92301

·高等学校教学用书·

断裂力学原理

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

O39
5733

高等学校教学用书

断裂力学原理

东北工学院　赖祖涵　编著

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

断裂力学原理

东北工学院　赖祖涵　编著

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　　印张 11.5 字数 274 千字

1990年11月第一版　1990年11月第一次印刷

印数00,001～3,000册

ISBN　7-5024-0773-1

TG·116（课）定价2.30元

序

断裂力学是应用力学的一个新的分支，我国在20世纪70年代才开始迅速发展起来。目前国内已经出版了这类学科的某些专著和通俗读物。断裂力学在工程结构安全设计方面已经产生了巨大的影响；不但如此，冶金界材料工作者也迫切需要了解并掌握断裂力学的基本原理。本书是为了金属材料专业高年级学生选修和研究生学习“断裂力学基础”而编写的教材。在编写中考虑了以下几点原则：

一、着重阐明断裂力学原理和概念，对于数学推导，除必要部分以外，尽可能减缩。牵涉到有限元计算，只介绍其结果和意义。

二、为了结合金属材料专业学生或研究生的需要，本书有意识地配合一些微观（实为细观）的阐述，并举常用冶金材料为例，引导读者应用断裂力学原理。

三、全书是以断裂力学原理为内容，但吸收了某些新近成就，以加深对原理的阐明，并反映一部分国内外有关的研究工作。

四、本书可作为40学时课程用的教材。讲授一部份，其余可指定自行阅读。编写时注意了介绍分析问题和解决问题的方法，以及便于自行阅读的要求。

由于经验不多，难免尚有缺点和失误，希读者指正。

赖祖涵

1989.6.

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1. 线弹性断裂力学

本章是以材料的弹性形变为基础，论述裂纹尖端的应力场及其特征参数。建立能量法处理断裂问题，并给出裂纹扩展力。简明阐述复合断裂准则。

1-1 应 力

材料中的应力用σ_{ij}表示。σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}为张应力；σ_{21}、σ_{12}、σ_{13}、σ_{31}、σ_{23}、σ_{32}为切应力。图1-1表示一个立方体，设正面与x轴正交的面积为A_1，立方体之外的材料对立方体的作用通过A_1面的正向作用力为F_{11}，则$\sigma_{11}=\lim\limits_{A_1\to 0}F_{11}/A_1$。$\sigma_{22}$，$\sigma_{33}$的定义相似。立方体外的材料通过$A_1$的剪切力为$F_{12}$，则剪切应力$\sigma_{12}=\lim\limits_{A_1\to 0}F_{12}/A_1$；其余$\sigma_{23}$、$\sigma_{31}$……等的定义相似。立方体六个面上都有应力。令立方体趋于无限小，可由九个量组成的应力张量来描述o点的应力状态：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

考虑到立方体平衡，立即看到：

$$\sigma_{12}=\sigma_{21},\quad \sigma_{23}=\sigma_{32},\quad \sigma_{31}=\sigma_{13}$$

简写为：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\quad i\neq j=1,\ 2,\ 3,$$

表明应力张量是对称的。

有时候不用直角坐标系而采用圆柱极坐标系（z，r，θ），则张应力是：σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$，σ_{zz}；切应力是：$\sigma_{r\theta}$，$\sigma_{\theta r}$，σ_{rz}，σ_{zr}，$\sigma_{z\theta}$，$\sigma_{\theta z}$，同样可得出平衡条件为$\sigma_{\theta z}=\sigma_{z\theta}$，$\sigma_{zr}=\sigma_{rz}$，$\sigma_{\theta r}=\sigma_{r\theta}$。如用$\sigma_{ij}$表示应力时，则$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，$i\neq j=r,\ \theta,\ z$，见图1-2。

