概率论与数理统计

蒋承仪　陈光蓉
徐安农　陈映萍　编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了概率统计的基本内容，包括随机事件与概率，随机变量及其分布，数字特征，多维随机变量及其分布，抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析，方差分析，还有数学试验的几个实例。

书中列举了许多有启发性的例子，每章附有相当数量的习题，作为巩固和加深所学内容的练习。

本书是按48～60学时的教学计划编写的，工科类各专业可按教学要求适当取舍。本书系统性强，叙述详细且通俗易懂，也可作为需要了解和应用概率统计知识的科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/蒋承仪等编著·一重庆：重庆大学出版社，2002.2

计算机科学与技术专业系列教材

ISBN 7-5624-2337-7

Ⅰ.概... Ⅱ.蒋... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第091627号

概率论与数理统计

蒋承仪 陈光蓉 徐安农 陈映萍 编著

责任编辑 曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

四川自贡新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：9.75 字数：262千

2002年2月第1版 2002年2月第1次印刷

印数：1—5 000

ISBN 7-5624-2337-7/O·193 定价：16.00元

前　言

本书是在参编者经过认真细致的思考、探讨、编写、修改等的辛勤努力下，完成的一本作为高等学校工科、理科（非数学专业）的概率论与数理统计课程的教材。

本书分两大部分，第 1 ~ 4 章是概率论部分，介绍了从数量上研究随机现象统计规律的基本理论；第 5 ~ 8 章是数理统计部分，介绍处理随机性数据的有效的统计推断方法，主要有参数估计，假设检验，方差分析和回归分析等基本内容。

在选材和编写中，力求将基本概念描述清楚，并注意结合这门学科的起源、发展，例举一些有启发性的范例，以激发学生的学习兴趣。为有利于教学，编写中十分注意突出重点，做到既保持理论体系的严谨，又不拘泥于烦琐的证明。在例题及习题的选择上，也力求做到有助于加深对基本概念的理解、启发，并具有趣味性和广泛的应用性。

面对 21 世纪科学技术突飞猛进的发展趋势，计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生能应用概率统计知识并使用计算机来分析处理实际问题的意识和能力，本教材尝试将理论教学和计算机功能的利用相结合，编写了几个数学试验，有随机模型计算机模拟试验，也有应用 Mathematic 软件实现统计分析的科学计算的试验等，这也是本书与其他同类型教材的一点不同之处。我们希望本教材通过这些改进能加深学生对概率论基本理论的理解并能初步掌握使用现代计算技术于统计分析。根据初步的教学实践表明，在概率论与数理统计课中加添实验内容，有助于提高学生的学习兴趣和实际应用能力，改进教学效果。

书末有6个附表供有关内容学习时查用,每章配有习题,书后给出了大部分习题的参考答案。

全书由蒋承仪主持编写与审校,其分工是:第1章及4.4节由陈映萍编写,第2~4章由陈光蓉编写,第5、6章由蒋承仪编写,第7、8章及数学试验由徐安农编写。由于时间仓促,加之编者水平所限,本书纰漏之处在所难免,恳请读者批评,不吝赐教,我们将不甚感激!

编　者

2001年11月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

对自然界及现实生活中的现象进行观察可以发现,它们可分为两类:一类是在一定的条件下必然发生某种结果的现象,称为必然现象或确定性现象.如纯水在一个标准大气压下被加热到100℃时必然沸腾;重物在高处失去支撑的情况下必然垂直落到地面.另一类是在一定的条件下结果的发生有多个可能,且事前无法预料的现象,称为随机现象或偶然现象、不确定现象.如抛掷一枚质地均匀的硬币,其结果可能正面(数字)在上或反面(国徽)在上;从一批产品中任意取出一个产品进行测试,其结果可能是合格品,也可能是不合格品;……这样的例子可以举出很多.随机现象的结果发生具有偶然性,但是在大量的反复观察之后我们发现,结果的发生又具有某种规律性.例如观察新生婴儿的性别,其结果可能是男孩,也可能是女孩.数学家拉普拉斯通过对伦敦、彼德堡、柏林和全法国的新生婴孩性别进行观察,得出男婴出生率为 0.5116.事实说明在纷纭杂乱的大量随机现象的背后,隐藏着必然的规律,称为统计规律.探讨这些规律,并利用这些规律为人类服务是概率论的主要任务.

