高等学校文科教材

$$\mu_x = \sqrt{\frac{S^2}{n}(1-P)/n}$$

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x}-\bar{X})^2 f}{\sum f}}$$

$$\frac{\sum \bar{x} f}{\sum f} = E(\bar{x}) = \bar{X}$$

$$\mu_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{\quad}(1-n)}$$

$$\mu = \frac{S}{n}$$

$$\bar{\sigma}^2 = -$$

简明数理统计学

华伯泉 编著

$$\delta^2 = \frac{\sum(\bar{x}_i-\bar{X})^2 N_i}{N}$$

简明数理统计学

华伯泉 编著

●

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道130号）

滦县印刷厂印刷 新华书店发行所发行

●

850×1168毫米 32开本 11.25印张 246千字

1988年6月第1版 1988年6月第1次印刷

印数：1—3,100

ISBN7—201—00018—7/F·1

定价：2.10元

说　明

本书是根据商业部部属高等财经院校1983年制订的《数理统计数学大纲》编写的，现经国家统计局审定，作为全国高等学校文科教材。

本书主要介绍与社会经济现象密切有关的概率论与数理统计的最基本的理论和最常用的方法。叙述上力求由浅入深，通俗易懂，并特别重视在经济方面的应用；使读者通过学习，能够掌握数理统计的基本理论和主要方法，从而在研究经济问题和从事财经工作时，能够对社会经济现象中的数量关系和发展变化进行初步的科学分析，以提高分析问题和解决问题的能力。

本书内容适用于计划或统计专业120学时、非计划统计 专业72学时，部分打有“*”号的章节，非计统专业可以删略。

本书承徐锺济、魏宗舒、莫曰达、桂世祚、贾宏宇、钱尚玮诸教授审阅，安徽财贸学院郭显光、张勇、赵卫亚诸同志提出不少宝贵意见，谨在此一并致谢。

限于编者水平，书中缺点错漏之处一定不少，敬希读者批评指正。

编　者

1987.2.

目　　录

第一章　概率的基本概念

一、概率论的研究对象

一切自然现象和社会现象可以归纳为下面三种事件：

1、**必然事件**　在确定的条件下，必然出现的事件叫做必然事件。例如：水在760毫米大气压力下，加热到100℃就沸腾；向上抛掷一颗石子，必然落下；任何有生命的生物，必然有朝一日会死亡；掷一颗骰子，必然出现1—6中的任一个点子等等。

2、**不可能事件**　在确定的条件下，不可能出现的事件叫做不可能事件。例如：水在100℃时，不可能结冰；向上抛掷一颗石子，不可能飞出地球；目前小麦的产量不可能亩产一万斤；掷一颗骰子，不可能出现7点等等。

3、**随机事件**　在确定的条件下，可能出现或不出现的事件叫做随机事件。例如：用大炮轰击某一目标，可能击中，也可能不中；大批量生产某种产品，可能出现废品，也可能不出现废品；小麦的产量，可能平均亩产600斤，也可能不是600斤；掷一颗骰子，可能出现1点，也可能不出现1点等等。

概率是随机事件出现或不出现的客观可能性的度量。就每次试验或观察的结果来说，随机事件出现或不出现具有不确定性；但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性。例如：多次重复抛掷一枚硬币，得正面朝上的次数大致有一半；同一门大炮轰击某一目标的弹着点呈现一定的规律分布；大量生产某种产品，其废品率也呈现一定的规律等等。根据试验结果，随

机事件可能出现不同的数值，这说明随机事件的取值是一种变量。由于试验是随机的，所以这种变量称为**随机变量**。**概率论就是研究随机变量概率分布的科学**。数理统计则是以概率论为基础，对随机事件试验或观察得到的统计资料进行分析研究，发现和认识随机事件的客观规律性，从而为国民经济各部门和科学技术领域服务的科学。例如气象预报、商情预测、农产量调查、产品抽样检验，研制新产品最佳生产方案的选择，以及物理学、生物学 保险学、军事学和其他科学技术都广泛地应用着数理统计方法。

二、概率的定义

（一）概率的古典定义

投掷一颗匀质的骰子，得1点、2点、……6点都有同等的可能性。由于这种等可能性，我们能在未掷骰子前，就可算出掷得任一个点数的概率为$\frac{1}{6}$。所以在每次试验中，事件有同等出现的可能性的条件下，我们在试验之前就可以计算出来的概率，叫做**先验概率**。这就是概率的古典定义。亦即事件A的概率等于事件A可能出现数m与所有可能结果的总数n之比。记作