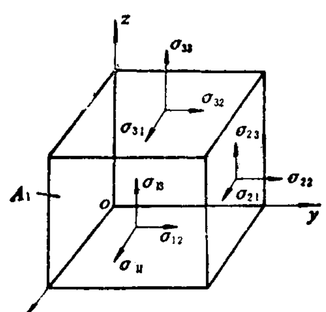


图 1-1 作用在立方体各个面上的应力分量

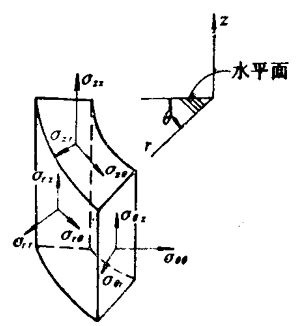


图 1-2 用圆柱坐标系表示的应力分量

当涉及到缺口应力场时，还会用到第三种坐标系，例如，平面曲线坐标系。$x_3=0$，而

$$\begin{aligned} x_1 &= c\cosh\alpha\cos\beta \\ x_2 &= c\sinh\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{1-1}$$

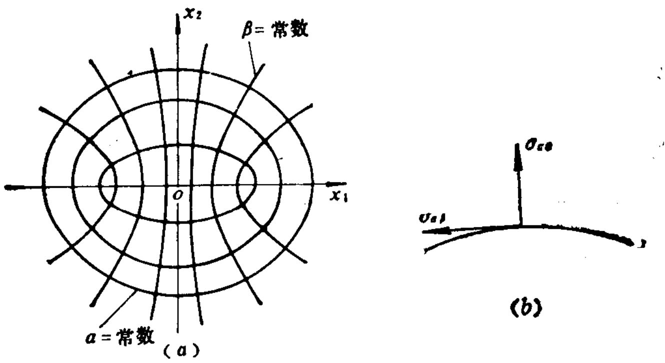


图 1-3 椭圆坐标系（a）和用椭圆坐标表示的应力（b）

通过这二式定义α和β。现在以（α，β）为坐标，就是曲线坐标。注意

$$\cosh\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2},\qquad \sinh\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$

先看α=常数的轨迹，

$$\left(\frac{x_1}{c\cosh\alpha}\right)^2+\left(\frac{x_2}{c\sinh\alpha}\right)^2=1$$

这是椭圆方程，长半轴为$a=c\cosh\alpha$，短半轴为$b=c\sinh\alpha$。椭圆的焦点至原点的距离为

$$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{c^2\cosh^2\alpha-c^2\sinh^2\alpha}=c$$

所以α=常数的轨迹是同焦点的一族椭圆，见图1-3(a)。

再看β=常数的轨迹，则

$$\left(\frac{x_1}{c\cos\beta}\right)^2-\left(\frac{x_2}{c\sin\beta}\right)^2=1$$

这是双曲线方程，长短轴分别为

$$a=c\cos\beta,\quad b=c\sin\beta,$$

见图1-4，

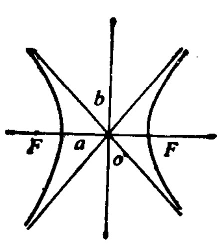


图 1-4 双曲线的长、短轴

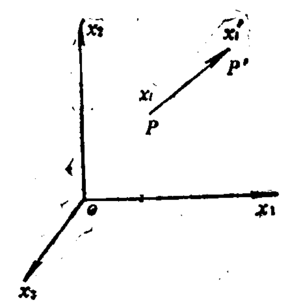


图 1-5 变形产生的位移

$$oF=\sqrt{a^2+b^2}=c$$

可见β=常数的轨迹是同焦的一族双曲线，见图1-3（a）。椭圆族与双曲线族正交。β可由

$0 \to 2\pi$。用这种坐标的好处在于适当选择常数时椭圆能够变得扁平，这可模拟一个裂纹，或者通过一对双曲线模拟缺口。用此坐标表示应力时将有$\sigma_{\alpha\alpha}$和$\sigma_{\alpha\beta}$，见图 1-3(b)。

1-2 应　变

材料的变形使其中某点$P(x_1, x_2, x_3)$移到$P'(x_1', x_2', x_3')$，如图1-5所示。

$$x_i' = x_i + u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

u_i为坐标的函数，写为：

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$$

对于小的形变，这种函数关系就是线性关系。应变也是一个对称张量，其分量ε_{ij}的定义是：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ji} \tag{1-2}$$

