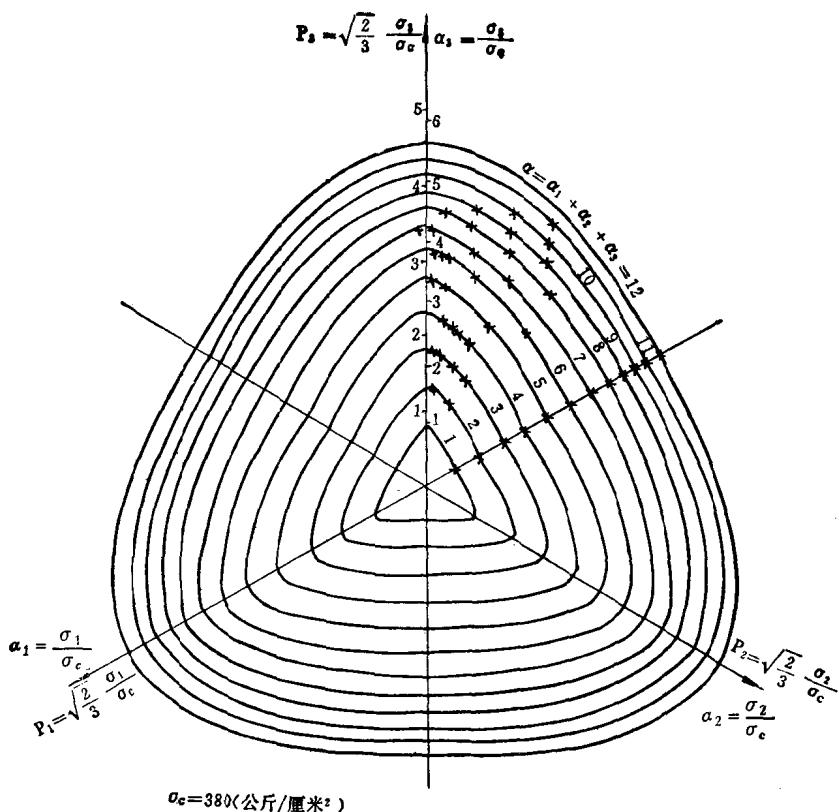


图 2 真三轴压力机上获得的混凝土破坏曲线 ( $\sigma_c$ =单轴抗压强度)

$$|\tau| = \tau_0 + \mu_0 \sigma \quad (8)$$

式中  $\tau_0$  为抗剪断强度,  $\mu_0$  为内摩擦系数。由此可以求得滑动方向:

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \mu_0 \quad (9)$$

式中  $\beta$  为  $\sigma$  和滑动面的夹角。以后摩尔又提出了一个假设, 其破坏条件为:

$$|\tau| = F(\sigma) \quad (10)$$

其中的函数型式由实验确定。因为确定最大剪应力时，只需要第一主应力和第三主应力，所以按照库仑-摩尔理论中间主应力不应影响强度。

事实上，单轴受压时混凝土的破裂面并不是一个与加力方向成 $\beta$ 角的平面，而是许多个与加力方向平行的面(劈裂型破坏)。一些试验表明，中间主应力对强度也稍有影响。按照库仑理论绘出的、对应不同内摩擦角 $\varphi$ 的破坏曲线见图3。比较图2和图3可知， $\varphi$ 较大时的破坏线与体积应力较小时的实测破坏线较符合。

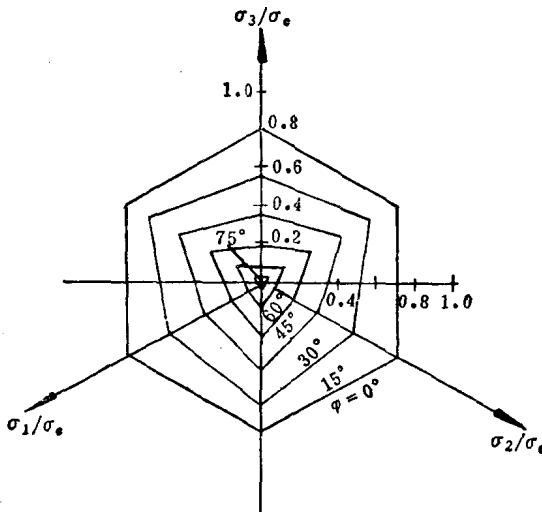


图3 用库仑理论作出的破坏曲线

Griffith研究了受 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 作用、含有一椭圆形裂缝的无限域平板，利用Inglis的解答求出了沿孔周边的最大切向应力。假定该应力达到理论强度值时就开始断裂，求得了为大家所熟知的Griffith强度准则：

