应用力学最新进展

（下　册）

美国机械工程师协会　编

科学出版社

应用力学最新进展

（下册）

美国机械工程师协会 编

龚尧南等译

钱令希等校

科学出版社

1991

内 容 简 介

本书(上、下册)是应用力学一些重要领域(包括最近几年发展起来的崭新领域)的优秀综述评论文集．下册内容涉及弹塑性理论、断裂力学、实验力学、优化设计、稳定性理论、广义有限元等方面．

本书可供力学工作者、力学专业研究生和高年级大学生、有关工程技术人员和应用数学工作者参考．

JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, 12, 1983

——50 th Anniversary Issue

Transactions of the American Society

of Mechanical Engineers

应用力学最新进展

(下 册)

美国机械工程师协会 编

龚尧南 等译

钱令希 等校

责任编辑 晏名文 杨 岭 李斌香

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1991年4月第二次印刷 印张：14 1/2

印数：3 201—3 920 字数：331 000

ISBN 7-03-002102-9/O · 398

定价：11.00 元

出版者的话

最近几十年,力学得到了巨大的发展,不仅其理论基础得到了加强和深化,而且其研究对象和范围也有了很大扩展.由于各种先进技术手段的出现,特别是电子计算机的广泛使用,人们用力学的理论和方法阐明自然过程和解决复杂工程技术问题的能力得到了极大提高,古老的力学再次焕发出青春的活力. 实践证明,力学这个大学科在促进科学进步和四化建设中的作用是举足轻重的.

遗憾的是,迄今为止国内外还很少有反映现代力学最新重要进展的书籍. 1983 年 12 月,美国机械工程师协会(ASME)为了纪念《应用力学杂志》(Journal of Applied Mechanics)创刊五十周年,特邀请几十位知名学者、权威和后起之秀,撰写了 29 篇优秀的综述评论,作为一个特集出版,以反映应用力学许多重要领域(包括最近几年发展起来的崭新领域)的研究现状,存在的问题和今后的方向. 为了及时反映国外的力学动态,我们组织翻译出版了这个特集. 这对于广大力学工作者、力学专业的研究生、高年级大学生以及有关工程技术人员了解学科动态、选择科研方向或课题是很有益处的,对于应用数学工作者也可资借鉴.

当然,本文集也有局限性,特别是一些重要的新兴边缘学科,例如爆炸力学、地球物理流体力学等没有包括进去.

在本文集翻译过程中,得到了我国老一辈著名力学家和许多中青年力学工作者的大力支持,在此谨表谢意.

鉴于原文篇幅较大,我们将文集的题目大体按学科重新作了编排,分上、下两册出版. 上册包括理性力学、非线性力

学、一般力学、振动理论、流体力学、流变学、生物力学等领域的文章；下册主要涉及弹塑性理论、断裂力学、实验力学、优化设计、稳定性理论、广义有限元法等方面。

最后应该指出，由于译校和编辑加工都很匆促，文中不妥之处在所难免，请予指正。

1985 年 9 月

目　　录

广义有限元法的现状和发展方向

O. C. Zienkiewicz*

本文综述了力学中计算方法的现状，并指出了目前研究工作较活跃的若干领域. 强调有限元法的概念已被大大扩充成为包罗万象的近似方法. 研究工作的注意力目前集中在发展有效措施来提高计算精度以及为了达到指定精度的适当方法. 本文着重描述了在改善计算总体效率方面所取得的一些成绩,并指出了一些新的应用领域.

1. 引　　言

《应用力学杂志》50 周年纪念给我们提供了适当的机会来检阅一下计算力学的现状. 我们要特别提到有限元法，它在计算力学的领域中已作出了极重要的贡献. 诸如非线性固体大应变之类问题等. 这在过去几乎是无法处理的,而今天,我们已可以不太费力地求解了. 正是这种情况促进了经典力学的发展,提出了本构模型的一些新的,并在实际应用领域中愈来愈显示出重要的问题.

有限元法是在五十年代中期提出的.当时,计算机已在解决离散结构问题方面初露锋芒. 仅是对弹性连续体提出的一种方便的、可能多少是粗糙的分析方法.当时,许多人认为:差分法、边界积分方程或级数方法等其它近似方法比有限元法

* Department of Civil Engineering, University College of Swansea, Swansea Wales, England.

