高等学校教材

工程数学

线性代数

第三版

上海交通大学线性代数编写组 编

高等教育出版社

〔京〕112号

本书第三版由沈黛云、杨绮玉、陈大新等同志参照1987年高等学校工科数学课程教学指导委员会审订的、经国家教委批准的《线性代数课程教学基本要求》修改而成的. 全书篇幅不大，内容适当，概念清晰，条理分明. 少量超过基本要求部分仍用小号字排印，使课时掌握上有一定的灵活性.

特征值与特征向量是线性代数的重要的概念之一，修订时另辟一章(矩阵与对角矩阵相似问题)，着重讨论其初步性质. 全书内容分为行列式及其性质、向量空间、线性变换与矩阵、矩阵的秩与线性方程组、矩阵与对角矩阵相似问题、内积与正交变换、二次型等七章，书末还有习题答案，便于教学.

本书可作为高等工业学校各专业的教材. 也可供工程技术人员自学之用.

本书修订时得到孙增光教授亲切指导。

责任编辑　丁鹤龄

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：线性代数/上海交通大学线性代数编写组编.3版.－北京：高等教育出版社，1991.4(1998重印)
ISBN 7-04-002672-4

Ⅰ.工…　Ⅱ.上…　Ⅲ.①工程数学-高等教育-教材②线性代数-高等教育-教材　Ⅳ.①TB11②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第00524号

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
天津新华印刷一厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 7.5　字数 190 000
1978年10月第1版　1991年4月3版　1998年3月第8次印刷
印数　96 211－107 221
定价　7.10元

第三版前言

自一九八二年第二版以来，高等工业院校的线性代数课程经历了较大的变化．主要表现在线性代数的教学内容在深度与广度都有较大的提高．针对这种情况，我们再次查阅了 1987年高等学校工科数学课 程教学指导委员会制订的《线性代数课程教学基本要求》，在这版中相应作了下面几处修改：

一、特征值与特征向量是线性代数最重要的概念之一．原书的处理显得较为薄弱．这次特辟“矩阵与对角矩阵相似问题”一章，主要是讨论特征值与特征向量的初步性质．

二、矩阵的乘法是矩阵的重要运算．它有多种含义，我们认为下面两种是主要的：一种是线性变换的相继施行；另一种便是由向量的线性组合去理解矩阵的乘法．它对于线性代数一些基本定理的理解与计算常带来方便．这次我们增加一节专谈这方面的内容．

三、加强初等变换的应用．矩阵的初等变换是线性代数最基础的方法．不仅计算需要它，而且在一些定理的证明中亦要用到它．这次增加了矩阵方程 $AX=B$ 的求解，求生成子空间的基，以及坐标计算．这样做，希望能帮助学生了解矩阵初等变换的重要性．

除了以上三点较重要的修改外．对第二版某些简略的地方，习题、例题都有些修改，目的是为了教师和学生使用起来更方便．但教材的工作是很细致的，甚至可说是无止境的，虽经反复讨论修改，但总有不足之处，望使用的同志继续向我们提出宝贵的意见．

上海交通大学应用数学系

线性代数　编写组

一九八九年七月

目　录

第一章　行列式及其性质

行列式是为了求解线性方程组而引入的．在解较低阶的线性方程组或一些特殊的线性方程组时，行列式是很有效的．另外，在线性代数和其它数学领域以及工程技术中，行列式是一个重要的工具．本章在复习二阶、三阶行列式的基础上将行列式的概念和解二元、三元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则推广到一般的情况．

§1　二阶与三阶行列式

在初等代数中，已由解线性方程组问题引出了二阶与三阶行列式．它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,, \tag{2}$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数．

利用二阶与三阶行列式，可以把二元与三元线性方程组的解表达为简洁的形式．

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1\,, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，\text{又设 } D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D_1 与 D_2 分别是在 D 中把第一列与第二列元素换成(3)式中的常数项得到的. 则当 $D\neq 0$ 时，方程组(3)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \qquad y=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

同样，设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \text{又设 } D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D_1，D_2，D_3 分别是在 D 中把第一列，第二列，第三列元素换成(5)式中的常数项得到的，则当 $D\neq 0$ 时，方程组(5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \qquad y=\frac{D_2}{D}, \qquad z=\frac{D_3}{D}. \tag{6}$$

这就是解二元与三元方程组(3)与(5)的克莱姆法则.

如果把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行列互换而不改变各行、各列的顺序，得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫做行列式 D 的转置行列式.

利用二、三阶行列式的展开式，容易得出下面八个性质.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

性质 3　把一个行列式的某行(列)的所有元素乘上某数 k，等于用 k 乘行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式中有两行(列)的对应元素相等，则行列式等于零.