1.1　随机事件及其概率

1.1.1　随机试验

我们把对自然现象的一次观察或做一个科学试验统称为一次试验.

定义 1.1 若一个试验,满足

1)可以在相同的条件下重复进行;

2)每次试验的结果不止一个,但试验的所有可能结果有哪些在事前是知道的;

3)试验结束前不能确定哪一个结果会发生.

则称这种试验为**随机试验**.

例 1.1 下面的试验哪些是随机试验?

(1)抛掷一枚硬币观察出现的是正面还是反面.

(2)观察汽油遇到火时的情况.

(3)记录某电话传呼台在某段时间内接到的呼叫次数.

(4)测试灯泡厂生产的灯泡的寿命.

(5)一门大炮向目标射击一次,观察弹着点的位置.

(6)抛掷二次硬币观察出现正面的情况.

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)均是随机试验.

1.1.2 随机事件

在随机试验中,可能出现也可能不出现的结果称为**随机事件**.简称为事件,用大写英文字母 A、B、C、…表示.记为:A =“…”或 A 表示“…”.

如在例 1.1(3)中,“没有接到呼叫”,“接到呼叫次数小于 2 次”,“接到奇数次呼叫”等均为随机事件,可令

A =“没有接到呼叫”,

B =“接到呼叫次数小于 2 次”,

C =“接到奇数次呼叫”.

在观察的一段时间里“接到 3 次呼叫”,即表示事件 C 发生.

把不能再分的事件称为**基本事件**.如上面的事件 A.由若干基本事件构成的事件称为**复合事件**.如上面的 B、C.

在随机试验中必然会发生的事件叫做**必然事件**,记为 Ω;一定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.如例 1.1(3)中,设

D =“接到整数次呼叫”,则 D 为必然事件. 设 E =“接到的呼叫次数小于 0”,则 E 为不可能事件.

为了精确描述随机试验与随机事件,引进样本空间与样本点的定义:

称一个随机试验的每一个不能再分的结果为样本点. 用 $\boldsymbol{\omega}$ 表示. 所有 ω 的全体组成的集合称为**样本空间**,记为 $\boldsymbol{\Omega}$. 随机事件是样本空间 Ω 的子集. 只包含一个样本点的子集称为基本事件;包含不止一个样本点的事件称为复合事件;包含 Ω 中所有样本点的子集称为必然事件,不包含 Ω 中任何样本点的子集称为不可能事件.

所谓事件 A 发生,是指在一次试验中,当且仅当 A 中包含的某个样本点发生.

例 1.2 写出例 1.1 中随机试验的样本空间.

解 (1)$\Omega_1 = \{(正面),(反面)\}$.

(3)$\Omega_3 = \{0,1,2,3,\cdots\}$,其中 i 表示接到 i 次呼叫.

(4)$\Omega_4 = \{x \mid x \geqslant 0\}$,其中 x 表示一只灯泡的寿命.

(5)$\Omega_5 = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -x < y < +\infty\}$,其中 x、y 分别表示弹着点的横坐标、纵坐标.

(6)$\Omega_6 = \{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$.

考虑 Ω_3 中的事件:

A =“没有接到呼叫” = $\{0\}$

B =“接到的呼叫次数小于 2 次” = $\{0,1\}$,

C =“接到奇数次呼叫” = $\{1,3,5,\cdots\}$,

D =“接到整数次呼叫” = $\{0,1,2,3,\cdots\}$,

E =“接到的呼叫次数小于 0” = $\boldsymbol{\varnothing}$.

1.1.3 事件的关系与运算

定义 1.2 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含在事件 B 中,或称事件 B 包含了事件 A. 记为 $A \subset B$. 也称 A

是 B 的**子事件**.

用样本点表示为:对 Ω 中的样本 ω,当 $\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$,则 $A\subset B$.