在数学上更有道理，更有普遍性.

现在虽然有人仍坚持上述观点，但总的形势已经逆转. 我们今天可以令广义有限元法包括所有的近似方法，并合理地讨论各自最佳的应用范围. 对于这样广义的提法，现在已有的数学基础比起过去来说确实是坚实得多了. 作者在几年前写的一篇综述文章[1]中追述了有限元法的一些发展历史. 这方面还有许多文章[2-4]. 为了保持完整性，我们在本文第一节将讨论广义有限元的各种形式，指出它与其它近似方法之间的关系，并讨论把不同形式的优点综合起来利用的途径.

凡近似方法，顾名思义，总有误差. 特别当人们把这些近似方法应用于力学或工程设计时，如何估计误差的大小，以及在给定的误差范围内如何经济地求解，是极为重要的. 对这方面的工作，过去多少是被忽略了，现在则成为研究工作的前沿. 可以预计，这方面不久还将取得许多新的进展. 适当改进的方法将成为一个重要的“今后发展方向”而加以重点介绍.

虽然随着计算机费用的降低，有限元计算在节省机时方面的考虑已变得不十分有意义了，但是对于过去因花费浩大而令人不敢问津的动力学问题和非线性力学问题，现在仍要最大程度地讲求效率，以达到实际的应用. 毫不奇怪，当代很多研究工作是朝着这个方向进行的. 特别是有效时间步长和迭代方法的发展，大大推动了实际应用. 我们将用一节的篇幅来讨论这方面的若干可能性.

在本文这样的综述文章中，不涉及人机对话方面取得的令人瞩目的成就本来是不适当的. 人机对话的目的是减少输入的工作量和更明瞭地提出和检查计算结果，使之不那么令人厌烦. 但是该领域隶属另外的研究课题，与本文内容并不直接相关. 再加上篇幅限制，我们将不作进一步讨论.

广义有限元法在取得了普遍的数学基础之后，其应用领域日益扩大．在计算固体力学的领域中，有限元法的“标准”形式已成为最广泛应用的方法．但是对于弹性力学的线性问题，特别在涉及无限域或奇异性的情况下，边界(积分)解法仍是一个经济的替代方法．

有限元方法的详细应用范围包括从结构力学到金属成形过程，从地质力学到生物工程等．人们在流体力学中寻找这种连续介质型解的历史，比起固体力学来，可以追溯到更早的年代．在这方面，也许由于更早引进的是差分法，因而“标准”差分法现在还在应用中占大部分．目前进行的很多研究工作旨在确定“最佳近似”的方法[5-7]．情况显然表明，有限元法的应用正在扩大．

有限元法在各不同领域的应用情况，现在已成为教科书的材料[8-12]，我们在这里不再进一步列举了．顺便提一下，我们应该注意到，现在进行的大量的研究工作是试图改善在流体力学中极为重要的双曲、传递型问题的近似方法，尽管在这方面已取得了可观的进展．

2. 广义有限元法 (GFE)

所有的力学问题（当然还包括物理学的许多其它领域的问题)均可以用微分方程(通常是偏微分方程)的形式来描写．该微分方程应在一特定区域予以满足．在其边界上还应满足相应的附加条件．因此，我们要求解下列方程：

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{q} = 0 \qquad \text{在区域}\ \Omega\ \text{中} \tag{1a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} = 0 \qquad \text{在边界}\ \Gamma\ \text{上} \tag{1b}$$

其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为适当的算子，$\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{b}$ 为已知的向量值函数，$\mathbf{u}$ 则为未知的(向量)函数．

在广义有限元法中，我们用下列尝试函数展开式来近似表示函数 $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \tag{2}$$

其中 $\mathbf{N}_i$ 为给定的尝试(基本)函数，$\mathbf{a}_i$ 为未知的参数．我们注意到，若 $\mathbf{N}_i$ 与 n (项数)无关，则上式即是级数展开式．对于"标准的"近似方法而言，$\mathbf{N}_i$ 一般与 n 有关．但是要做到与 n 无关也不难，只要采用，例如，分级形式的展开式就可以了[13]．

