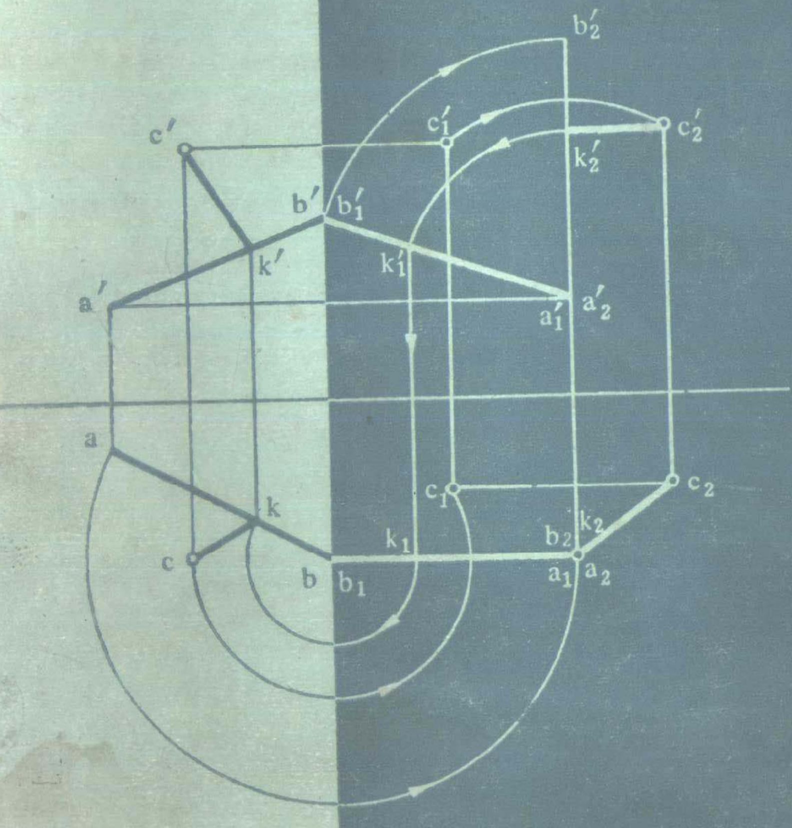
画法几何解题方法

刘允襄
陈道洁 编著



四川人民出版社

画法几何解题方法

刘允襄
陈道洁 编著

四川人民出版社
一九八三年·成都

责任编辑：张达扬
封面设计：文小牛

画法几何解题方法　　刘允襄 陈道洁 编著

四川人民出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　渡口新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 12 插页 2 字数 293 千
1983 年 6 月第一版　　1983 年 6 月第一次印刷
印数：1—9,150 册

书号：13118·70　　定价：1.32 元

序

《画法几何》在高等工科院校里是一门技术基础理论课。它不仅为图示服务，也为图解空间几何问题服务。

在学习《画法几何》的过程中，它不断培养读者的空间想象思维（空间构思成形）能力和空间逻辑推理能力。这些能力的培养，对于一个工程技术人员来说，是不可缺少的。不少国家都单独设科，作为必修课。我国的情况虽有分有合，但要学习一定量的画法几何知识则是肯定的。

画法几何的理论基础，就一般涉及的内容来看（这里暂不考虑内容的更新问题），仅是一些初等几何和立体几何，并不是太难懂的。但初学者往往感到困惑，高等学校中较普遍的反映是：学起来或课堂听起来能懂，就是解题难，尤其对解综合性的题目更感无从下手。这方面的原因较多，但对解题，如何进行空间分析，如何探索解题方案，把所学的理论加以应用等方面，缺乏具体的指导，或指导不多，尤其有关这方面的学习参考书很少，确是一个重要原因。成都科技大学刘允襄同志、陈道洁同志，就为减除读者解题的困难而编写了此书。他们吸取了兄弟院校的经验，再结合自己二三十年来的教学实践，将画法几何的问题分类整理，以求在学习本门学科的同志面前贡献一指之力。

本书综论了画法几何的一般解题方法，在此基础上将问题分类，指出每类问题的思维特点，解题方法，并作了不少示例。这些对学习本门学科的同志来说是会有很大帮助的。书中编有基本作图题集，要求读者首先要熟练地掌握它。

