BUZHIDAO DE SHIJIE

不知道的世界

SHUXUECAIXIANG

数学猜想

数学篇

中国少年儿童出版社

不知道的世界

数学猜想

李毓佩◎著

中国少年儿童出版社

青少年理性科普书系

BUZHIDAO DE SHIJIE

不知道的世界

SHUXUECAIXIANG

数学猜想

数学篇

李毓佩 著

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学猜想:数学篇/李毓佩著.—北京:中国少年儿童出版社,2002
(不知道的世界)
ISBN 7-5007-6271-2

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学史-少年读物
Ⅳ.O11-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 065398 号

SHUXUECAIXIANG

出版发行:中国少年儿童出版社
出版人:

作　者:李毓佩　插　图:阎　萍　封面设计:田家雨
责任编辑:吕卫丽　美术编辑:朱　虹
责任校对:宏　宇　责任印务:宋世祁

社址:北京东四十二条 21 号　邮政编码:100708
电话:086-010-64032266　传　真:086-010-64012262
24 小时销售咨询服务热线:086-010-84037667

印刷:河北新华印刷二厂　经销:新华书店

开本:850×1168　1/32　印张:5.25
2002 年 10 月河北第 1 版　2002 年 10 月河北第 1 次印刷
字数:80 千字　印数:15,000 册

ISBN 7-5007-6271-2/O·69　定价:9.00 元

北京科普创作出版专项资金资助

策划 主编 陈海燕

责任编辑 吕卫丽

美术编辑 朱 虹

封面设计 田家雨

插 图 阎 萍

鸟兽寻踪
六脚精灵
化学迷宫
物理未知
沙场疑云
文坛歧义
异想地开
冷血秘案
古生究竟
数学猜想
数典问祖
大洋探幽
微生疑迹
千古天问
绿色难题
社科求索
人体假说

主编的话

无限的宇宙隐藏着无穷的秘密。人类以最大的自信，也只敢说接近认识了它的百分之十。事实上，现代科技所获知的东西越多，科学家们便发现，不知道的东西反倒更多了。

与众多展现已知世界的科普读物不同，《不知道的世界》是一套未知世界的小百科。它选取了各学科中一系列科学谜案，反映了人们在探疑解谜中做出的努力和遭遇的障碍，介绍了各种有代表性的假说、猜想和目前达到的研究水平，提供了攻难闯关的相应知识背景，并指示了可能的途径。总之，它要把读者带进陌生、神秘、异彩纷呈的未知领域，激发人的探索欲和创造欲，同时使人获得科学知识和科学思想。

这是一套由科学家和科普作家们写给青少年的书。初版为10册，面世后广受欢迎，连续4次再版，并获得国家图书奖、“五个一”工程奖、全国优秀少儿读物一等奖等7个奖项。新版《不知道的世界》已扩编为17册，内容更加丰富充实，读来通俗而令人着迷。

“不知道”是发明创造的起跑点，探究“不知道”是科技发展的原动力。让我们畅想：未来有一位中国科学家，因为破解了科学悬谜而功著世界。今天，他（她）还只是风华少年，正坐在小小的书桌前，如痴如醉地捧读着《不知道的世界》……

陈海燕

2002年6月10日

在知识的长河中注入一点水

记得两年前的某一天，中少社的几位朋友来找我闲聊，说起他们正在策划一部丛书，叫做《十万个不知道》。一听这题目，我说："这个主意好。老跟孩子讲这是这样的，那是那样的，日子久了，孩子们可能会感到乏味的。也得跟孩子讲讲，世界上还有许多不知道的事儿，比已经知道的多得多，而且有趣得多。如果能潜移默化，让孩子们的心里萌发一株不断求知的苗苗，这部丛书就算成功了。"