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

例如：1、掷一枚硬币，得正面朝上的概率为$P(A)=\frac{1}{2}$

2、掷两颗骰子，得12点的概率为$P(A)=\frac{1}{36}$

3、在一袋中有同质的乒乓球50个，其中有5个是红色，则从袋中任取一球，得红球的概率为$P(A)=\frac{1}{10}$

概率可以取由0到1的任何值，即

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad (1.2)$$

必然事件的概率是1，不可能事件的概率是0，显然概率不能为负值。

（二）概率的统计定义

在研究许多自然现象和社会现象时，常常不可能按古典定义在试验之前算得事件出现的概率。例如：废品出现的概率、某人射击的命中率、某地区年降雨量超过1000毫米的概率、出生女婴的概率等等都不能计算其先验概率。要计算这些现象的概率，就必须经过试验，因此产生概率的统计定义。

在n次试验中，事件A出现m次，则$\frac{m}{n}$叫做事件A的频率。例如：连续掷一枚硬币5次、50次、500次，各做10遍，将正面朝上出现的次数记录如表1.1：

表1.1 掷币正面次数统计表

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	频率	m	频率	m	频率
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表中可以看出，掷硬币次数较少时，正面朝上出现的频率差异较大；但随着投掷次数的增多，正面朝上出现的频率就比较

稳定，从前法国生物学家蒲丰(D•Buffon)和英国统计学家皮尔逊(K•Pearson)做过掷币试验，所得数据如下：

表1.2　次数统计表

试验者	掷币次数	正面次数	频　率
蒲　丰	4,040	2,048	0,5069
皮尔逊	12,000	6,019	0.5016
皮尔逊	24,000	12,012	0.5005

从表1.1和1.2中可以看出，当试验次数逐渐增多时，正面朝上出现的频率总是在0.5附近摆动。

又如1935年瑞典政府发表的婴儿出生统计资料如下：

表1.3　婴儿出生统计表

时间	总数	男孩	女孩	生女频率
1月	7,280	3,743	3,537	0.486
2月	6,957	3,550	3,407	0.490
3月	7,883	4,017	3,866	0.490
4月	7,884	4,173	3,711	0.471
5月	7,892	4,117	3,775	0.478
6月	7,609	3,944	3,665	0.482
7月	7,585	3,964	3,621	0.477
8月	7,393	3,797	3,596	0.486
9月	7,203	3,712	3,491	0.485
10月	6,903	3,512	3,391	0.491
11月	6,552	3,392	3,160	0.482
12月	7.132	3,761	3,371	0.473
全年	88,273	45,682	42,591	0.4825

如将全年出生女孩的频率作为概率，每月出生女孩的频率与这个概率的离差很小，而且这些频率都围绕着这个常数而摆动。为了看起来清楚起见，可用图形表示如下。

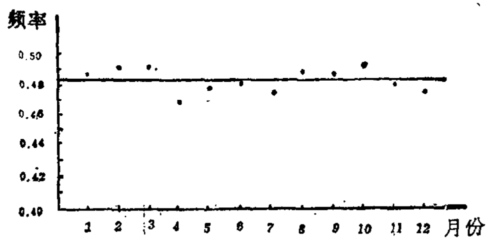

图1.1　　出生女婴频率图

由图可看出，12个点子都围绕着直线$P(A)=0.4825$而摆动。

由此可见，许多自然和社会现象出现的真正概率是很难求得的，但如果试验的次数相当大时，我们可以取事件出现的频率作为其概率的近似值。试验的次数愈多，则计算结果与概率的离差愈小，频率就愈能代表事件出现的概率。

综上所述，概率的统计定义可以表述如下：

在确定的条件下，事件A在大量的n次试验中出现m次，则事件A的频率$\frac{m}{n}$可作为事件A的概率$P(A)$的近似值，试验次数愈多，频率就愈接近于概率。即

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{出现的次数}}{\text{试验总次数}}=\frac{m}{n}$$

与概率的古典定义一样，按统计定义计算所得的概率也在0到1之间，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

在某种情况下，计算所得的事件的概率是表示已经发生的大量操作过程的质量指标。例如：废品率就是废品数占生产总数的百分比，流通费率是各项流通费用总额占销售额的百分比，它们是反映工商企业经营管理的质量指标之一。掌握这样的指标不仅可以使我们能够评定已经发生的大量现象所达到的水平，也能使我们可以预测未来的情况。