我们还希望读者，在有了一定基础后，对每类中的示例，可以先独立思索一番，提出自己的解答方案，然后再看书中的解答，这样既可以验证自己思维的正确性，也可以加深对学习的理解。有不少问题，可以从多种途径去探索，提出多种解答方案，因为书中对问题的解法，好多都不是唯一的，也不可能将各种方法都一一穷举。

知识的获得，能力的培养，要靠自己的努力。对于画法几何来说，要求作一定的解题训练，不劳而获是不可能的，但在学习过程中获得一定的指引和参考，就会少走弯路，事半功倍。

李沛然

1981年10月于成都科技大学

前　　言

画法几何学是高等工科院校的一门技术基础理论课。通过本课程的学习，不仅要培养学生对于空间几何元素进行图示、图解的能力，而且还应培养和发展一个工程技术人员必须具有的空间思维分析和想象能力。但对于一个初学本课程的人来说，往往面临解题的困难，尤其对于带综合性的题目，不知如何下手，如何进行空间分析，从而找出正确的解题方案及投影作图步骤和方法。针对这一问题，我们在教学实践中，进行了长期的探索和总结，先后主编了《画法几何题解》、《画法几何综合题解》等教学资料，对帮助学生解决学习中存在的上述问题，曾取得了较好的效果。在此基础上，近年来我们又进一步进行了实践和总结，并参阅了兄弟院校及英、日、俄等国的有关资料和习题集，编写了现在这本《画法几何解题方法》。其主要内容和特点为：

1．详细地阐述了在画法几何解题中，进行空间分析的一般规律及基本方法。

2．对画法几何题目按问题的性质和特点进行了归类，并指明了各类题目的空间分析的特点及解题的要点。

3．为了帮助读者深入理解和综合运用画法几何的基本原理，特选编了一定量的综合性较强和少量难度较大的题目，每题都写了空间分析和空间解题步骤。为了活跃思维、扩大思路，多数题目还作了一题多解。

4．本书还编有《画法几何基本作图集》，并附以变化形式的思考题。

5．本书最后将在画法几何解题中常出的错误及其产生的原因进行了简要分析，并列于表中，以供读者借鉴。

本书第一部分画法几何解题方法通论由刘允襄主要编写；第一部分中的《画法几何基本作图集》、第二部分各类典型题、第三部分画法几何解题中常出的错误由陈道洁编写，刘允襄审查修改。本书经李沛然老师审阅，由李光树老师描图。

在编写本书过程中，北京航空学院章日晋老师、浙江大学卓守鹏老师等及成都科技大学机械系及工程画教研室的老师给予了大力支持和帮助，谨此致谢。

编　者

一九八一年十月

内 容 简 介

本书较为系统全面地阐述了画法几何解题的一般规律和方法，论述了各类典型题的空间分析和解题要点，总结了解题中常出的错误及其产生的原因。为了便于读者较好地掌握解题的技能技巧，书中编选了各类基本作图及其变化形式的思考题、典型的综合题与题解，不少题目还作了一题多解。内容丰富，逻辑谨严，由浅入深，紧密结合教学实际，可作为高等工科院校、电视大学、“七·二一”工大及中专学校师生的教学参考书，也可供有关工程技术人员参考

目　录

第一部分　画法几何解题方法通论

画法几何学属于数学领域里几何学范畴的一门技术基础理论学科。它主要是将空间几何问题在平面上用作图的手段来解决，并为图示形体提供一系列的理论依据和方法。它本身具有严密推理的逻辑性。读者通过这门学科的学习，除了掌握图示空间形体和图解空间几何关系的理论基础和方法之外，还需在学习过程中，逐步培养和发展空间思维分析的能力和空间想象的能力。这就需要读者完成一系列由浅入深、由简到繁的练习题目，通过解题的实践来达到上述目的。可是，读者在学习本门课程的过程中，往往感到道理易懂，解题却很困难。特别是对一些空间几何位置关系具有综合性的题目，更是如此。因此，在解题时如何透彻掌握分析空间情况的方法，减低解题困难的程度，以激发读者对本门学科学习的兴趣，使之自觉地而不是被动地培养和发展自己的空间思维分析能力和空间想象能力，这是一个能否学好本门学科至关重要的问题。