应变张量为

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

其中对角线的分量（ε_{11}，ε_{22}，ε_{33}）均为正应变，而$\varepsilon_{ij}(i \neq j)$为切应变。若用$\gamma$表示工程切应变。则$\gamma_{ij}$与$\varepsilon_{ij}$之间差1/2倍。例如：$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\gamma_{13}, \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\gamma_{23}$等等。

1-3 主应力与主应变

设o点的应力张量σ_{ij}为已知，就可以求出通过该点的面元ΔS的单位面积的应力T的各个分量，求法是

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{1-3}$$

其中n_j是面元法线单位矢量的分量。注脚重复表示对该记号求和。

可以找到三个互相垂直的平面，在这些平面上无切应力，只有正应力，这三个平面叫做主平面。与此主平面垂直的三条法线叫做主轴，主平面上的主正应力一般用σ_1，σ_2，σ_3表示，通常σ_1的代数值最大，σ_3代数值最小。若已知σ_{ij}，则列出行列式方程，求解即可得到σ_1，σ_2和σ_3。

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{31} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \tag{1-4}$$

即：
$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

其中
$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2 - I_1^2)$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}]$$

因为主应力是应力场点的物理量，I_1，I_2和I_3应该和用以表示σ_{ij}的坐标系无关，所以I_1，I_2，I_3都是应力的不变量。

知道了σ_1，σ_2，σ_3以后就可以求出最大切应力及其所作用的平面。若σ_1为最大的主应力，σ_3为最小，则最大切应力的平面与σ_1，σ_3倾斜45°并且与σ_2平行。最大切应力等于

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{1-5}$$

在τ_{max}的作用面上尚有正应力为

$$\tilde{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min})=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) \tag{1-6}$$

$I_1/3$等于平均正应力$\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$。这就是静水正应力。将正应力分量分别减去$I_1/3$，叫做应力偏量，其定义是：

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{\delta_{ij}\cdot I_1}{3},\qquad \delta_{ij}\begin{cases}=1, i=j\\ =0, i\neq j\end{cases} \tag{1-7}$$

和前面讲的I_1，I_2，I_3相似，对应于应力偏量S_{11}，S_{22}，S_{33}就有不变量J_1，J_2，J_3。其中要特别提到的是

$$J_2=\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij}-J_1^2)=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \tag{1-8}$$

这是因为$J_1\equiv S_{ii}=\sigma_{ii}-\left(\frac{I_1}{3}\right)3=0$

和主应力对应，有主应变ε_1，ε_2和ε_3，就是说可以适当选择坐标轴方向，使轴上方向仅有正应变而无切应变。对于各向同性介质，应力主轴方向就是应变主轴方向。和上面求主应力方法相似，列出行列式方程：

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}-\varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon\end{vmatrix}=0$$

解出ε的三个根就是$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3$。

有了主应变以后，也和式（1-5）那样，可以求出最大切应变。但是

$$\gamma_{max}=\varepsilon_1-\varepsilon_3 \tag{1-9}$$

右边无1/2因子，道理是很明显的，不必详证。

弹性体应变能密度

$$W=\int_0^{\varepsilon}\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

右端的σ_{ij}和ε_{ij}指最终的应力和应变。

1-4 弹性体应力-应变的关系

各向同性的弹性体在三向应力σ_1，σ_2，σ_3作用下，主应力与主应变之间的关系是：

$$\begin{aligned}\sigma_1&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3\\ \sigma_2&=\lambda\varepsilon_1+(\lambda+2\mu)\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3\\ \sigma_3&=\lambda\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+(\lambda+2\mu)\varepsilon_3\end{aligned} \tag{1-10}$$

其中主应变ε_i是和σ_i对应的正应变，λ叫做Lame'常数，膨胀率为Δ，

$$\Delta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则上式亦可写为：

$$\sigma_1=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_1$$
$$\sigma_2=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_2$$
$$\sigma_3=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_3$$

这是就主轴而言，都只有正应力和正应变：

对于非主轴x_1，x_2，x_3，则应力-应变的关系是：

$$\sigma_{11}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{11}\qquad \sigma_{12}=\mu\gamma_{12}=2\mu\varepsilon_{12}$$
$$\sigma_{22}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{22}\qquad \sigma_{23}=\mu\gamma_{23}=2\mu\varepsilon_{23}$$
$$\sigma_{33}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{33}\qquad \sigma_{31}=\mu\gamma_{31}=2\mu\varepsilon_{31}$$