性质 5　如果行列式的某行(列)的各元素是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

在三阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列的元素，余下的元素构成的一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 我们把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 例如在三阶行列式(2)中元素 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 7 行列式 D 中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式. 即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik}= D,\ i= 1, 2, 3; \qquad (7)$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj}=D, j=1,2,3. \tag{8}$$

(7)式与(8)式分别叫做行列式 D 按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式.

性质 8 在行列式 D 中，任一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=0, i\neq j, i,j=1,2,3; \tag{9}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=0, i\neq j, i,j=1,2,3. \tag{10}$$

(7)式与(9)式及(8)式与(10)式可分别合并为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}0, i\neq j;\\ D, i=j.\end{cases} \quad i,j=1,2,3;$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}0, i\neq j;\\ D, i=j.\end{cases} \quad i,j=1,2,3.$$

§2 高阶行列式

前面我们利用行列式表示了二元、三元线性方程组的解——克莱姆法则. 这使人会想到，对于任意的 n 元线性方程组能否有类似的公式? 为此，首先将二阶和三阶行列式类推到 n 阶行列式，并研究它的性质. 最后将它应用到求解 n 元的线性方程组中去.

一、n 阶行列式的定义

我们来观察三阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}
$$

$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (11)
$$

中每一项构成的规律.

首先注意(11)式右端的每一项为三个元素的乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$，并带有一定的符号. 这三个元素的第一个下标分别为 1, 2, 3, 这说明了在行列式的每一行中各取一个元素相乘. 由于数的乘法满足交换律，所以这里元素可按行的自然顺序(从小至大的顺序)排列. 这样，我们只须将注意力集中在第二个下标 j, k, l 的变化上，下面我们写出各项中第二个下标的排列

$$
(123), \qquad (312), \qquad (231); \qquad (12)
$$

$$
(321), \qquad (132), \qquad (213). \qquad (13)
$$

它们恰好是 1, 2, 3 的所有全排列. 这说明从三个行中所取的元素是取自各个不同的列，也就是说，各项的乘积是由每一行，每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的. 对于 1, 2, 3 的每一个全排列 j, k, l. 对应有一乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$. 1, 2, 3 一共有六个全排列，所以三阶行列式一共有六项. 如(11)式的右边所示.

其次分析各项所带的符号. 由于各项的第一个下标都按自然顺序排列. 所以各项所带符号只与第二个下标的排列有关. 为了说明其中的关系，下面引进逆序数的概念.

定义 1　如在1, 2, $\cdots$, n 的一个全排列(称为 n 级排列)($s_1s_2\cdots s_n$)中，有 $i<j$ 时 $s_i>s_j$，这时 s_i, s_j 违反了自然顺序，就说它们构成了一个逆序. 排列 ($s_1s_2\cdots s_n$)中逆序的总数称为该排列的 逆序数.

由此可知，排列($s_1s_2\cdots s_n$)的逆序数 =(s_1 后面比 s_1 小的数字的个数)+(s_2 后面比 s_2 小的数字的个数)+ $\cdots$ +(s_{n-1} 后面

比 s_{n-1} 小的数字的个数).

例如在排列(34152)中，3后面有两个数比3小，4后面也有两个数比4小，5后面有一个数比5小，故

$$(34152)\text{的逆序数} = 2+2+1=5.$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列，否则称为奇排列. 读者容易验证(12)式中的排列都是偶排列，(13)式中的排列都是奇排列. 于是不难看出(11)式中各项所带的符号可以看成是由第二个下标排列(jkl)的奇偶性决定的. (jkl)是偶排列的项带正号；(jkl)是奇排列的项带负号. 如用J表示排列(jkl)的逆序数，则各项所带的符号为$(-1)^J$.

于是三阶行列式的定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j} a_{2k} a_{3l}, \tag{14}$$

其中J为排列(jkl)的逆序数，"$\sum$"是对所有三级排列(jkl)求和.

读者不难验证二阶行列式的定义也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j} a_{2k}, \tag{15}$$

其中J为排列(jk)的逆序数，"$\sum$"是对所有二级排列(jk)求和. 由于二级排列只有一个偶排列(12)和一个奇排列(21)，故二阶行列式只有两项，一项带正号，一项带负号.

至此，我们可以把行列式的概念推广到n阶.

定义 2　设有n^2个数，排列成n行n列如下：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{16}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数（称为元素）．今在每一行中取出一个数，并且要求取出的 n 个数都在不同的列上．把所取元素的行数按自然顺序排列，相应的列数设为 $j_1j_2\cdots j_n$．作出这 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，然后按第二个下标排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性，将乘积乘以 $+1$ 或 -1. 如 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶排列则乘以 $+1$，否则乘以 -1. 如把 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 的逆序数记作 J，则各乘积所带的符号为 $(-1)^J$，然后对所有 n 级排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 求和，这个和数称为与(16)式中数表相应的 n 阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (17)$$

其中“$\sum$”是对所有 n 级排列求和.

