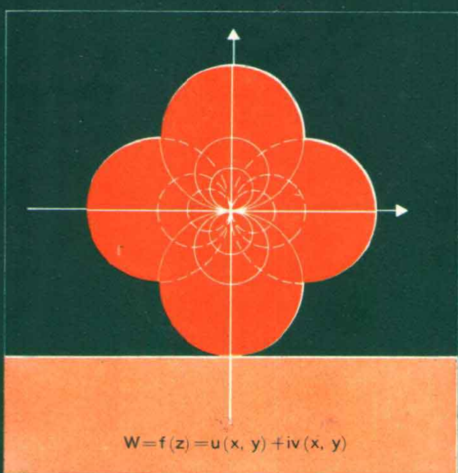
高等工程數學詳解

（1979最新版）第四版　第(一)冊　　章朝榮譯著

ADVANCED
ENGINEERING
MATHEMATICS

Erwin Kreyszig Fourth Edition



久大書局

序 言

Kreyzig 所著的高等工程數學，無論是在國內或國外，均風行已久，且爲一般大專院校當做教材採用。本書編排的方式由淺入深，極能掌握問題的重心，同時以最淺顯的文字把整個工程數學的必備知識做一個有系統的介紹，使學生對理論和應用均有一個最透徹的瞭解，眞不愧爲一代名師之著！

本書的章節分類清晰，而且附有大量的習題，以供練習參考，同時對書中的理論及應用也可作一實際驗證，筆者根據多年的教學經驗，深知一般同學平常因課業煩忙，無法對書本所言教材完全吸收，故特編輯本書，一方面把書中的綱要精華列出，同時也把所有的習題予以詳細解出，供學生研讀參考，對自習者亦能予以啓發提示，希望讀者能藉本書而在學習過程中有所助益。

本書的特色是附上詳細綱要，使讀者能把原文書的精華，藉着本書的詳細敍述而完全吸收，再加上詳解習題，可使讀者學得許多解題技巧和應用方法，書末並附上歷年各國立大學的研究所入學試題，期中、期末考有關試題，使讀者在學習過課文後，有一自我測試程度的機會。

相信本書對學生、助教、教師以及出國留學的同學都有極大的助益。倉促完成本書，錯誤在所難免，懇請諸君隨時賜教指正。

編譯者 章 朝 榮

中華民國68年5月20日

高等工程數學

綱要及研習指引

序

目　錄

第一章　一階常微分方程式

第一章　一階常微分方程式

Ordinary Differential Equations of The First Order

sec 1-1 基本觀念和認識 Basic Concepts and Ideas

常微分方程式（ ordinary differential equation ）是一個數學式，包含未知函數和其對 x 之微分導數，如一數學式，包含未知函數和其對 x 之微分導數，如

(1)　$y' = \cos x$

(2)　$y'' + 4y = 0$

(3)　$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2) y^2$ 皆是常微分方程式

一常微分方程式，對 x 之導數最高階數爲 n，則稱其爲 n 階（ order ）微分方程式。

一函數(4)　　　　$y = g(x)$

是已知一階微分方程式在某區間如 $a < x < b$，之解若 $g(x)$ 在那區間內可微和有定義，而且當 y 和 y' 用 g 和 g' 代替時，方程式成恆等式