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_3; \\ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2) = 0; \\ \text{当 } 3\sigma_2 + \sigma_1 \leq 0, \quad 3\sigma_1 + \sigma_2 \leq 0 \\ \text{当 } 3\sigma_2 + \sigma_1 \geq 0, \quad 3\sigma_1 + \sigma_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

该准则只适用于垂直裂缝的正应力为拉应力的情况。假定裂缝一旦闭合就能传递剪应力和正应力，可导出所谓修正Griffith准则；计入裂缝形状的影响，并根据垂直裂缝方向的正应力是拉还是压的条件，可以导得更完善的准则。如把 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 视为第一和第三主应力，上述准则也近似地适用于三轴受力状态。

顺便指出，一般认为式(7)至少应在由 $\sigma_1$ 轴和 $\sigma_2 = \sigma_3$ 构成的子午面、等体积应力平面和双轴应力平面上的破坏曲线与试验结果吻合。近年来人们采用一些比较复杂的公式来描述混凝土的强度破坏曲面；某些公式给出的上述三个平面上的破坏线与试验结果甚为吻合。

于晓中 居襄

# 破 裂 理 论

[英] A.A.Griffith

过去,数学弹性理论已经提出了建立固体破裂理论的要求,其主要目的在于应用该理论来估计固体的力学强度。这些理论都建立在经验假设上,例如假定超过规定的拉伸强度就产生破裂<sup>[1]</sup>。

膜拟法和光弹性法的发展使弹性理论可以应用到那些过去不可能研究的形状复杂的固体;这些发展主要在于借助某一个现有破裂理论计算固体力学强度的实用目的。然而,当试图用实验验证计算的强度时,很快就发现,不可能用任何合理调整经典破裂假设来消除严重的不一致。

由于这些矛盾,几乎使得计算应力的新方法变得没有价值,因而要发展一种新的破裂理论,其要点将说明如下。

新理论的基本概念是这样的:如流体一样,固体的边界表面也具有表面张力,它意味着存在相应大小的势能。如果由于应力作用而形成一条裂缝,或使原有裂缝扩展,则必定会增加正比于新表面积的能量。增加的能量有可能在系统的总能量没有任何增长的条件下发生。这就是说,由于裂缝表面张力而增加的势能,必须被应变能和作用力势能的降低所平衡。

借助这个基本概念,我们就可以根据热学数据,估计破坏任何固体所必须的应变能的近似值。

在临界温度和压力下,任何物质的表面张力为零。由此立刻可知,这种条件下拉伸强度是零。所以,较低温度时在均匀拉应力下破裂所必须的应变能,必定等于克服内聚力把物质上升到临界温度和压力所做的功。如果我们选择一种不会产生化学分解的物质,功的数值就差不多等于达到临界温度所必须的总热量。这

一热量与处于中间温度状态时汽化的总热量是同一量级的。因而可以说，破裂应变能与汽化总热量是一个量级的。按照处理该问题的方法，我们进一步注意到，破裂应力是可以与固体的内压力相比较的。

这后一关系，立即揭示普通金属的理论破裂应力与常规拉伸试验的观测强度之间的巨大差别。Traube<sup>[2]</sup>指出，金属的内压力从镍的3340公斤/毫米<sup>2</sup>、铁的3330公斤/毫米<sup>2</sup>到铅的530公斤/毫米<sup>2</sup>不等。在拉伸试验中，从来没有得到过类似这样的数值。即使我们排除可延性金属（因其塑性流动——其性质尚未十分明了，可以导致不同于这里考虑的简单拉伸型式的破裂型式），我们仍可发现，在非延性金属中存在着很大的强度缺陷。例如，含碳0.9%的硬钢抗断强度只有118公斤/毫米<sup>2</sup>，而已知的最强的合金钢的抗断强度不超过310公斤/毫米<sup>2</sup>。