对于各向同性介质，$E=\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$，$\nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$，只有两个模量是独立的。$E$为杨氏模量，$\nu$为泊松比，由此二式，得

$$2\mu(1+\nu)=E,\qquad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{2\nu}{1-2\nu}$$

将$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$写出，便得

$$\Delta=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3\lambda+2\mu}$$

代入σ_1的表达式，$\sigma_1=\dfrac{\lambda(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3\lambda+2\mu}+2\mu\varepsilon_1$，并用上面的$\lambda$值，可以算出：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

同理

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\nu(\sigma_3+\sigma_1)] \qquad (1\text{-}11)$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)]$$

若$\varepsilon_3=0$，则为平面应变，$\sigma_3=\nu(\sigma_1+\sigma_2)$

同样可得：

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})] \qquad (1\text{-}12)$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]$$

Δ是不变式，$\Delta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，对于弹性变形，$\nu\approx0.3$。

在平面应力的条件下，$\sigma_{33}=0, \varepsilon_{11}=\dfrac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}]$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}]$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}[-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]$$

若为平面应变　　$\varepsilon_{33}=0,\ \sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\{\sigma_{22}+\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\}]$$

即：

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{11}-\nu(1+\nu)\sigma_{22}]$$

也可以得到ε_{22}的相似表达式，总结起来得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}[\alpha\sigma_{11}-\beta\nu\sigma_{22}]\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}[\alpha\sigma_{22}-\beta\nu\sigma_{11}]\\ 2\varepsilon_{12}&=\frac{\sigma_{12}}{\mu}=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{平面应力：}\alpha=1,\ \beta=1\\ &\text{平面应变：}\alpha=(1-\nu^2),\\ &\qquad\beta=1+\nu\end{aligned}\qquad(1\text{-}13)$$

注意：平面应变及平面应力的应力分量有：σ_{11}，$\sigma_{12}=\sigma_{21}$，σ_{22}，

$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$（平面应变）

$\sigma_{33}=0$　（平面应力）

关于应变部分：ε_{11}，$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$，$\varepsilon_{22}$，$\varepsilon_{33}=0$（平面应变），$\varepsilon_{33}\neq0$（平面应力）

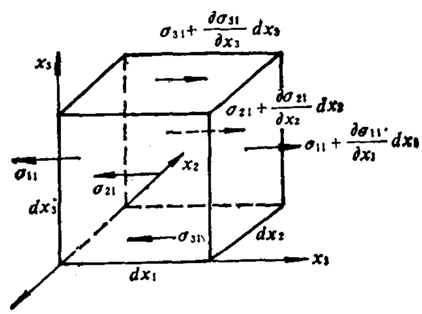


图 1-6　立方体应力平衡图

1-5　弹性理论的基本方程

设立方体边长为dx_1，dx_2，dx_3，处于平衡状态，在x_1方向合力应等于零，见图1-6：

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$+\left[\sigma_{21}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right]dx_3dx_1-\sigma_{21}dx_3dx_1$$

$$+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2=0$$

∴

同理

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}=0\\&\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}=0\\&\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}\tag{1-14}$$

简写为 $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=0$，此为应力平衡方程，

不但存在应力平衡方程，还应该有应变相容方程。在二维的条件下，

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad 2\varepsilon_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

故

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

二者相加

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}$$

所谓应变相容方程就是：

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}\tag{1-15}$$

现在需要将以上诸方程合并起来，以平面应力为例：

$\alpha=\beta=1$，

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22})\qquad \langle\text{i}\rangle$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11})\qquad \langle\text{ii}\rangle$$

$$2\varepsilon_{12}=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}\qquad \langle\text{iii}\rangle$$

〈i〉对x_2微分两次+〈ii〉对x_1微分两次，

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)$$

$$=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\ \text{（由相容方程）}\qquad\langle\text{iv}\rangle$$

由式（1-15）和⟨iii⟩，知：
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{2(1+\nu)}{E}\cdot\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\qquad(1\text{-}16)$$