例　$y = g(x) = e^{2x}$　　是　$y' = 2y$ 之解

$g' = 2e^{2x}$　　　　　$2e^{2x} = 2e^{2x}$

有時一微分方程式之解，將以隱函數出現，如

$G(x, y) = 0$　　此即隱解

例　$x^2 + y^2 = 1$　　$(y > 0)$ 是 $yy' = -x$ 在 $-1 < x < 1$ 之隱解一微分方程式可有許多解，如下例

例 1

$y = \sin x$　　$y = \sin x + 3$　　$y = \sin x - \dfrac{4}{5}$

是　$y' = \cos x$ 之解，其所有之解的形式爲

(5)　$y = \sin x + c$　　c 爲任意值

例 2

(6) $y=e^{x}$　　$y=2e^{x}$　　$y=-\frac{6}{5}e^{x}$

是　$y'=y$　對所有 x 之解，其所有之解，具有形式

(7) $y=ce^{x}$　　　c 任意值

習慣上稱此含有任意常數的函數爲相關一階方程式之通解（ general solution ），若給任意常數一定的值，此解稱特解。

例　$y'^{2}-xy'+y=0$　　其通解爲　$y=cx-x^{2}$

特解如　　$y=\frac{x^{2}}{4}$

微分方程式之應用：將物理條件，造成數學模型，再由微分方程式，得到數學模型之行爲，再加上物理解釋，可對一系統之行爲徹底了解。

例 3　放射性，指數衰變

由實驗證實一放射性物質分解速率，與當時該物質之存量成正比，當 $t=0$ 時，有 2 克物質，問在以後時間中，其存量如何變化？

第一步（用微分方程式描述物理過程）

$y(t)$ ： t 時間物質存量，$\frac{dy}{dt}$ ：改變率，$\frac{dy}{dt}=ky$

第二步（解微分方程式）

由　$y=ce^{kt}$　　$y'=ky$　　$y=ce^{kt}$ 爲其解

第三步（決定特解）

當　$t=0$　$y=2$　此爲起始條件

$y(0)=2$　　$y(0)=ce^{0}=2$　　$c=2$

特解　　$y=2e^{kt}$

第四步（檢查）

$\frac{dy}{dt}=2ke^{kt}=ky$　　$y(0)=2$

幾何問題亦可導至微分方程式

例 4　幾何應用

求曲線通過 $x-y$ 平面之（ 1 ， 1 ）點，在曲線每一點上之。

斜率爲 $-\dfrac{y}{x}$

此函數是微分方程式(13) $y'=-\dfrac{y}{x}$ 之解

$y=\dfrac{c}{x}$ 是(13)之解，y必須通過（1，1）

即 $x=1$ 時，$y=1$ 得 $c=1$ 此題之解爲 $y=\dfrac{1}{x}$

sec 1-1 習題

說明下列各題微分方程式之階數，並證實所予函數爲其一解。

1. $y'+3y=0 \qquad y=ce^{-3x}$

解 (1)一階

(2) $y=ce^{-3x} \quad y'=-3ce^{-3x}=-3y \quad y'+3y=0$

2. $y''=e^x \qquad y=e^x+ax+b$

解 (1)二階 (2) $y=e^x+ax+b \quad y'=e^x+a \quad y''=e^x$

3. $y''+9y=0 \qquad y=A\cos x+B\sin 3x$

解 (1)二階

(2) $y=A\cos 3x+B\sin 3x \quad y'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$

$y''=-9(A\cos 3x+B\sin 3x)=-9y$

4. $y'+y\tan x=0 \qquad y=C\cos x$

解 (1)一階

(2) $y'=-C\sin x \quad y'+y\tan x=-C\sin x+C\cos x$

$\tan x=0$

5. $xy'+y=\sin x \qquad y=(C-\cos x)/x$

解 (1)一階 (2) $y=(C-\cos x)/x$

$$y'=\frac{\sin x}{x}-\frac{C-\cos x}{x^2}=(x\sin x+\cos x-C)/x^2$$

$$xy'+y=\frac{1}{x}(x\sin x+\cos x-c)+\frac{1}{x}(C-\cos x)$$

$$=\sin x$$

6. $y''+4y'+5y=0$ $\quad y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

解 ①二階 ② $y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

$$y'=-2e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)+e^{-2x}(B\cos x-A\sin x)=e^{-2x}[(B-2A)\cos x-(A+2B)\sin x]$$