一、画法几何解题的一般步骤

画法几何的各类题目，由于问题的不同，解题的思考途径和解决方案也不一样。但是，无论解答哪类问题都需要有这样一个过程：首先按题目所给的条件进行空间情况的分析，从而提出解题的方案，然后才有步骤地进行投影作图，最后再分析题目的解答情况。

1．空间分析

对所给题目的空间情况进行分析，是正确解题的首要关键。所谓空间分析，就是在弄清题意的基础上，分析题目所给的条件，综合分析所求的几何元素（或未知量）与已知几何元素之间的从属关系和相对位置关系，从而探求解题方案。切忌一拿到题目没有分析清楚就忙于进行投影作图。

2．拟订空间解题方案

在对所给题目正确地透彻地进行空间分析之后，自然就会得出解答这个题目的空间解题方案。解题方案并不是指具体的投影作图步骤，而是指解答这个题目的空间解题步骤。事实上，解题方案中的每一个步骤是画法几何的某一个基本作图。由于每一个基本作图又有其作图步骤，因此，在拟订空间解题方案的步骤时，要提纲挈领，分清层次。先拟出大的解题步骤，在各大的步骤之下再拟出小的步骤。也就是说，不要把完成某个基本作图的小步骤与其它的大小步骤相并列，造成枝干不分，主次不明。只有在拟订好空间解题方案中的大小步骤之后，才能为下一步的投影作图在思想上和具体作图上提供有条不紊的条件。

3．投影作图

按照解题方案中所拟订的步骤，一步一步地进行具体的投影作图。由于解题方案中的每一个步骤，通常都可以归结为一个基本作图，因此，要求读者对画法几何中的每一个基本作图都必须熟练地掌握，这是既正确又迅速地得出解答结果的关键（画法几何的基本作图见附录《画法几何基本作图集》）。在进行投影作图时，应当在完成一个步骤之后，再进行下一个步骤的投影作图，以免引起作图上的混乱。当其在进行某个步骤的投影作图时，对于那些与这个步骤无关的几何元素可以暂时撇开不管，以使问题简单明了。

4．解答分析

解答分析一般就是分析题目在所给的具体条件下有多少解答。也可以进一步深入分析当所给条件在什么情况下才有解？什么情况下无解？什么情况下是一解？什么情况下是多解或无穷解？总之，对所解题目的解答情况进行空间分析，有助于空间想象能力和思维分析能力的培养和发展。

例过已知点 A 作一直线 AB 与直线 CD 垂直（交叉）且与平面 $P(P_V$、$P_H)$ 平行（图0－1）。

空间分析：（图0－1，a）

1）过点 A 而与直线 CD 垂直的直线 AB 必然属于过点 A 而与直线 CD 垂直的平面 T。

2）过点 A 而与平面 P 平行的直线 AB 必然属于过点 A 而与平面 P 平行的平面 Q。

3）因此所求直线 AB 为 T、Q 二平面的交线。

空间解题步骤：

1）过点 A 作平面 $T \perp CD$。

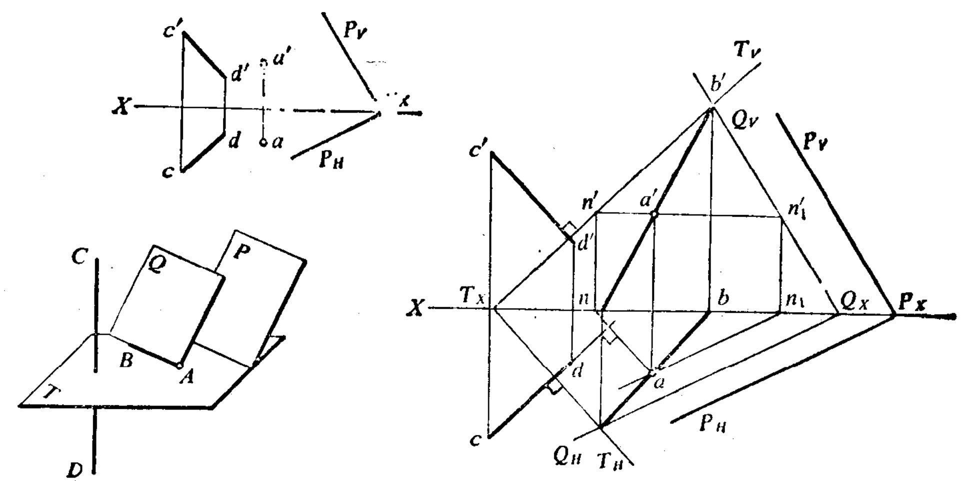
2）过点 A 作平面 $Q \parallel P$。

3）求 T、Q 二平面的交线 AB。

投影作图：（略）

解答情况分析：

过点 A 只能作出一个平面 T 与直线 CD 垂直，过点 A 也只能作出一个平面 Q 与平面 P 平行，而 T 与 Q 的交线又是唯一的。因此，本题只有唯一的解答（图 0—1，b）。当所给平面 P 与已知直线 CD 相互垂直时，则平面 T 与 Q 重合为一个平面，就可以作出无穷解。