再由平衡方程：
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1},\quad\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}=-\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2},\qquad\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}$$

各取一半，
$$\therefore\quad\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

由式（1-16）得
$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

代入上面⟨iv⟩，
$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)=-\frac{(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

化简，得
$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}\right)=-\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{E}(\nabla^2\sigma_{11}+\nabla^2\sigma_{22})=0$$

$$\therefore\quad\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0\qquad(1\text{-}17)$$

此式对平面应变也适用。

1-6 Airy应力函数

定义应力函数Φ，使得：

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2},\quad\sigma_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2},\quad\sigma_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2},$$

代入平衡方程⟨iv⟩，自动满足。为了满足$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0$，则应

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\right)=\nabla^2\cdot\nabla^2\Phi=0,\qquad(1\text{-}18)$$

无论平面应力或平面应变都这样，解式（1-18）需注意边界条件，满足式（1-18）的Φ为双谐函数，

1-7 复变函数方法

令$z=x_1+ix_2$，$f(z)$ 为解析函数，存在$\frac{d}{dz}f(z)=f'(z)$。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}f(z) &= \frac{\partial}{\partial z}f(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=f'(z)\\
\frac{\partial}{\partial x_2}f(z) &= \frac{\partial}{\partial z}f(z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=if'(z)
\end{aligned}
\tag{1-19}
$$

设 $$f(z)=\alpha+i\beta,\quad \alpha=\mathrm{Re}f(z),\quad \beta=\mathrm{Im}f(z)$$

由式（1-19）得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f(z)}{\partial x_1}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}=f'(z)\\
\frac{\partial f(z)}{\partial x_2}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}=if'(z)
\end{aligned}\right\}
$$

∴ $$i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}$$

两边虚、实部分各相等，

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}&=\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\\
\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}&=-\frac{\partial\beta}{\partial x_1}
\end{aligned}\right\}\text{或}
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Re}f(z)&=\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Im}f(z)\\
\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Re}f(z)&=-\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}f(z)
\end{aligned}\right\}
\tag{1-20}
$$

这称为Cauchy-Riemann方程。

由上二式消去β，$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}=0$，即$\nabla^2\alpha=0$，

$$\nabla^2\mathrm{Re}f(z)=0$$

表示解析函数$f(z)$之实数部分满足Laplace方程，同理，$\nabla^2\mathrm{Im}f(z)=0$，故$\mathrm{Re}f(z)$，$\mathrm{Im}f(z)$都为谐函数。

读者可以自证：如果ψ是谐函数，则$x_1\psi$，$x_2\psi$（注意$\psi=\psi(x_1, x_2)$）都是双谐函数，双谐函数可以选作Airy应力函数，当然要配合问题的边界条件。

更一般地讲，Airy应力函数可以写作：

$$\Phi=\mathrm{Re}[(x_1-ix_2)\psi(z)+\chi(z)],\quad z=x_1+ix_2 \tag{1-21}$$

这需要加以证明。除了Airy应力函数之外，还可以用函数F和B来定义应力函数：

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2B}{\partial x_1\partial x_2}\\
\sigma_{22}&=\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2B}{\partial x_1\partial x_2}\\
\sigma_{12}&=\frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2B}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2B}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
\tag{1-22}
$$

代入平衡方程(1-14)，只考虑平面问题，得

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3} - 2\frac{\partial^3 B}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{\partial^3 B}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 B}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0$$

和
$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_2^3} + 2\frac{\partial^3 B}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 B}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 B}{\partial x_1^3} = 0$$

这就是
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 F) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 B) = 0$$

和
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 F) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 B) = 0$$

而且这就是Cauchy-Riemann关系，或者说$\nabla^2(F+iB)$是解析函数。问题在于选择F和B，令

$$F + iB = \bar{z}\psi(z) + \chi(z), \qquad z = x_1 + ix_2 \tag{1-23}$$
$$\bar{z} = x_1 - ix_2$$

得：
$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + i\frac{\partial B}{\partial x_1} = \psi(z) + \bar{z}\psi'(z) + \chi'(z),$$

又：
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + i\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} = \psi'(z) + \psi'(z) + \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z),$$