三、概率的加法定理

（一）定理的引出

先看例题：某地人民银行举办有奖储蓄，规定1万个号码中，有头奖1个、二奖10个、三奖500个。问任意购买1张有奖储蓄券，中奖的概率是多少？

由于1万个号码中，共有511个号码中奖。所以中奖的概率为

$$\frac{1+10+500}{10000}=0.0511$$

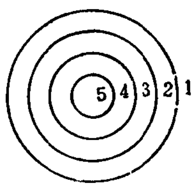

图1，2 射击靶图

又如：在离靶50米处射击，射中域5得优，射中域4得良。设甲射中域5的概率为0.24，射中域4的概率为0.17，问甲射手得优或得良的概率是多少？

由于甲射手射出的每100发子弹中大约有24发击中域5；17发击中域4；亦即每100发子弹中大约有41发命中域5或者命中域4。因此，所求概率为0.41，即0.24+0.17。所以，甲射手射击得优或得良的概率等于得优的概率与得良的概率之和。

由此可以推得，当进行大量试验时，在一系列的n次试验中，若

事件A_1的概率$P(A_1)=\frac{a_1}{n}$

事件A_2的概率$P(A_2)=\frac{a_2}{n}$

事件A_3的概率$P(A_3)=\frac{a_3}{n}$

………………………………

则事件A_1、A_2、A_3……中任一个出现的概率为

$$\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\frac{a_3}{n}+\cdots\cdots=\Sigma\frac{a_i}{n} \qquad (i=1,2,3\cdots\cdots)$$

这里我们所观察的结果中，任何两个事件都是**彼此互相不相容的**；即不能在一次试验中，同时出现A_i和$A_j(i\neq j)$。例如，射手放一枪只能打中一个域，不能同时打中两个域。所以，**许多事件彼此互不相容是应用加法定理的重要前提**。如果不注意这个前提，就会得到不正确的结果。例如，甲、乙两射手击中某个目标的命中率分别为80%和70%，求两人同时向某个目标射击，目标被击中的概率是多少？

若只是简单地把两人的命中率加在一起，便得0.8+0.7=1.5。这结果显然是荒谬的。因为事件的概率不能大于1。然而我们又怎么得到这个不正确的结果的呢？这是因为两个人的命中率并不互相排斥，即两人在同时射击时，完全可能同时打中目标，而我们忽视了这一点，结果错误地应用了加法定理。正确的答案应该是：假定两射手同时射击100次，其中大约有80次为甲射手所击中，20次未中；乙射手在这100次中大约击中70次，即每10枪中平均击中7次，所以可以预期在甲射手没有打中的20枪中，乙射手可能击中14次。因此，目标可能被击中80+14=94次。即两人同时射击时，目标被击中的概率为0.94或94%。

综上所述，可以得出**概率的加法定理**如下。

在某项试验中，若事件A_1、$A_2\cdots,A_k$两两互不相容，则事件A_1或$A_2\cdots$或A_k出现的概率等于这些事件的概率相加之和，记作：

$$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}P(A_i) \qquad (1.3)$$

（符号$\cup$读作“并”或“或”）

（二）事件的完全系

在某项试验中，只可能出现A_1、$A_2\cdots A_N$等N种互不相容的

事件。这N种事件称为事件的完全系。因为完全系中任何两种事件是互相排斥的，所以根据加法定理，事件完全系的概率总和等于1。即

若A_1、A_2…A_N组成事件的完全系，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots\cdots \cup A_N)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_N)=1. \quad (1.4)$$

例如：甲射手向图1.2所示的靶射击，100发子弹中有24发打中域5，17发打中域4，15发打中域3，12发打中域2，32发打中域1。显然，这5种射击结果组成一完全系事件，其概率总和为

$$0.24+0.17+0.15+0.12+0.32=1$$

若在某项试验中，只可能出现两种互不相容的事件，这两种事件称为**对立事件**。如出生的婴儿，非女即男，便是对立事件。对立事件组成事件的完全系。所以，对立事件概率的总和等于1。记作：

$$P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1 \quad (1.5)$$

如根据表1.3，出生女婴的概率与出生男婴的概率之和为

$$0.4825+0.5175=1$$

若在一完全系事件中，将某几种事件作为A，其余几种事件作为$\overline{A}$，则可组成对立事件。如上述打靶一例中，将击中域5和域4作为优良，击中域3、2、1作为不优良；则甲射手射击结果的概率总和为

$$P(A)+P(\overline{A})=0.41+0.59=1$$

若在一完全系事件中，有一事件的概率为未知，其余事件的概率为已知；则未知的概率可从1减去其余事件概率的总和求得。即

$$P(A_1)=1-[P(A_2)+\cdots+P(A_N)]$$

如上述打靶一例中，落在域1的子弹因为不中靶而无法数清，则其概率可从1减去打中其他各域的概率总和算得。即

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-(0.24+0.17+0.15+0.12)=0.32$$