(a)　　(b)

图 0—1

二、空 间 分 析 方 法

对所给题目的空间情况进行透彻的分析，既是正确解题的首要关键，那吗究竟如何透彻地进行空间分析，也就成为需要探讨的一个重要问题了。

对于某个题目的空间分析，各人的思考途径并不一定完全相同。但是，归纳起来一般采用下述方法。

1．相对位置关系分析法

假设题目所要求的几何元素已经作出，将它加入到题目所给定的几何元素之中，按照题目所要求的各个条件，逐一分析它们之间的相对位置关系和从属关系，研究和探求几何元素的确定条件，从而综合得出解题方案，拟订出空间的解题步骤。

例如，要求过定点 E 作一直线 EF 与已知交叉二直线 AB 和 CD 均相交。对于这样一个问题，可作如下的空间分析（图0—2）：

1）假定所求直线 EF 已经作出。

2）直线 EF 与已知直线 AB 相交于点 M，则 EF 必然位于由点 E 和直线 AB 所确定的平面 P 内。

3）直线 EF 与另一已知直线 CD 相交于点 N，则 EF 又必然位于由点 E 和直线 CD 所确定的平面 Q 内。

4）因此所求直线 EF 为平面 $P(E, AB)$ 和平面 $Q(E, CD)$ 的交线。

在对某个题目进行空间分析时，应分析出确定所求几何元素条件的实质，而不要被那些特定的可以简化解题的有利情况所掩盖。如上例所求直线 EF 为 $P(E, AB)$、$Q(E, CD)$ 二平面的交线，这就是确定所求直线 EF 问题的实质。至于如何求得 P、Q 二平面交线，那只是一个方法问题。定点 E 为二平面的一个公有点，只需再求得另一个公有点就可以作出二平面的交线。显然，直线 AB 与平面 Q 的交点 M，或直线 CD 与平面 P 的交点 N，都可以是二平面交线上的另一个公有点。但是，我们不要把所求直线单纯地分析为直线 AB 与平面 Q 的交点 M 和定点 E 的连线，或直线 CD 与平面 P 的交点 N 和定点 E 的连线。当然，这并不是排除利用直线 AB 与平面 Q 的交点 M 或直线 CD 与平面 P 的交点 N 来确定 P、Q 二平面的交线，但这也只因为点 M 或 N 是 P、Q 二平面的另一个公有点的缘故。只要我们抓住了所求直线 EF 是 P、Q 二平面的交线这一实质问题之后，即使当上述点 M 或点 N 都不可能在图纸范围内求得时，我们总是可以设法求得 P、Q 二平面的另一个公有点来确定 P、Q 二平面的交线。

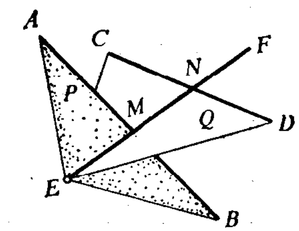


图 0—2

2．轨迹分析法

轨迹分析法就是根据题目所给出的若干条件，逐条地运用空间几何轨迹的概念，分析所求几何元素在该条件下的空间几何轨迹，然后综合这些单个条件下的几何轨迹，从而得出解题的方案和步骤。