另外，又有：
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} + i\frac{\partial B}{\partial x_2} = -i\psi(z) + \bar{z}\psi'(z)i + \chi'(z)i$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + i\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} = \psi'(z) + \psi'(z) - \bar{z}\psi''(z) - \chi''(z)$$

因此，
$$\nabla^2 F + i\nabla^2 B = 4\psi'(z)$$

只要$\psi(z)$和$\chi(z)$都是解析的，$\psi'(z)$也是解析的，由上式则知$\nabla^2(F+iB)$便是解析的。由此挑出的实函数就是应力函数，

$$\Phi = F = \mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] = \mathrm{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)]$$

这就是式（1-21）。

下面介绍用复变函数法建立应力的表达式。为此需要建立应力与函数$\psi(z)$，$\chi(z)$之间的关系。

令$\bar{f}(\bar{z})$为$f(z)$的共轭函数，即将$f(z)$中的i变为$-i$

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = 2\alpha = 2\mathrm{Re}f(z) \tag{1-24}$$

由式（1-21），

$$\Phi = \mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

和式（1-24）比较，得：$2\Phi = 2\mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z)] + 2\mathrm{Re}\chi(z)$

$$= [\bar{z}\psi(z) + z\bar{\psi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})]$$

对x_1微分一次：$2\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \bar{z}\dfrac{\partial\psi(z)}{\partial x_1} + \psi(z)\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial x_1} + z\dfrac{\partial\bar{\psi}(\bar{z})}{\partial x_1} + \bar{\psi}(\bar{z})\dfrac{\partial z}{\partial x_1} +$

$$+\frac{\partial \chi(z)}{\partial x_1}+\frac{\partial \overline{\chi}(\overline{z})}{\partial x_1}$$

注意：$\frac{\partial z}{\partial x_1}=1$，$\frac{\partial}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=\frac{d}{dz}$，$\frac{\partial}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial x_1}\right)=\frac{d}{d\overline{z}}$

∴ $$2\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\overline{z}\psi'(z)+\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\psi}(\overline{z})+\chi'(z)+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad 〈i〉$$

同理对x_2微分

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\overline{z}\frac{\partial\psi(z)}{\partial x_2}+\psi(z)\frac{\partial\overline{z}}{\partial x_2}+z\frac{\partial\overline{\psi}(\overline{z})}{\partial x_2}+\overline{\psi}(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial\chi(z)}{\partial x_2}+\frac{\partial\overline{\chi}(\overline{z})}{\partial x_2}$$

注意：$\frac{\partial z}{\partial x_2}=i$，$\frac{\partial \overline{z}}{\partial x_2}=-i$

∴ $$2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\overline{z}i\psi'(z)-i\psi(z)-iz\overline{\psi}'(\overline{z})+i\overline{\psi}(\overline{z})+i\chi'(z)-i\overline{\chi}'(z)$$

两端乘以i，

$$2i\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=-\overline{z}\psi'(z)+\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z})-\chi'(z)+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad 〈ii〉$$

〈i〉+〈ii〉，得：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+i\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad 〈iii〉$$

〈iii〉对x_1微分，$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial\psi(z)}{\partial x_1}+z\frac{\partial\overline{\psi}'(\overline{z})}{\partial x_1}+\overline{\psi}'(\overline{z})+\frac{\partial\overline{\chi}'(\overline{z})}{\partial x_1}$

得：$$\sigma_{22}-i\sigma_{12}=\psi'(z)+z\overline{\psi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\chi}''(\overline{z}) \quad 〈iv〉$$

〈iii〉再对x_2微分，

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}+i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=\frac{\partial\psi(z)}{\partial x_2}+\overline{\psi}'(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial x_2}+z\frac{\partial\overline{\psi}'(\overline{z})}{\partial x_2}+\frac{\partial\overline{\chi}'(\overline{z})}{\partial x_2}$$

$$=i\psi'(z)+i\overline{\psi}'(\overline{z})-iz\overline{\psi}''(z)-\overline{\chi}''(\overline{z})i$$

两端乘以（$-i$），得

$$-i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=\psi'(z)+\overline{\psi}'(\overline{z})-z\overline{\psi}''(\overline{z})-\overline{\chi}''(\overline{z}) \quad 〈v〉$$