$$y''=-2e^{-2x}[(B-2A)\cos x-(A+2B)\sin x]+e^{-2x}[(2A-B)\sin x-(2B+A)\cos x]$$

$$=e^{-2x}[(4A+3B)\sin x+(3A-4B)\cos x]$$

$$y''+4y'+5y=e^{-2x}[(4A+3B-4A-8A+5B)\sin x+(3A-4B+4B-8A+5A)\cos x]=0$$

求證下列各題中所予函數爲相關方程式之一解，並就部分 C 值畫出對應之曲線。

7. $2y'+y=0$ $\quad y=ce^{-0.5x}$

解 $y=ce^{-0.5x}$

$$y'=-0.5ce^{-0.5x}=-\frac{1}{2}y$$

$\therefore\ 2y'+y=0$

8. $y'+2xy=0$ $\quad y=ce^{-x^2}$

解 $y=ce^{-x^2}$

$y=-2xce^{-x^2}=-2xy$

$y'+2xy=0$

9. $y'=-\dfrac{x}{y}$ ， $x^2+y^2=c$

解 $x^2+y^2=c$

$x+yy'=0$

$$y'=-\frac{x}{y}$$

10. $y'^2=4y \quad y=0 \quad y=(x+c)^2$

解 $y=(x+c)^2 \quad y'=2(x+c)$

$y'^2=4(x+c)^2=4y$

$y=0 \quad y'=0 \quad y'^2=4y$

解下列微分方程式

11. $y'=-e^{-x}$

解 令 $y=-e^{-x} \quad y'=e^{x} \quad y=-e^{-x}$ 爲一解

12. $y'''=1$

解 令 $y''=x+c_1 \quad y'=\dfrac{x^2}{2}+c_1x+c_2$

$$y=\frac{x^2}{3.1}+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$$

13. $3y \;=\cos 2x$

解 令 $y''=\dfrac{1}{3}\cos x \quad y'=\dfrac{1}{6}\sin 2x+c$

$$y=-\frac{1}{12}\cos 2x+cx+d \quad \text{爲其解}$$

求一包含 y 和 y' 之一階微分方程式，以所予函數爲其解。

14. $y=\cos x$

解 $y=\cos x \quad y'=-\sin x \quad y'+\tan xy=0$

15. $y=xe^{-x}$

解 $y'=-xe^{-x}+e^{-x}=e^{-x}-y \quad y'+y=e^{-x}$

16. $y=5x^3$

解 $y'=15x^2 \quad xy'-3y=0$

答題中，求 $y=\int f(x)dx$ 並決定 c 使 y 滿足所予條件。

17. $f=x^2 \quad y=-5$ 當 $x=2$

解 $y=\int f\,dx=\dfrac{x^3}{3}+c \quad \dfrac{8}{3}+c=-5 \quad c=-\dfrac{23}{3}$

18. $f=xe^{-x^2} \quad y=1$ 當 $x=0$

解 $y=\int xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$，$-\frac{1}{2}+c=1 \quad c=\frac{3}{2}$

19. $f=\cos^2 x$ 當 $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$

解 $y=\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$

$\frac{\pi}{4}+c=\frac{\pi}{2} \qquad c=\frac{\pi}{4}$

各題中，求證所予函數爲相關微分方程式之解，並就所予條件，決定其特殊解之常數 c，畫出解曲線圖形。

20. $y'+y=1 \qquad y=1+ce^{-x} \qquad y=3$ 當 $x=0$

解 $y=1+ce^{-x} \qquad y'=-ce^{-x}$

$y+y'=1 \qquad y(0)=3 \qquad c=2$

21. $xy'=3y \qquad y=cx^3 \qquad y=1$ 當 $x=-2$

解 $y'=3cx^2 \qquad xy'=3cx^3=3y$

$y(-2)=1 \qquad c=-1/8$

22. $y'=-2xy \qquad y=ce^{-x^2} \qquad y=3$ 當 $x=0$

解 $y=ce^{-x^2} \qquad y'=-2x\,ce^{-x^2}=-2xy$

$y(0)=3 \qquad c=3$

23. （落體）實驗顯示一物體在眞空中因重力關係，其下落加速度爲一常數（$g=9.8$ m/sec^2），試以落下距離 $s(t)$ 之微分方程式表示此定律，並解此方程式而得熟知之定律 $s=\frac{g}{2}t^2$

解 由加速度之定義 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$

$\frac{ds}{dt}=gt+c_1 \qquad t=0 \quad \frac{ds}{dt}=0 \qquad \therefore \quad c_1=0$

$s=\frac{1}{2}gt^2+c_2 \qquad t=0 \quad s=0 \quad c_2=0 \qquad \therefore \; s=\frac{1}{2}gt^2$