运用轨迹分析法，对上例所求过定点 E 而与已知交叉二直线 AB 和 CD 均相交的直线 EF，可作如下的分析：

1）凡过点 E 而与直线 AB 相交的直线，其空间轨迹为一个平面 P，该平面 P 为定点 E 和已知直线 AB 所确定。

2）凡过点 E 而与直线 CD 相交的直线，其空间轨迹为一个平面 Q，该平面 Q 为定点 E 和已知直线 CD 所确定。

3）要同时满足上述两条几何轨迹的要求，可知所求直线 EF 为 P、Q 二平面的交线。

为了便于运用轨迹分析法对题目进行空间分析，现将初等几何中有关空间几何轨迹列述于下：

1）与一定点成定距离之点的轨迹是一个以该定点为球心，定距离之长为半径的圆球面。

2）与两定点成等距离之点的轨迹是连接该两定点直线的一个中垂面。

3）与不属于同一直线的三定点成等距离之点的轨迹，是两个任意两定点连线的中垂面的交线。或是通过三定点的外接圆中心而与该三定点所在平面垂直的直线。

4）与一条定直线成定距离之点的轨迹是一个以该定直线为轴线、定距离之长为半径的一个圆柱面。

5）与二平行直线成等距离之点的轨迹是一个二平行线间公垂线的中垂面。

6）与二相交直线成等距离之点的轨迹是两个平面，这两个平面分别通过二相交直线所夹角的分角线而与二相交直线所在平面垂直。

7）与一定平面成定距离之点的轨迹是平行于该平面、距离为定长的两个平面。

8）与两个平行平面成等距离之点的轨迹，为该二已知平行平面的公垂线的中垂面。或过二平行平面的公垂线中点而与已知平面平行的一个平面。

9）与两个相交平面成等距离之点的轨迹为该二相交平面夹角的等分角面(两个)。

10）过一定点而与一已知直线垂直的直线，其轨迹是一个过该定点而与该已知直线垂直的平面。

11）过一定点而与一已知平面平行的直线，其轨迹为一个过该定点而与该已知平面平行的平面。

12）过已知直线上一个定点而与该直线成定夹角的直线，其轨迹是一个圆锥面，该圆锥面的轴线为已知直线，锥顶为已知直线上的定点，母线与已知直线成定夹角。

13）过已知点与已知平面(包括投影面)成定倾角的直线，其轨迹是一个圆锥面，该圆锥面的轴线为过该已知点而与该已知平面垂直的直线，锥顶为该已知点，母线与已知平面成定倾角。

14）过已知直线上一个定点而与该直线成定夹角的平面，其轨迹为一个圆锥面的所有切平面。该圆锥面的轴线为已知直线，锥顶为已知直线上的定点，母线与已知直线成定夹角。

15）过已知点与已知平面（包括投影面）成定倾角的平面，其轨迹为一个圆锥面的所有切平面，该圆锥面的轴线为过该已知点而与已知平面垂直的直线，锥顶为该已知点，母线与已知平面成定倾角。

16）与相交二平面（包括投影面）成等倾角的直线，其轨迹为与二相交平面成等倾角的所有平面，特殊情况是二相交平面所成夹角的等分角平面。

三、画法几何常用的解题方法

画法几何的解题方法可以分为两类：

一类是在原投影体系中求解，不牵涉到投影变换的问题，也就是所谓的直线平面法。使用直线平面法求解，大都是依靠点、线、面之间相对位置和从属关系的基本作图来进行投影作图。如涉及到线段的实长及其与投影面的倾角问题时，采用直角三角形法求解而勿需进行投影变换。

另一类是投影变换法。投影变换的途径有二：一条途径是考虑如何改变空间几何元素与投影面之间的相对位置，使之有利于解题。即变换几何元素的投影，利用特殊位置线、面的投影特性以使解题简化。改变空间几何元素与投影面之间的相对位置，常采用的方法有以下数种：

1）辅助投影面法　保持空间几何元素的位置不动，选用一个新的投影面代替原来的某个投影面，使空间几何元素在新的直角二面体系中与新投影面处于利于解题的位置。

2）绕垂直轴旋转法　保持原有的投影体系不变，将空间几何元素绕着一条选定的垂直于某投影面的直线为轴旋转，使之对投影面处于利于解题的位置。

3）绕平行轴旋转法　如果所要解决的问题属于同一平面内的问题，可以选用属于该平面内的一条某投影面平行线为轴旋转，将平面旋转至与该投影面平行，从而使解题简化。

4）重合法　如果所要解决的问题属于同一平面的问题，也可以选用该平面的某条迹线为轴旋转，将平面旋转至与该迹线所在的投影面重合进行解题。

第二条途径是考虑如何改变投影的方向，使空间几何元素沿新的投影方向在某个平面上的新投影具有某些有利于解题的性质，如积聚性等。其方法有二：

1）斜投影法　将空间几何元素沿选定的新的投影方向向*H*面或*V*面进行投影以达到简化解题的目的。

2）综合变换法　为了便于解题，投影方向和投影平面均可按需要而选取，一般都采用在新选定的投影平面上作正投影。然后再将此新投影面用重合法使之重合于 *H* 面或 *V* 面，从而求得空间几何元素在新投影面上的投影重合于 *H* 面或 *V* 面上的位置以达到解题的目的。