即使取最有利的情况，观测到的破裂应力仍低于理论值的10%，而破裂能量低于理论值的1%。根据能量守恒原理，形成一条裂缝所做的功，实际上不可能低于根据热学数据求得的计算值，因为全部功必定会转化为裂缝表面能。在拉伸试验中，平均应变能比理论能量小，因此在破裂时刻，试件的能量必然是不均匀分布的，也就是说，在裂缝的起始点，必有剧烈的能量集中。

似乎只有三种情况下才能出现所说的能量集中，它们是：

(1) 如果材料是不均质的，在不同成分之间可能存在可观的共同表面张力。

(2) 材料可能存在严重的初应力。

(3) 材料可能存在一些在制造期间或在以后加工过程中形成的小裂缝。

目前，关于固体共同表面张力还知道得极少，所以，不可能对第一个假设作更进一步的讨论。然而液态空气温度下铁晶粒间的断裂，意味着这种削弱形式有实际发生的可能性。对所假设的初始应力的分布和特性没有足够了解，就很难对第二点进行研

究。所以我们比较详细地来研究强度缺陷第三种可能的原因。

为此目的，必须找出固体应力和应变能由于出现裂缝而发生的变化。鉴于弹性理论当前的水平，只能限于研究严格服从虎克定律材料的二维问题。利用这样获得的结果对三维问题作一般推论是合理的。可以指出，鉴于当前的发展，很快就可能把这种严格的理论推广到某些三维问题。

我们当前的目的，是求解具有一条表面是椭圆柱面的小裂缝的平板的应力这样一个基本二维弹性问题。椭圆柱的轴垂直于平板，椭圆的一个轴与另一个相比很小。平板受到平行于板面，作用于板外边界的力的作用。该问题的一般解在1913年由Inglis<sup>[3]</sup>得到，其方法是求解由保角变换

$$x+iy=ccosh(\alpha+i\beta)$$

导出的以椭圆坐标  $\alpha$ ，  $\beta$  表达的弹性理论方程。

首先的应用是，求出有一条给定长度（裂缝的长度就是扁椭圆的主轴的长度，该椭圆构成裂缝的边）裂缝的某种材料平板的理论破裂荷载。要这样做，我们必须列出边界力势能、平板的应变能及裂缝表面能总和的表达式。裂缝扩展，也就是出现破裂的条件，可由裂缝长度微小改变时总能量不变的条件来表达。

这一问题的一个解答已发表于1920年的一篇论文中<sup>[1]</sup>，但那个解答中应变能的计算是错误的，那里所用的应力表达式给出的无穷远处的值，与无穷远处均匀应力的假设不符，虽然差别是无限小的量级，但当沿无限边界积分时，对能量尚有有限的影响。稍微修正一下应力表达式，使对能量的影响消失，上述困难就可以克服；于是，对于外边界作用有平行板面的均布拉力的有缝薄平板，改正过的破裂条件是：

$$R = \sqrt{\frac{2ET}{\pi c}}$$

其中  $R$  是垂直裂缝方向作用的边界力， $2c$  是缝长， $E$  和  $T$  是材料的扬氏模量和表面张力 [推导本公式所用的方法见上述论文 167]

~170页，差别仅仅在于用W的正确值 $\frac{(p+1)\pi c^2 R^2}{8\mu}$ 代替了原文中的 $\frac{(3-p)\pi c^2 R^2}{8\mu}$ ，见169页式(8)。平行于裂缝的边界力S对破裂应力没有影响。图1是裂缝和应力系统示意图。