定义 1.3 若事件 A 是事件 B 的子事件,同时,事件 B 也是事件 A 的子事件,则称事件 A 与事件 B **等价**,也称事件 A 与事件 B 相等.记为 $A=B$,即

$$A=B\Leftrightarrow A\subset B \text{ 且 } B\subset A$$

定义 1.4 "事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**并**(**或和**).记为 $A\cup B$.即

$$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B,\omega\in\Omega\}$$

事件的并可以推广到有限或可列无穷多个事件的并:

$A_1\cup\cdots\cup A_n$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 表示事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

定义 1.5 "事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**(**或乘积**),记为 $A\cap B$ 或 AB.即

$$AB=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B,\omega\in\Omega\}$$

同样,事件的交可以推广到有限或可列无穷多个事件的交,仿照定义 1.4,由读者自己写出.

定义 1.6 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B **互不相容**(简称为**互斥**).即

$$A \text{ 与 } B \text{ 互斥}\Leftrightarrow AB=\varnothing$$

定义 1.7 "事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**,记为 $A-B$.即

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 但 } \omega\notin B,\omega\in\Omega\}$$

定义 1.8 设 A 为一个事件,"A 不发生",这一事件称为事件

A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$. 即

$$\overline{A}=\{\omega \mid \omega \notin A, \omega \in \Omega\}$$

显然,$A \cup \overline{A}=\Omega$, $A \cap \overline{A}=\varnothing$. 一般地

若事件 A 与 B 满足: $A \cup B=\Omega$, $A \cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 由定义 1.8 知此时, $A=\overline{B}$, $B=\overline{A}$.

对事件的关系与运算可直观地用文氏图表示(见图 1.1).

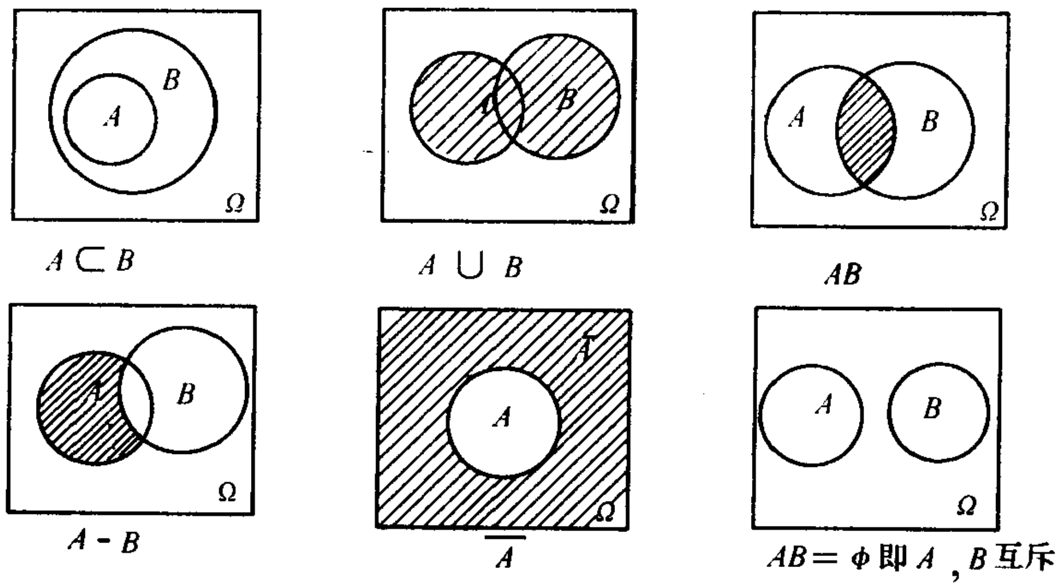

图 1.1 事件关系图

例 1.3 掷一枚骰子,观察出现的点数. 设事件 A =“出现奇数点”,事件 B =“出现的点数不小于 4”,事件 C =“出现大于 3 的偶数点”,则

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,3,5\}$

$B=\{4,5,6\}$

$C=\{4,6\}$

则 $\overline{A}=\{2,4,6\}$ =“出现偶数点”

$\overline{B}=\{1,2,3\}$ =“出现小于 4 的点数”

$A \cap B=\{5\}$ =“出现点数 5”

$A \cup B=\{1,3,4,5,6\}$ =“出现点数为 2 以外的所有点数”

$A-B=\{1,3\}=$"出现不大于 4 的奇数点"$=A\overline{B}$

$B-A=\{4,6\}=$"出现不小于 4 的偶数点"$=B\overline{A}$

由 $AC=\varnothing$,知 A 与 C 互不相容.