没想到经过两年的努力，他们已经编成了10本；一个星期前，把最先印得的两本样书给我送来了。丛书改了名称，改成了《不知道的世界》。我看改得好。原来用《十万个不知道》，是受到了《十万个为什么》的启发，从编辑的意图来说，两者是相辅相成的；要是不改，倒像唱对台戏了：我赞成改。这两本样书，一本讲植物，一本讲物理；每本二十几篇，一篇一个主题，推想其他8本也是这个格局。看内容和行文，这部丛书是为初中生和小学生编写的，每一本讲一个方面。以读者已有的知识为基础，讲这一方面最近有了什么新成就，正在研究哪些新课题，将来可能朝哪个方向发展：就这样，把读者领进一个不知道的世界。这个世界无边无垠，多少原先不知道的，现在知道了，却又引发出更多的不知道来。从每一个不知道到知道，都没有现成的道路，道路

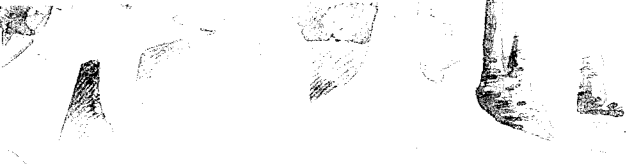
需要人们去探索。在探索中，有的人走通了，有的人碰了壁，也有殊途而同归的，都到达了目的地。在我看到的两本样书中，这样有趣的故事一个接着一个，到了儿也没有说完；留下一大堆不知道，让读者自己去思索。

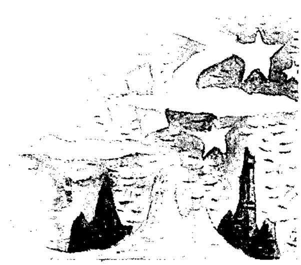
我看照着这个格局编下去，这部丛书会得到成功的。现在的10本，只开了个头。老话说：头开得好就是成功的一半；应该一鼓作气，一本又一本继续往下编：把不知道的世界中的奥秘，一一展现在读者面前，让他们自己挑选将来从哪一个不知道入手，为我们亲爱的祖国做出贡献，在人类知识的长河中，注入一点水。

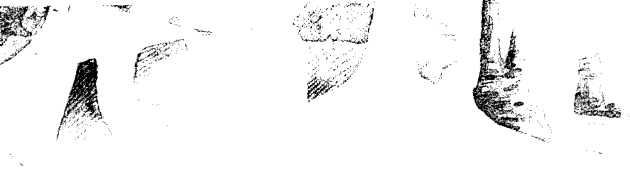
叶至善

1998年5月19日

目 录





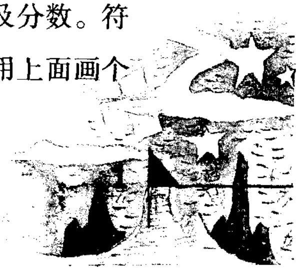


令人迷惑的古埃及分数

你认识、、这些古怪的符号吗？这不是小孩子画的儿童画，而是4000多年前古埃及人写的分数。经数学家考证，这里面有不少学问，也存在着不少疑团需要人们去揭示。事情是这样的：

1858年的一天，苏格兰考古学家兰特在埃及的卢克索尔古玩市场上闲逛时，一本用纸草做成的书吸引了他。“纸草”是尼罗河三角洲出产的一种水生植物，形状像芦苇，晒干剖开压平后，可以当“纸”写字。古埃及的文献主要写在这样的纸草上。兰特买下了这本纸草书。书是长条形的，上面写着密密麻麻的象形会意文字。经研究，此书是4000多年前古埃及的数学文献，作者是阿墨斯，书上有85道实用数学题和解答方法。后来人们把这本纸草书叫做“兰特纸草书”或“阿墨斯纸草书”。此书现在保存在英国的伦敦博物馆里。