缝端的最大应力F是：

$$F = 2R \sqrt{\frac{c}{\rho}}$$

其中 $\rho$ 是缝端的曲率半径， $\rho$ 与c相比很小。这一公式是从Inglis的对于半轴为a及b的椭圆孔表达式

$$F = R \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

导出的。如果 $\rho$ 是常数，材料的实际破裂应力就是常数。

用同样的方法可以求解另一种情况，即平面应变下的有缝板，这种情况下垂直板的应变被阻止。此时破裂所必需的边界力是：

$$R_1 = \sqrt{\frac{2E(1-\sigma^2)T}{\pi c}}$$

其中 $\sigma$ 是波桑比。

如果我们现在计算材料在破裂点的应变能，根据上述情况，我们发现：

$$\frac{F^2}{2E} = \frac{F_1^2}{2E(1-\sigma^2)} = \frac{4T}{\pi\rho}$$

亦即各种情况下破裂所要求的能量是同一数量。这是符合一般理论的。

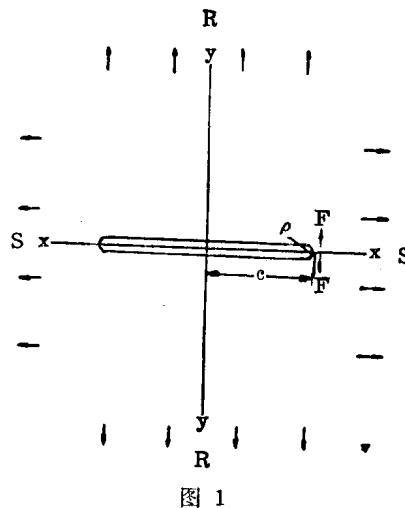


图 1

上面公式的实验证将要在以后讨论。首先，让我们考虑由裂缝削弱的固体的一般形式的理论破裂准则，该固体包含许多随机方向的小裂缝。我们仍然限于二维情况，因为必须利用Inglis的有单一小裂缝的平板的应力解答。我们还必须进一步假设裂缝彼此相离很远，起因于任一裂缝的最大应力不会因相邻裂缝的存在而受到显著影响。然而，我们从圣维南等效原理可以推知，这种假设的误差是不可能大的。

我们面前的问题是找出各种边界作用力下，即简单拉伸、简单压缩（压裂）以及在一个方向拉伸，而与该方向垂直的方向则为压缩等情况下固体的破裂准则。因为不知道裂缝尺寸，理论当然不可能给出各种强度的绝对值，但是我们将会看到，它们间的比值是确定的，只要知道其中之一就可求出所有强度值。

根据已经讨论的理论，我们可以推知，一般破裂条件就是裂缝中某条裂缝的边上达到特定拉应力。所以问题不过是找出在哪一条裂缝出现最大应力，以及与作用力有关的应力的大小。

应用Inglis的结果，我们推出了大平板中一小椭圆形裂缝的边上各点应力的表达式，该平板的外边界作用着与裂缝主轴成角 $\theta$ 和 $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 的主作用力Q和P。这些主应力可以分解为平行和垂直 $\theta$ 方向的两个正应力和一个剪应力，由此，完整的应力系统可以由Inglis的适当解答的叠加而求得。应用Inglis的记号，我们找到要求的应力为：

$$R_{\beta\beta} = [(P+Q)\sinh 2\alpha_0 + (P-Q)(e^{2\alpha_0} \cos 2\beta - 1) \\ \times \cos 2\theta + (P-Q)e^{2\alpha_0} \sin 2\beta \sin 2\theta] \\ \div (\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta)$$

其中 $\alpha_0$ 是与裂缝边界相应的椭圆的参数，它接近于零。 $\beta$ 是规定椭圆上各点位置的坐标。 $R_{\beta\beta}$ 的方向平行于裂缝边界。我们感兴趣的仅仅是拉应力，让我们规定拉应力为正，P的代数值大于Q。示意图见图2（图中 $R_{\alpha\alpha}$ 视作 $R_{\beta\beta}$ ）。

用微分法可以找到 $R_{\beta\beta}$ 最大时的 $\theta$ 和 $\beta$ 值。我们发现， $R_{\beta\beta}$ 在