对于广义有限元法，只要写出下列弱形式(加权余量形式)或变分形式，即可得到近似的代数方程:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_j^T(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{q})d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}_j^T(\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{b})d\Gamma = 0$$

$$j = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

其中 $\mathbf{v}_j$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_j$ 均为适当的加权(或试验)函数．显而易见，对于形状函数 $\mathbf{N}$ 和加权函数 $\mathbf{v}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}$，有很多可能的选择；如果要得到收敛的和精确的近似解，对于上述函数必须加上若干限制条件．在教科书中详细地讨论了这些要求(完整性要求和可积性要求)．

人们相信，近似方法的加权过程是由 Galerkin[14] 首先提出并付诸应用的．在他的著作中，他采用了各种不同的权函数．但是人们常常仅把 $\mathbf{v}_j = \mathbf{N}_j$ 这种情况归功于他．这是广泛应用的一种权函数(有人把该方法称之为 Galerkin 有限元法)．它对于自伴随问题在任何意义上均是最佳的，但对其它问题并非普遍如此．

(3)式的近似可以把原来的方程化为一个代数方程组:

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}) = \mathbf{f} \tag{4a}$$

或者在线性的情况下，变成

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{4b}$$

如果该方程不是奇异的，则就可以用计算机求解了。

"标准的"有限元法 (FE)

这里，人们选取的总是局部的尝试函数。$\mathbf{a}$ 通常（但非总是）代表函数 $\mathbf{u}$ 的局部值。这样做可以得到稀疏地联结的（带状的）方程组(4)式，大大方便于求解。进而，积分具有下列性质：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\quad) d\Omega &= \sum_{e} \int_{\Omega^e} (\quad) d\Omega \\ \int_{\Gamma} (\quad) d\Gamma &= \sum_{e} \int_{\Gamma^e} (\quad) d\Gamma \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\Omega = \sum_{e} \Omega^e, \quad \Gamma = \sum_{e} \Gamma^e$$

这些性质可以保证：作为上述局部化近似基本的"单元"同"离散的结构单元"相似，可以作类似的处理，并以类似的方式装配起来。事实上，这种装配过程是所有有限元程序的特点。

应用 Galerkin 过程求解微分方程，对于自伴随问题，可以保证对称性。在分部积分之后，对于尝试函数可以要求较低的连续度。

在上述近似过程中，常常没有采用近似的解析解（或者旧式的级数解），而实际上后者可以在不增加计算费用的前提下大幅度改善精度。

"标准的"差分近似法 (FD)

该方法总可以归之为一个配点解。(3) 式的加权函数呈 Dirac 的形式。这里，尝试函数的连续性要求可以大大放松（采用"修正"类型的论点），一般说来都采用具有(C^{-1})不连续

度的互相联结式的近似方法．对于下列容易求解的二次方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0 \tag{6}$$

图 1(a, b) 给出“有限元法”和“差分法”的典型的尝试函数．

边界解法 (BS)

对于边界解法，形状函数应在区域内满足相应的微分算子．这样，对于 (1a) 式中的线性算子 **A**（我们仅考虑其齐次形式)，我们选取这样的 **N**:

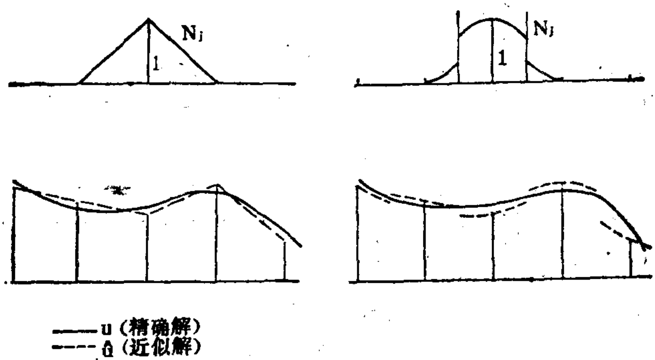

图 1　为了求解简单的一维问题所采用的形状函数和权(试验)函数:
a）标准有限元法；b）标准差分法

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{N}_i)=0 \tag{7}$$

显而易见，近似函数 $\hat{\mathbf{u}}$ 也满足相应的微分方程，从而近似的(3)式化简为边界上的积分:

$$\int_\Gamma \mathbf{v}_j^T(\mathbf{Bu}+\mathbf{b})d\Gamma=0 \tag{8}$$

由于我们仅需考虑边界上的值，从而该问题的维数改变了．这里同样地可以采用种种不同的权函数，从配点法到 Galerkin 方法．但是由于显而易见的原因，方程总是完全联结的，矩阵(即(4)式)是绝不稀疏的．边界解法虽有上述缺点，但它