人们在“兰特纸草书”上发现了独特的古埃及分数。符号表示$\frac{1}{2}$，表示$\frac{2}{3}$，其余分子为1的分数都用上面画个



○，下面画几个小竖道来表示，比如 表示$\frac{1}{5}$， 表示$\frac{1}{7}$。

分子为 1 的分数叫单分子分数，由于在“兰特纸草书”上发现了这种分数，所以也叫“古埃及分数”。如果分子不是 1 怎么办？古埃及人能巧妙地用古埃及分数来表示。在“兰特纸草书”的第一页就列着一张表，上面列着怎样把分子是 2 的分数用古埃及分数来表示的方法，比如：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$，$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$，$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{214}+\frac{1}{448}+\frac{1}{610}$，$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$等等，一直到$\frac{2}{101}$。

古埃及人为什么如此“偏爱”单分子分数呢？这个问题至今仍是一个未解之谜。有人从实用上来解释这个问题：比如$\frac{7}{8}$用单分子分数表示就是$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$，可以比作 7 个面包 8 个人来平均分配，不但每个人分得的数量一样多，连所分得的块数也一样多。可以这样来分：先把其中的 4 个面包每个切成 2 份，再把 2 个面包每个切成 4 份，最后一个面包切成 8 份，每人拿大、中、小各 1 份就可以了。

但是这种解释有些牵强。古埃及人不会因为分面包分得均匀，而创造出这么复杂的古埃及分数的。况且，单是把分子不是 1 的分数，用单分子分数来表示也不是一件容易的事。

那么古埃及人有没有一套系统地展开古埃及分数的方法呢？现代数学家认为可能没有。因为在他们的有些展开式中，古埃及分数的个数不是最少的。数学家发现，同一个分数用古埃及分数来表示，表达的方式并不是惟一的。比如，$\frac{2}{3}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，因为$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$；又因为$\frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$。沿用这种方法，展式的项数可以无限增加。

数学上把项数最少的展式叫最优展式。“兰特纸草书”上的展式有许多不是最优的，说明古埃及人对用古埃及分数来表示分数还没有形成一整套的方法。

在研究古埃及分数的基础上，近代数学家又提出了一个问题：能不能把一个真分数表示成项数最少、不重复的古埃及分数？他们首先想到把最简单的 1 表示成古埃及分数。

直到 1976 年，数学家才发现把 1 表示为分母都是奇数、而项数又最少的古埃及分数的办法，一共有 5 种，每一种表示法都有 9 项：

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}。$$

这 5 种表示方法中前 6 项都相同。

古埃及人在 4000 多年前就发明并使用了单分子分数，可以肯定地说是他们需要这种分数。在 4000 多年前还谈不上数学研究，数学都是应实际需要而产生，在实际应用中得到发展的。古埃及人为什么要创造出这么复杂的单分子分数呢？

他们的目的究竟何在？

在“兰特纸草书”的第一页就列举了把分子是 2 的分数化成单分子分数的表，他们当时究竟是怎样展开的？用的是什么方法？

如果这些问题能够弄清楚，对了解古代人类如何对待分数、使用分数，都是十分重要的。但是这些问题至今还是一些悬案。

分解 1 遇到的难题

数学家研究问题，并不满足找到一个答案，而是要找到全部答案；并不满足找到其中一种方法，而是要找到普遍适用的方法。

上一篇讲到了把 1 分解成单分子分数之和，这是古埃及分数留给现代人的热门话题，主要研究 3 方面问题：分解的可能性、分解的项数和分母的最大值和最小值。

首先研究把 1 分解成单分子分数的可能性。先来介绍我国数学家柯召教授的工作。也许是受到了 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times3}$ 的启示，1964 年他公布了 1 的一种特殊展开式：

$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$，其中 $1<x_1<x_2<\cdots<x_n$。

这种分解形式的特点是：

1. 每个分数的分母都不相同。

2. 最后一项（也是分母最大的一项）的分母是前 n 项分

母的连乘积。

按照柯召教授的要求，把1分解成2个、3个、4个、5个、6个、7个单分子分数的形式分别是1种、1种、1种、1种、3种、8种。具体表示形式如下：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times3};$$