$C\subset B$.

在进行事件运算时,常用到下面的性质:

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$

(2)结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3)分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(4)De Morgen 律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

一般地 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

(5)差化积 $A-B=A\overline{B}$

(6)吸收律 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$ $A\cap B=A$

例 1.4 设 A、B、C 为三个随机事件,试以 A、B、C 的运算表示下列事件:

(1)A 发生;

(2)仅有 A 发生;

(3)A、B、C 仅有一个发生;

(4)A、B、C 至少有一个发生;

(5)A、B、C 至多有一个发生.

解 (1)A 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup ABC$

(2)$A\overline{B}\,\overline{C}$

(3)$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

(4)$A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

例 1.5 证明 $A-B=A-AB$

证 由运算律

$$\text{右边}=A-AB=A\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=$$
$$\varnothing\cup A\overline{B}=A\overline{B}=A-B=\text{左边}.$$

故等式成立.

1.1.4 频率与概率

由前面知,随机现象其结果的发生具有偶然性,但在大量试验中又呈现出某种规律.为了找出这种规律,可以在同样的条件下进行反复试验,对每次试验都可以记录下我们所关心的事件(假设为 A)是否发生.

定义 1.9 在 n 次重复试验中,事件 A 恰好发生 n_A 次,则称此值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

显然,此一值 $\frac{n_A}{n}$ 越大,表示事件 A 发生越频繁,即事件 A 发生的可能性越大.

历史上有不少人曾做过抛掷硬币的试验,其结果如表 1.1 所示.

表 1.1

实验人	n	n_A	n_A/n
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
卡皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
卡皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.1 数据看出,抛掷次数越多,频率越接近于 0.5.由此说明,事件 A 的频率随着 n 的增大会逐步地稳定于一个数 p,此即频率的稳定性.

定义 1.10 随着试验次数的增大,事件 A 的频率所稳定的数

p 称为事件 A 的**概率**.记为

$$P(A)=p.$$

此定义被叫做概率的统计定义.

由定义 1.10 知,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 当试验次数 n 很大时,可以作为其概率 $P(A)$ 的近似值.即

$$P(A)\approx\frac{n_A}{n}$$

从而可知,事件 A 的概率反映了事件 A 发生的可能性的大小.

由频率的定义有:

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$,其中 A 为任一事件

2° $f_n(\Omega)=1$

3° 若 $AB=\varnothing$,则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$

因而事件的概率有如下性质:

1° 对任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$ (非负性)

2° $P(\Omega)=1$ (规范性)

3° $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \quad \text{(可加性)}$$

1.1.5 古典概率与几何概率

1. 古典概率

在概率论发展初期,人们研究较多的一类概率模型目前应用也相当广泛.这种模型称为古典概型.

定义 1.11 设一个随机试验满足

1)样本空间包含有限个样本点.即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

2)每个样本点构成的基本事件发生是等可能的.即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

则称此试验为古典概型试验.简称为**古典概型**.

在古典概型试验中，设样本空间的样本点数为 n，任一事件 A 包含的样本点数为 m，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\Omega\text{ 包含的样本点数}} \tag{1.1}$$

概率论发展初期人们曾以公式(1.1)作为事件概率的定义，故而称为概率的古典定义.

利用公式(1.1)可以计算古典概型试验中事件的概率.

例 1.6 抛掷一枚骰子，求出现点数大于 4 的概率.

解 显然，试验为古典概型. 由题意

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

即 Ω 中的样本点数为 6. 设 $A=$“出现点数大于 4”，则 $A=\{5,6\}$，可见 A 中的样本点数为 2. 从而

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

从例 1.6 看到，要求事件的概率，并不需要知道样本空间及事件 A 包含哪些样本点，而只需知道有几个样本点即可.

例 1.7 在一口箱中装有 100 个同类产品，其中有 3 个次品，从箱中不放回地任意抽取 5 个产品，求：

(1)取出的 5 个产品中恰有一个次品的概率；

(2)取出的 5 个产品无次品的概率.