四、条件概率

设市上出售的18吋彩色电视机中，甲厂的产品占70%，乙厂占30%。而甲厂每100台电视机中，平均有93台是一等品，7台是二等品；乙厂只有83台是一等品，17台是一等品。则市上每1000台电视机中，

甲厂产品占700台，其中一等品是$700\times0.93=651$台；

乙厂产品占300台，其中一等品是$300\times0.83=249$台。

在此供应条件下，某人到商店任意购买一台电视机，他买到一等品的概率为$\frac{651+249}{1000}=0.90$。如果某人选购电视机时，一定要买甲厂的产品，则他买到一等品的概率为0.93。

这样买到一等品可有两个不同的概率。前者是在总的供应条件下，不附加任何其他条件的概率，称为**无条件概率**；后者是在总的供应条件下，又附加一个条件(即要买甲厂产品)的概率，称为**条件概率**。

设以A表示买到一等品电视机这一事件，

$\overline{A}$表示买到二等品电视机这一事件；

B表示甲厂品，

$\overline{B}$表示乙厂品。

则事件A的无条件概率为$P(A)=0.90$

事件A的条件概率(要买甲厂产品)为$P(A/B)=0.93$

$P(A/B)$表示在事件B出现的条件下，事件A出现的概率。

同理，$P(\overline{B}/A)=\frac{249}{651+249}=0.28$，这表示在电视机是一等品的条件下，可能买到乙厂产品的概率。

例1、在某市的统计资料中，查得每10万名10岁的儿童中，

活到40岁的平均有83,465名，活到70岁的有46,103名。若某人已是40岁，问他再活到70岁的概率是多少？

解：设以A表示由10岁活到70岁的事件，

B表示由10岁活到40岁的事件，

则 $P(A/B)=\frac{46,103}{83,465}=0.55$

五、概率的乘法定理

事件A与事件B同时出现，这一事件称为事件A与事件B之积，记作：$A\cap B$或AB（符号$\cap$读作"交"或"和"）

如上例每1000台电视机中，有651台是甲厂生产的一等品。所以，事件B与A同时出现的概率为

$$P(BA)=\frac{651}{1000}=0.651$$

这表示在市场上任意购买一台电视机，可能买到甲厂生产的一等品的概率。

而市场上甲厂产品的概率为$P(B)=\frac{700}{1000}=0.70$

在甲厂产品的条件下，可能买到一等品的概率为

$$P(A/B)=\frac{651}{700}=0.93$$

显然，$P(BA)=\frac{651}{1000}=\frac{700}{1000}\times\frac{651}{700}=P(B)\cdot P(A/B)$

上题虽是用例题推出，但却有普遍意义。一般说来，设事件B在n次试验中，出现m次；而事件A在事件B出现的m次中又出现l次。则事件B与A在n次试验中，同时出现l次，所以，

$$P(B)=\frac{m}{n};\qquad P(A/B)=\frac{l}{m}$$

$$P(BA)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1.6)$$

由此可以得出**概率的乘法定理**如下：

两个相关联的事件同时发生的概率等于第一个事件的概率与在第一个事件发生下第二个事件的条件概率相乘之积，

两个相关联的事件，可将任一个作为第一个事件。

同样推得：$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$

由此得出重要的关系式如下：

$P(AB)=P(BA)$，即$P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$．(1.7)

如上例$P(A)=\frac{900}{1000}$，$P(B/A)=\frac{651}{900}$

则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{900}{1000}\cdot\frac{651}{900}=\frac{651}{1000}$

乘法定理可以进一步推广，即

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)\cdot P(A_3/A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)$$

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_N)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_N/A_1A_2\cdots A_{N-1}) \qquad (1.8)$$

例2、设有同样大小的两只箱子，甲箱中有3个相同的口袋，乙箱中有两个相同的口袋，每个口袋内放有同质的红白两种乒乓球如下：

甲箱：A袋——4个红球、3个白球，

B袋——5个红球、8个白球，

C袋——6个红球、5个白球，

乙箱：D袋——7个红球、9个白球，

E袋——11个红球、2个白球。

问任取一球，(1)得D袋红球的概率是多少？

(2)得红球的概率是多少？