〈iv〉+〈v〉得 $$\sigma_{11}+\sigma_{22}=2[\psi'(z)+\overline{\psi}'(\overline{z})]=4\mathrm{Re}\psi'(z) \quad (1\text{-}25)$$

〈iv〉−〈v〉得 $$\sigma_{22}-\sigma_{11}-2i\sigma_{12}=2[z\overline{\psi}''(\overline{z})+\overline{\chi}''(\overline{z})]$$

把后一式变为复数共轭式，

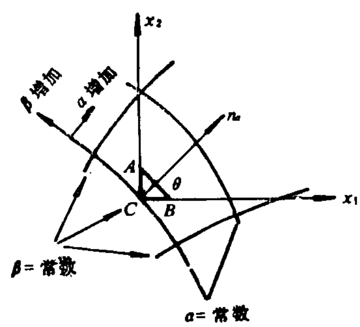
$$\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2[\overline{z}\psi''(z)+\chi''(z)] \quad (1\text{-}26)$$

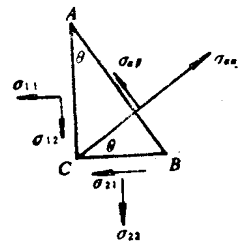
从这最后方程左右两端虚实各相等，得$(\sigma_{22}-\sigma_{11})$和$\sigma_{12}$，再和式（1-25）联立，就求出$\sigma_{11}$和$\sigma_{22}$。

1-8 曲线坐标——椭圆-双曲线坐标

式（1-25）用椭圆-双曲线坐标表示。由于

$$x_1 = c\cosh\alpha\cos\beta \quad \alpha=\text{常数，为一族椭圆，}$$
$$x_2 = c\sinh\alpha\sin\beta \quad \beta=\text{常数，为一族双曲线}$$
$$\beta = 0 \to 2\pi\text{，二者互为垂直}$$





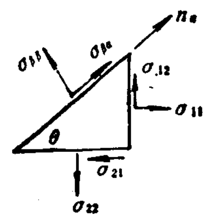


图 1-7 用曲线坐标表示的应力和用直角坐标表示的应力　　　　图 1-8 应力之间的关系

ABC是坐落在原点处的一小块材料，其各面之应力如图1-7所示。

研究二维平面应力或平面应变问题，ABC处于平衡态。在$\alpha\alpha$方向合力=0，（设单位厚度）

$$\sigma_{\alpha\alpha}AB = \sigma_{11}AB\cos\theta\cos\theta + \sigma_{22}AB\sin\theta\sin\theta + \sigma_{12}(AB\cos\theta)\sin\theta$$
$$+\sigma_{21}(AB\sin\theta)\cos\theta$$
$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

又：
$$\sigma_{\alpha\beta}(AB) - \sigma_{12}AB\cos^2\theta - \sigma_{22}AB\sin\theta\cos\theta + (AB\cos\theta)\sigma_{11}\sin\theta$$
$$+\sigma_{21}AB\sin^2\theta = 0$$
$$\therefore \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{12}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin\theta\cos\theta - \sigma_{11}\sin\theta\cos\theta - \sigma_{21}\sin^2\theta$$
$$\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

再考虑右图那一块材料（单位厚度）的平衡。图1-8中

$$\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

相加，得$\sigma_{22}+\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{11}+\sigma_{22}$，表明它对坐标转换为不变式。

又
$$\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22}-\sigma_{11})\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

$$2i\sigma_{\alpha\beta} = 2\sigma_{12}i\cos 2\theta + (\sigma_{22}-\sigma_{11})i\sin 2\theta \qquad \langle\text{i}\rangle$$
$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11}(-\cos 2\theta) + \sigma_{22}\cos 2\theta - 4\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$
$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} = (\sigma_{22}-\sigma_{11})\cos 2\theta - 2\sigma_{12}\sin 2\theta \qquad \langle\text{ii}\rangle$$

〈i〉+〈ii〉，得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22}-\sigma_{11})(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2\sigma_{12}i(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\\ &\therefore \quad \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12})e^{i2\theta}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}27)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com