24. 在 prob 23 中若 $t=0$ 物體由起始位置 s_0 以起始速度 $v=v_0$ 落下，試證其解爲 $s(t)=\frac{9}{2}t^2+v_0t+s_0$

解 $\frac{d^2s}{dt^2}=g \quad \frac{ds}{dt}=v=gt+c_1 \quad v(0)=v_0 \quad c_1=v_0$

$\frac{ds}{dt}=gt+v_0 \quad s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+c \quad s(0)=s_0 \quad c=s_0$

$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$

25. 某汽車製造商宣稱其汽車可在 30 秒內從 0 加速至 100mph 如此加速度爲常數，則此時汽車已行駛多遠？

解 $100\,mph=\frac{1}{36}\ mps$

$\frac{d^2s}{dt^2}=a=\text{const} \quad \frac{ds}{dt}=at+c_1 \quad \frac{ds}{dt}(0)=0 \quad \therefore c_1=0$

$\frac{ds}{dt}=at \quad 30\,a=\frac{1}{36}\ mps \quad a=\frac{1}{1080}\ mps$

$s=\frac{1}{2}at^2+c_2 \quad s(0)=0 \quad c_2=0$

$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{1}{1080}(30)^2=\frac{5}{12}\ \text{mile}=2200$ 呎#

26. 一飛機從機場起飛時已滑行 2 km，若此滑行以 10m/sec 之速度開始，其滑行 50 sec，則起飛速度爲何？

解 $\frac{d^2s}{dt^2}=a=\text{const} \quad \frac{ds}{dt}=at+c \quad \frac{ds}{dt}(0)=c=10\,m/sec$

$s=\frac{1}{2}at^2+10t \quad s(0)=0$

$s(50)=\frac{1}{2}a(50)^2+10\cdot 50=2000$

$$\therefore\ a=1.2 \qquad v(50)=\frac{ds}{dt}(50)=1.2\times 50+10=70m/sec$$

27. 一火箭垂直向上發射，在開始的飛行過程中具有 $7t\ m/sec^2$ 的加速度，引擎在 $t=10\ sec$ 關掉，問火箭將爬升多高。

解 $$\frac{d^2s}{dt^2}=7t \qquad \frac{ds}{dt}=\frac{7}{2}t^2 \qquad \frac{ds}{dt}(0)=0$$

$$s=\frac{7}{6}t^3 \qquad s(0)=0$$

$$s(10)=\frac{7000}{6}=1167\ m$$

28. 線性加速器在物理上用於把帶電粒子加速，假若有一 α 粒子進入加速器，獲得一等加速度，使其速度在 $10^{-3}\ sec$ 內由 $10^3\ m/sec$ 增到 $10^4 m/sec$，求加速度 a 和 $10^{-3}\ sec$ 內所行距離。

解 $$\frac{d^2s}{dt^2}=a \qquad \frac{ds}{dt}=at+c \qquad c=10^3=\frac{ds}{dt}(0)$$

$$10^4=a\times 10^{-3}+10^3 \qquad a=9\times 10^6 m/sec^2$$

$$s=\frac{1}{2}at^2+10^3 t \qquad s(10^{-3})=\frac{1}{2}\times 9\times 10^6\times 10^{-6}+10^3\times 10^{-3}=5.5\ m$$

29. （大氣壓力指數下降）觀察顯示大氣壓力 p 隨高度 h 之改變率正比於壓力，假設在 $6000\,m$ 之壓力爲其海平面壓力 p_0 的 $1/2$，試求任一高度的壓力之公式

解 $$\frac{dp}{dh}=-kp \qquad p=ce^{-kh} \qquad c=p(0) \qquad p=p_0\, e^{-kh}$$

$$\frac{p(6000)}{p(0)}=e^{-6000k}=\frac{1}{2} \qquad k=\frac{1}{6000}\ \ell n\, 2$$

$$p=p(0)\ e^{-\frac{\ell n 2}{6000}h}$$

30. （指數上升，人口模式）假若相當少的居民，不受干擾，則其成長往往依馬爾薩斯定律，即其成長率正比於當時之居民，試歸納成微分方程式，證明其解是 $y(t)=y_0e^{kt}$，對美國而言，觀察