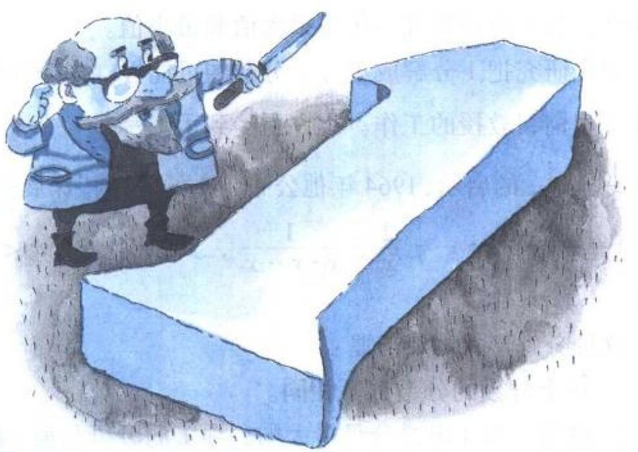
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2\times3\times7};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{2\times3\times7\times43};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\frac{1}{2\times3\times7\times43\times1807};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}+\frac{1}{953}+\frac{1}{2\times3\times7\times47\times953};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{23}+\frac{1}{31}+\frac{1}{2\times3\times11\times23\times31};$$



$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1823}+\frac{1}{193667}+\frac{1}{2\times3\times7\times43\times1823\times193667};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\frac{1}{32633443}+\frac{1}{2\times3\times7\times43\times1807\times32633443};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}+\frac{1}{395}+\frac{1}{779731}+\frac{1}{2\times3\times7\times47\times395\times779731};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}+\frac{1}{403}+\frac{1}{19403}+\frac{1}{2\times3\times7\times47\times403\times19403};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}+\frac{1}{415}+\frac{1}{8111}+\frac{1}{2\times3\times7\times47\times415\times8111};$$

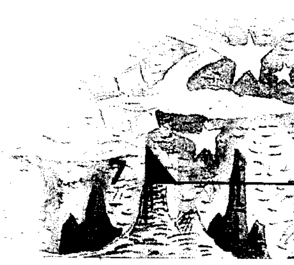
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{47}+\frac{1}{583}+\frac{1}{1223}+\frac{1}{2\times3\times7\times47\times583\times1223};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{55}+\frac{1}{179}+\frac{1}{24323}+\frac{1}{2\times3\times7\times55\times179\times24323};$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{23}+\frac{1}{31}+\frac{1}{47059}+\frac{1}{2\times3\times11\times23\times31\times47059}。$$

柯召教授的分解是一种特殊的分解，那么一般的分解又将如何呢？

1972 年，辛玛斯特得到了如下结果：



将 1 分解成 1 个单分子分数只有一种形式：$1=\frac{1}{1}$；

将 1 分解成 2 个单分子分数也只有一种形式：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$；

将 1 分解成 3 个单分子分数有 3 种形式：$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$；

将 1 分解成 4 个单分子分数可就多了，有 14 种形式；将 1 分解成 5 个单分子分数增加到 147 种形式；将 1 分解成 6 个单分子分数猛增至 3462 种。

辛玛斯特虽然算出了把 1 分解成若干个单分子分数有多少种形式，但是他没有给出分解的一般方法，这个一般方法还有待人们去探求。

其次来研究 1 的分解式中最大分母的最小值是多少。这里要求各分母的值各不相同。

数学家斯达科给出了如下的结果：

把 1 分解成 3 项时，最大分母的最小值是 6，即 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$；

把 1 分解成 4 项时，最大分母的最小值是 12，即 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$；

如果我们用 W_n 表示把 1 分解成 n 个单分子分数最大分母的最小值，则 $W_3=6$，$W_4=12$。

斯达科由 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$，得 $W_5\leq 15$，意思是 W_5 的值不会超过 15。