行列式(17)也可简记为 $|a_{ij}|$. 显然(14)式与(15)式是(17)式中 n 等于 3 与 2 的特例.

为了证明行列式的性质，先讲两个定理.

定理 1　一排列中的任两个数调换，它的逆序数变更奇偶性.

证　先考虑调换相邻两数的情况．设排列为 $PabQ$, P 表 a 前的 p 个数，Q 表 b 后的 q 个数．调换相邻两数 a、b 为 $PbaQ$，经过调换，显然在原排列中除了 a、b 两数的顺序改变外，其他任意两数的顺序并没有变．若 a、b 原为自然顺序，经调换后，a、b 两数将构成逆序．因此排列的逆序数增加 1. 反之，若 a、b 原构成逆序，经调换后，则成为自然顺序，于是排列的逆序数就减少 1. 故调换 a、b 改变 $PabQ$ 逆序数的奇偶性.

再考虑调换排列中任意两数的情况．设排列为 $PaQbR$, Q 表 a、b 两数间的 q 个数，R 表 b 后的 r 个数．今用下面的方法调换 a、b. 先把 $PaQbR$ 调换成 $PQabR$，要作 q 次相邻两数的调换；再把 $PQabR$ 调换成 $PbQaR$，要作 $q+1$ 次相邻两数的调换，一共调换了 $2q+1$ 次，所以 a、b 换位改变了逆序数的奇偶性.▌

我们知道，在二阶行列式中，有一项带正号，一项带负号；在三阶行列式中，则有三项带正号，三项带负号．一般地，在 n 阶行列式 $(n>1)$ 中也恰有 $\frac{n!}{2}$ 项带正号，$\frac{n!}{2}$ 项带负号．按行列式的定义，只需证明在 $n!$ 个 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中，有一半是偶排列，一半是奇排列．这可利用定理 1 证得．

事实上，在所有 n 级排列中，将最前面两个数字调换位置．如果 $i_1 i_2\cdots i_n$ 为偶排列，则调换后即为奇排列．而且对于不同的偶排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 与 $i_1' i_2'\cdots i_n'$ 在最前面的两数调换后，得到的奇排列 $i_2 i_1 i_3\cdots i_n$ 与 $i_2' i_1' i_3'\cdots i_n'$ 也不相同，因此奇排列的个数应不小于偶排列的个数．同理，偶排列的个数也不小于奇排列的个数，所以两者个数相等．

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中 n 个元素的顺序也可以任意交换．例如在 4 阶行列式中，乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 也可写成 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$．一般地，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可交换因子顺序成为 $a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}$，其中 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 都是 n 级排列．

定理 2　n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda},$$

其中 S 与 T 分别为 n 级排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数．

证　该项任意二元素互换，两个下标也同时调换，由定理 1 知排列 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 与 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 的逆序数将同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性仍旧不变．如果将行的排列顺序 $\alpha'\beta'\cdots\lambda'$ 调换为按自然顺序 $12\cdots n$ 的排列（它的逆序数为 0），而列的排列 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 随之变换为 $j_1j_2\cdots j_n$（它的逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^{J}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.\quad\blacksquare$$

例如乘积 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$ 是 4 阶行列式中的一项，排列 3241 的逆序数 $S=4$，排列 1342 的逆序数 $T=2$，$S+T=6$ 所以该项带正号．

如果将行列式中各项的第二个下标按自然顺序排列，相应的第一个下标排列记作 $i_1i_2\cdots i_n$，于是由定理 2，行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} , \quad (18)$$

其中 I 为排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数，“$\sum$”为对所有第一个下标排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 求和.

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} .$$

解 这是一个四阶行列式，在展开式中应有 $4! = 24$ 项，但在每一项的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于 0，乘积就为 0，所以只要计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 4 行除了 a_{44} 外都为 0，故只须考虑 $j_4 = 4$ 的项. 第三行中除了 a_{33}，a_{34} 外都是 0，现已取 $j_4 = 4$，所以必须取 $j_3 = 3$. 同理只能取 $j_2 = 2, j_1 = 1$. 就是说行列式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1234 的逆序数为 0，所以这一项所带的符号是正的，因此该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

在行列式中，从左上角到右下角的直线叫做主对角线. 例 1 的行列式中，主对角线以下的元素均为 0（即当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$），这种行列式叫做上三角形行列式. 它等于主对角线上各元素的乘积.

同样，主对角线以上的元素均为 0（即当 $i < j$ 时，$a_{ij} = 0$）的行列式叫做下三角形行列式. 同理可证它也等于主对角线上各元

素的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} .$$

作为三角形行列式的特例，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1d_2d_3d_4 ,$$

在这个行列式中，除了主对角线上的元素外，其他元素均为 0，这种行列式叫做对角形行列式.

同理，读者可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} .$$

但是我们知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{12}a_{21} , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} ,$$

一般地，有