結果如下：

t	0	30	60	90	120
Year	1800	1830	1860	1890	1920
Population	5.3	12.9	31.4	62.9	106.5

用頭二行決定 y_0 和 k，計算 1860，1890，1920 之值，並與觀察值比較。

解 $\dfrac{dy}{dt}=ky \qquad y=y_0\,e^{kt}$

$t=0 \qquad y_0=5.3$

$t=30 \qquad y=y_0\,e^{30k}=12.9 \qquad k=\dfrac{1}{30}\ \ell n\ \dfrac{12.9}{5.3}=0.0296$

$t=60 \qquad y=y_0\,e^{60k}=31.36 \qquad (1860)$

$t=90 \qquad y=y_0\,e^{90k}=(12.9)^3/(5.3)^2=66.25$

$t=120 \qquad y=y_0\,e^{120k}=(12.9)^4/(5.3)^3=186$

sec 1-2 幾何意義：等斜線

Geometrical Considerations Isoclines

任何一階微分方程式，均可表示成隱函數形式。

(1) $F(x, y, y')=0$

有許多狀況下，一階方程式可表爲顯函數

(2) $y'=f(x, y)$

(2)式具有簡單幾何意義，固利用圖解法可得出其特解之大致形狀，由(2)式可知凡通過 (x_0, y_0) 點之解，在該點之斜率必等於 $f(x_0, y_0)$，因此首先在 x-y 平面上通過 $f(x, y)$ 等於一常數之各點繪若干曲線，此類曲線，稱爲(2)式之常値斜率曲線或稱等斜線，即

$$f(x, y)=k$$

在每一等斜線上，可繪出許多斜率爲 k 之平行短線段，此 k 値是(2)式之解曲線在該等斜線上之斜率，在所有等斜線上，均加繪此種線素，

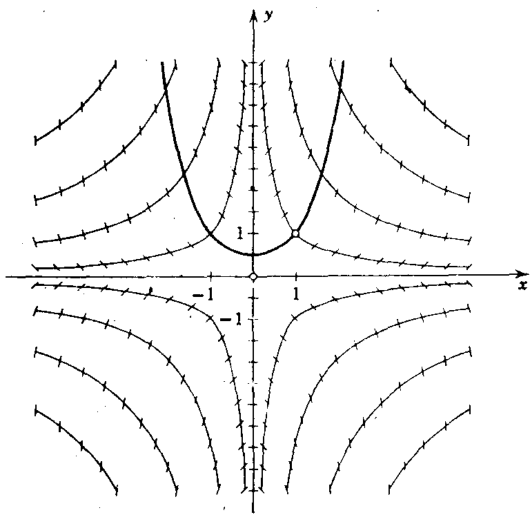
構成一線素場，稱爲(2)式之方向場（direction field）藉線素之助，(2)式之解曲線之近似圖形，極易繪出，以例題說明如下：

例 1 繪出一階微分方程式(3) $y' = xy$，之方向場，及通過（1，1）點之近似解曲線。

此等斜線族，爲等軸雙曲線 $xy = k$ 及二坐標軸。

結果如 Fig 6 所示，在 F 節內吾人將可看出(3)式極易求解，故此例題僅用以表示。

方向場處理問題之詳情，若一階方程式之解無法用已知函數表示，或表示過於複雜，方向場之方法就極有幫助。



第 6 圖　方程式（3）之方向場

sec 1-2 習題

各題中畫出正確之方向場及數個近似解曲線，再用分析解出與之比較，以判別此法之精確性。

1. $y' = x$

解 $y' = x \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + c$

2. $y' = x^2$

解 $y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3 + c$

3. $y' = y$

解 $y' = y \qquad y = ce^x$

各題中畫出正確方向場及數個近似解曲線

4. $y' = -xy$

解

5. $y' = -\frac{x}{y}$

解 $-\frac{x}{y} = k \qquad y' = -\frac{x}{k}$

6. $y' = x^2 + y^2$

解 $x^2 + y^2 = k$

7. $y' = x + y$

解 $x + y = f(x, y)$

$x + y = k$