综上所述，画法几何解题的方法虽有多种，但并不是说每一个题目都可以用以上各种方法求解。其中，直线平面法是最基本的方

法，大多数题目的求解都可以采用。只是在某些情况下解题过程较复杂，空间分析较难而已。因而解题时它往往为投影变换的方法所代替。但必须强调指出，直线平面法涉及画法几何学整个基础内容，掌握直线平面法不仅掌握了空间几何元素之间相对位置关系和从属关系的图示法和基本作图。同时，对培养和发展空间思维分析和逻辑推理能力将起着积极有效的作用。至于投影变换的各种方法，由于改变了空间几何元素对投影面的相对位置，抑或改变了投影方向，因此，在多数情况下可以使解题简化。作为一种解题的手段来说，将投影进行变换，也是必不可少的一种方法。其中尤以辅助投影面法应用较广，也易于掌握。而绕垂直轴旋转法，如果连续两次以上的旋转，作图比较繁琐和不清晰，就不大为人们所乐用。绕平行轴旋转法、重合法、综合变换法、斜投影法等，在某些情况下各有其优点，解题较其它方法简化。

现将上列各种方法的使用范围及着重点分述于下：

1．直线平面法

画法几何中绝大多数的定位问题和度量问题都可以用直线平面法求解。这种方法的着重点在于：

1）对几何元素在空间位置的相互关系、从属情况等进行透彻分析，据此提出空间解题的可行步骤，以避免盲目地进行投影作图。

2）凡属基本作图的方法，要熟练掌握。

3）灵活运用直角三角形法。

着重点中的1)和2)在前面已有详细论述，这里不再重复。关于直线平面法中常常使用到直角三角形法，它不仅用来解决线段的实长及其对投影面的倾角等问题，也可以用来解决一些比较复杂的定位问题。

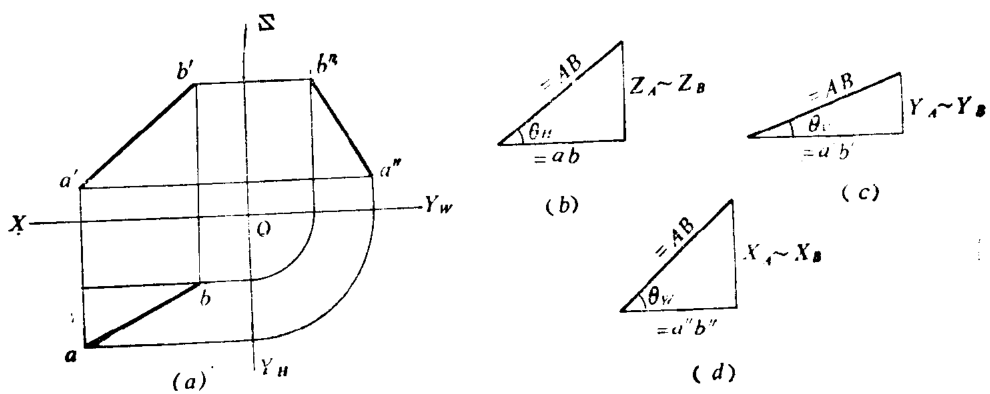


图 0—3

对于直角三角形法，首先必须彻底弄清线段实长、线段的各面投影、线段对各投影面的倾角等组成直角三角形的关系，才能进一步谈它的运用。

如图0—3(*a*)所示为线段*AB*的三面投影图，令*AB*分别对三个投影面所成倾角为θ_H、θ_V和θ_W，则有：

1）包含θ_H的直角三角形：斜边为线段*AB*的实长，与斜边成夹角θ_H的一边为线段*AB*水平投影的长度，另一直角边为线段两端的*Z*坐标差(图0—3,*b*)。