分析：显然是古典概型问题. 由于所求概率对应的事件均只关心抽出的 5 个产品中的次品个数，并不关心是哪几次抽到的次品. 故计算样本点数目时可考虑用组合数来计算.

解 设事件 $A=$“取出的 5 个产品中恰有一个次品”

事件 $B=$“取出的 5 个产品无次品”

(1)从 100 个产品中任取 5 个产品，共有 C_{100}^5 种不同的取法，即样本点总数 $n=C_{100}^5$. 要使 A 发生，可分为两个步骤来完成：第一步，从 3 个次品中任取一个，有 C_3^1 种不同的取法；第二步，从 97 个正品中取出 4 个，有 C_{97}^4 种不同的取法，当两个步骤都完成了，则

事件 A 即发生.由乘法原理,A 包含的样本点数为 $C_3^1 \cdot C_{97}^4$.这样

$$P(A)=\frac{C_3^1 \cdot C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.138$$

(2)样本点总数为 C_{100}^5,B 包含的样本点数 $m=C_{97}^5$,故

$$P(B)=\frac{C_{97}^5}{C_{100}^5}\approx 0.856$$

例 1.8 从 1,2,…,6 这 6 个数字中等可能地有放回地连续抽取 4 个数字,求:(1)取到的 4 个数字完全不同的概率;(2)取到的数字不含 1 和 5 的概率.

分析:本问题为古典概型.因为是有放回地连续抽取,故应用有重复的排列进行计算.

解 设 A =“取出的 4 个数字完全不同”

B =“取出的数字不含 1 和 5”

样本空间中样本点总数 $n=6^4$

事件 A 包含的样本点数 $m_1=P_6^4$

事件 B 包含的样本点数 $m_2=4^4$

故 (1) $P(A)=\dfrac{P_6^4}{6^4}=\dfrac{5}{18}$

(2) $P(B)=\dfrac{4^4}{6^4}=\dfrac{16}{81}$

例 1.9 设有 a、b、c、d、e 五人随意站成一排照相,求:(1) a 和 b 两人相邻且 a 在 b 的右边的概率;(2) a 和 b 两人相邻的概率.

分析:本问题为古典概型.五个人的顺序不同,对应于不同的样本点,故应用排列数计算.

解 设 A =“a 和 b 相邻且 a 在 b 的右边”

B =“a 和 b 相邻”

五个人站成一排,所有不同的站法有 $n=5!$ 种.

(1)因 a 与 b 相邻且 a 在 b 右边,故可将 ab 看成一个整体,并

与 c,d,e 一起形成四个整体,共有4! 种不同站法.即 $m=4!$.故

$$P(A)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

(2)因 a 与 b 只要求相邻,不管顺序,故有两种不同站法.同样将 a 与 b 看成一个整体后有四个整体,有4! 种不同站法.即 $m=2\times4!$,故

$$P(B)=\frac{2\times4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

2. 几何概率

定义 1.12 若随机试验满足

1)试验的所有结果为无穷多个,且布满某个区域(或区间);

2)每个结果的发生是等可能的.

则称此试验为几何概率模型试验.简称为**几何概型**.

若设样本空间 Ω 的几何测度(即区间的长度、平面区域的面积、空间区域的体积等)为 $\mu(\Omega)$,事件 A 的几何测度为 $\mu(A)$,则仿古典概率的定义方法有

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}} \tag{1.2}$$

称公式(1.2)为概率的几何定义.

例 1.10 长途汽车站每隔30分钟有一辆汽车开出,乘客在不知发车时间的情况下在任何时刻到达汽车站是等可能的,求该旅客候车时间不超过10分钟的概率.

解 这是一个几何概率问题.设 $A=$"该旅客候车时间不超过10分钟".又设 x 表示乘客的候车时间,于是

$$\Omega=\{x\mid 0\leqslant x<30\},\mu(\Omega)=30$$
$$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 10\},\mu(A)=10$$

故

$$P(A)=\frac{\text{区间}[0,10]\text{的长度 }\mu(A)}{\text{区间}[0,30]\text{的长度 }\mu(\Omega)}=\frac{1}{3}\approx0.33$$

例 1.11 在时间间隔 $[0,T]$ 内的任何瞬间,两个不相关的信