为了达到某一给定的精度，涉及的参数数量比其它近似方法要少，对于一些线性问题来说，可以得到更为经济的解法。

边界解法首先为 Trefftz[15] 所提出。在本世纪三十年代以来，一直在空气动力学中广泛应用(所谓片条解法)。在最近，积分方程形式的边界解法已为人所喜用[16,17]。应用近似满足边界条件的精确解，在边界解法中是顺理成章的。人们常常利用边界解法这一固有的好处。考虑到这里有各种不同可能的选择，我们认为值得在这里指出，(利用 Green 函数)得到的积分方程有奇异性，常常包含一些很难求积的积分。最近人们试图采用其它的完备的展开式，以避免出现上述问题[18,19]。这方面已经取得了不少成绩。

3. 其他的选择

尽管说标准有限元无疑是最受欢迎的，隶属广义有限元法的诸近似方法，各自都有不同的优点。下面我们扼要地列出各种方法的主要特点：

(标准的)有限元法

1 很容易处理非均质的情况，只要分别处理不同的单元就可以了；

2 很容易处理不规则的区域，很容易改善局部区域的精度；

3 边界条件是自然考虑进去的；

4 很容易在单元的层次上考虑非线性的特性；

5 需要把最后的方程装配起来；

6 方程的近似解是“平均型的”，而不是“逐点型的”；

7 对于迭代计算或动力计算，相容的“质量”矩阵必须归

并到点上去.

(标准的)差分法

1　除非对整个区域作映射，不然的话，采用的网格总是规则的；

2　无需装配方程；

3　方程是“逐点”满足的，对于非线性问题的处理有好处；

4　“质量”矩阵自然地归并到点上；

5　方程组经常是不对称的(除非采用能量形式，但是这样做事实上就导至标准有限元法)．由于这一原因，人们大都采用迭代解法.

(标准的)边界解法

1　方程总是满阵的(前面两种方法得到的是稀疏的方程)；

2　为了达到指定的精度，一般来说，所需变量较少，只需在边界上积分；

3　对于问题所给定的区域内的“非线性”，只能由修正的Newton-Raphson 过程加以处理，并且重新引入区域上的积分；

4　由于引入了精确解，奇异性和无限边界可以“很自然地”得到处理；

5　由边界配点得到的方程一般是不对称的；只有付出相当的代价之后，才有可能使方程变为对称；

6　如欲求得区域内的应力变化情况，还要花费不少工作.

很自然，目前很多研究工作旨在可能情况下通过修改上面的特定解法，以避开它们的局限性，或者更重要的是，把这

些解法的优点集中在一个统一的体系之内.

关于这种修改,我们应该指出几个突出的例子:

1 推广差分法,使之用于完全不规则的网格. 早期 Utku 的工作[20],近期 Orkisz 及其合作者的工作[21,22]都在寻找一组相关的节点,如果需要的话,再找到一系列子区域(图2),使得在采用配点法时,可以得到一组已经装配好的方程. 这些方法在一定程度上把有限元法和差分法联系起来了. 这样做虽然避开了形成网格的麻烦,但是由此而增加的搜索计算所花费的工作量也并不少.