2）包含θ_V的直角三角形：斜边仍为线段*AB*的实长，与斜边成夹角θ_V的一边为线段*AB*正面投影的长度，另一直角边为线段两端的*Y*坐标差(图0—3,*c*)。

3）包含 θ_W 的直角三角形：斜边仍为线段 AB 的实长，与斜边成夹角 θ_W 的一边为线段 AB 侧面投影的长度，另一直角边为线段两端 X 坐标差（图 0—3，d）。

由上所述，可作如下归纳：

包含线段与某投影面倾角的直角三角形，斜边为线段的实长，与斜边夹成倾角的一边为线段在该投影面上的投影长度，倾角的对边为线段两端的与该投影面垂直的那个坐标差。应着重指出的是：线段实长与表示线段在某投影面上的投影长度之间的夹角才是线段对该投影面的倾角。

不难看出，直角三角形法中所作的直角三角形，包含四个要素：①线段的实长；②线段对某投影面的倾角；③线段在该投影面上的投影长度；④线段两端的与该投影面垂直的那个坐标差。在这四个要素中，只要已知其中的任意两个要素，直角三角形便完全确定，即是说就可以求得其余两个要素。因此，凡是涉及线段投影长度、线段两端的某个坐标差、线段的实长和倾角等有关问题，大都可以运用直角三角形法来求解。

例1．已知线段 AB 的正面投影 $a'b'$ 及其对 H 面的倾角 θ_H 为 30°，并知线段 AB 上一点 K 的投影 k'、k，求作线段 AB 的水平投影 ab（图 0—4）。

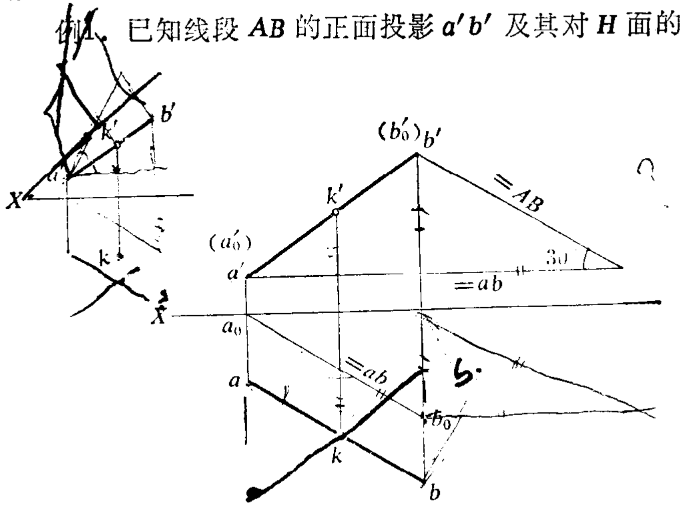


图 0—4

空间分析：由于线段 AB 的正面投影 $a'b'$ 已给出，则可求得 AB 两端的 Z 坐标差，因而可作出包含倾角 $\theta_H=30°$ 的直角三角形，从而也就可以求得线段 AB 水平投影的长度，再由点 K 的水平投影 k 可定出 AB 水平投影的位置。

解题步骤：

1）根据 $\theta_H=30°$及 AB 两端的 Z 坐标差作出包含线段 AB 水平倾角的直角三角形，从而求得线段 AB 水平投影的长度。

2）过空间任一点作一条与 H 面成 30° 倾角的直线 A_0B_0，使其正面投影与 $a'b'$ 重合，其水平投影 a_0b_0＝线段 AB 水平投影的长度。

3）过点K作线段 $AB \parallel A_0B_0$。

投影作图：（略）

解答分析：本题有二解。

例2．已知△ABC 的∠A＝60°，AB＝20 毫米，BC＝30 毫米，并知顶点 A 的水平投影 a 及 BC 边的正面投影 $b'c'$。完成△ABC 的三面投影(图0—5)。

空间分析：

1）根据题目所给的条件可作出△ABC 的实形，则各边的实长均为已知量（图 0—5，a）。

2）根据 $b'c'$ 为已知，则 BC 两端点的 Z 坐标差可以求得，从而也可求得 BC 水平投影的长度（图 0—5，b）。

3）再根据点 A 的水平投影 a 已给出，则各顶点相互之间的 X 坐标差可以求得，从而也可求得 AB 及 AC 侧面投影的长度（图0—5，c、d）。

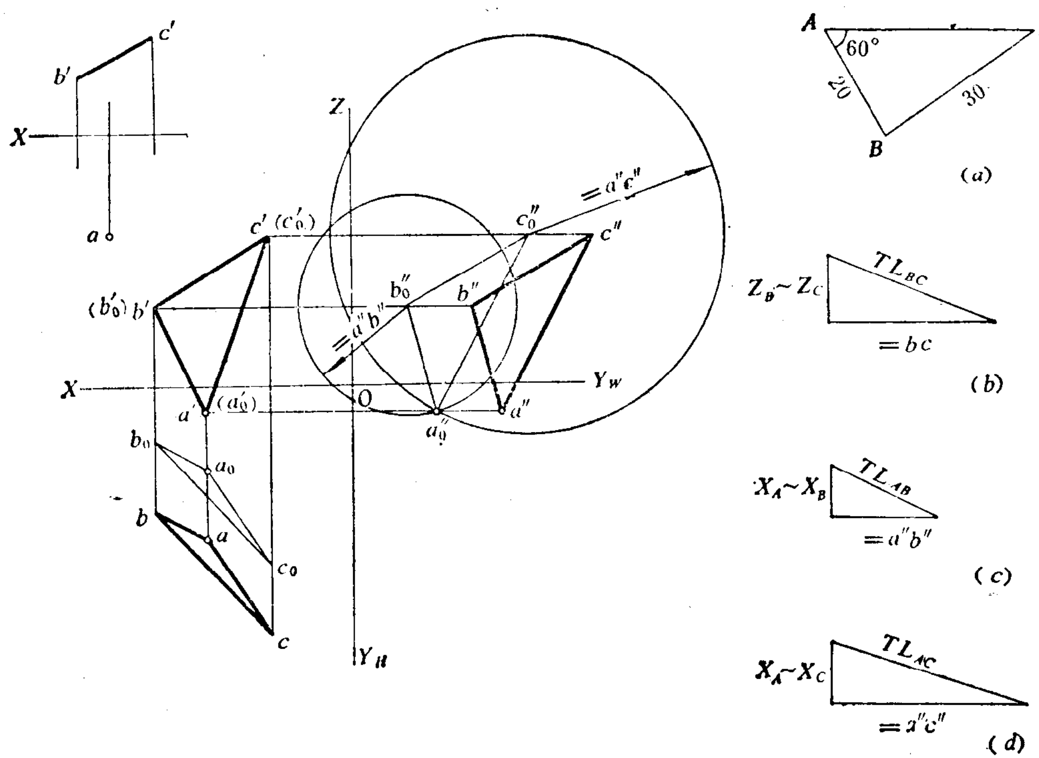


图 0—5

4）根据上面的已知量，仿照上例所采用的手段，在空间可任作一个与所求△ABC 平行的△$A_0B_0C_0$，使 B_0C_0 与 BC 二者的正面投影重合。

5）过点 A 作出△ABC ∥ △$A_0B_0C_0$。

解题步骤：

1）按题意求得△ABC 的实形。

2）根据 $BC=30$ 及 B、C 两端的 Z 坐标差求得 BC 边水平投影的长度。

3）在空间任取一点 B_0，使 b'_0 与 b' 重合，作 B_0C_0 边，使 $b'_0c'_0$ 与 $b'c'$ 重合，且 $b_0c_0=BC$ 的水平投影的长度，从而求得 $b'c'_0$。

4）用直角三角形法求得 $a''b''$ 及 $a''c''$ 的长度，从而定出 a''_0，再定出 a'_0 及 a_0。

5）过点 A 作△ABC ∥ △$A_0B_0C_0$。

投影作图：（略）

解答分析：本题有两组四解。

2．辅助投影面法

辅助投影面法不仅可用来解决有关距离、角度等度量问题，也可用来解决有关空间几何元素间相对位置及从属关系的定位问题。由于使用辅助投影面法作图较简，图面清晰，且在进行空间分析时着重考虑将空间几何元素对投影面的相对位置改变成什么样的情况时就可以使解题简化，这点比较容易掌握，因而常为人们解题时所采用。

使用辅助投影面法必须掌握的要点：

1）首先必须熟练掌握点的辅助投影的作图及其所根据的基本原理。由于从一个旧的直角二面体系变换到一个新的直角二面体系，