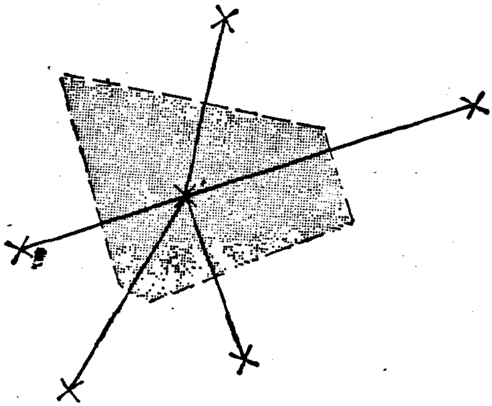

图 2 随机网格有限差分近似

2 在有限元法中引入无限区域的映射,从而可以具有边界解法的优点. 这里,特别要提到的是所谓无限单元[23-25].

3 由 Mote 最早提出的,在标准过程中应用整体近似函数的方法[26],在近来正为愈来愈多的人所乐用.

把几个离散化方法不同的子区域联结起来的过程也是十分重要的. 这方面已经取得了可观的进展. 特别是,把边界解法的区域和标准有限元法的区域联结起来的过程,很简单,很值得推荐[27-30]. 当然,这些联结过程目前根据需要可用于

纯边界解法的计算之中[31]，以避免出现很大的满矩阵．但是从将来的发展来看，可以预期，在标准有限元法的程序库内也会把边界解法作为可供选择的内容包括进去的．

我们已经阐明，当前应用的所有近似方法均可纳入广义有限元法的范畴之内，各种方法均有各自的优点．但是我们仍认为，在可以预见的将来，“标准的”有限元法因其方法具有较大的普遍性，所以它仍优于其它近似方法，并将继续作为计算力学中很独特的工具．不过有三个方向的变化是可以看得出来的．将来的有限元程序很可能把这些方向包括进去，从而可以在一定的计算费用下达到最高精度的目的．这些方向是：

(a) 提供总体型的通解库，用户只要需要，就可以使用；

(b) 增加边界解法的“单元”．这些“单元”既可以纳入一个大的问题中去；也可以单独使用，求解一些特别适用于采用边界解法的简单线性问题；

(c) 放弃“节点变量”的物理解释，采用级数展开式中的分级变量[13]．

上面最后一点也包括应用整体函数的情况．在下节将指出，这样做不仅节约计算时间，而且也可以改善方程的形状，从而减少截取误差．

4. 误差和自适应过程

所有近似方法的共同特点是它们总会引入某种误差．其中一部分是由于计算机的舍入和数值方程求解不精确造成的，但是误差的主要部分应归之于近似系列的截取．在早期，有限元法(或其它数值方法)的使用者，往往做几个试验性的题目，寻找可以得到令人满意结果的网格，以后就满足于使用

类似的网格来求解. 今天,人们的注意力已经转到:

(a) 比较精确地估计所使用网格造成的误差;

(b) 研究出可以最经济地达到所需精度的自动化过程.

目前有相当多的研究工作致力于上述任务. 可以预期,在不久的将来,当上述研究的目的完全达到后,人们会得到可以影响计算力学程序整个领域的一些实际的结果. 在将来,到底选择广义有限元法中什么方法,或在一个特定的解法中选取什么样的单元,这些都将纯粹决定于经济上的考虑.

毫无疑问,广义有限元法的数学研究者对于解决上述问题作出了重大的贡献. Fraeijs de Veubeke 的早期工作[32]试图在求解中包括能量的上下限. 在该工作的基础上,估计单个有限元解的误差方面已经取得了不少进展. 这方面,Babuska 及其合作者关于"事后"估计的工作是十分基本的[33-37],并已经为今后的研究工作奠定了基础[38-40].

最简单的误差估计可以通过考虑下列级数形式的解得到:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \qquad (9)$$

其中函数 $\mathbf{N}_i$ 这样选择: 当参数数目增加时,例如当 n 变为 $n+1$ 时,原来的函数保持不变.

采用上面这样的,对于标准的有限元而言是"分级式的"展开式,我们可以研究当在上述近似表达式中增加新的自由度(即新的项)时,解的相应的变化. 由此可以估计误差:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \qquad (10)$$

例如,考虑用类似图 (1a) 所示的方法按以上分级表述的形式进一步细分,成线性有限元,像我们在图 3 所示的那样. 其中 $a_i(i \leqslant n)$ 是典型的,与粗网格点关联的参数,并且还是未知函数 u 在该节点上的值,但是 $a_i(n < i \leqslant m)$ 是描写粗