

力学参考资料 (13)

断裂力学

(四)

科学技术文献出版社重庆分社

1980

129



力学参考资料 (13) **断裂力学**(第四集)

中国科学技术情报研究所重庆分所	编 辑
科学技术文献出版社重庆分社	出 版
重庆市市中区胜利路 91 号	
新华书店重庆发行所	发 行
重 庆 印 制 第 一 厂	印 刷

开本: 787×1092毫米 1/16 印张9.75 字数25万
1980年7月第一版 1980年7月第一次印刷
科技新书目: 167—224 印数: 5700

统一书号: 13176·70

定价: 1.05元

目 录

现状和发展前景

弹塑性断裂力学的现状和前景.....	(1)
现在的“断裂力学”的缺点及新断裂学的介绍 (I)	
.....	(34)
现在的“断裂力学”的缺点及新断裂学的介绍 (II)	
.....	(40)
J _{IC} 试验方法的新进展	(47)

应 用

工程断裂力学在评价大型转子断裂强度中	
的应用与发展 (综述)	(61)
断裂力学在防止使用期间破坏方面的应用	(79)
断裂力学在选择铝合金中的应用	(91)
结构强度和断裂力学的应用	(102)
J-积分在热应力裂纹问题中的应用	(107)

断裂准则及其研究方法

研究复杂加载条件和复杂应力状态下的断裂	
准则的某些方法问题	(115)
计及残余微应力功的疲劳断裂准则	(119)
纤维加筋混凝土J-积分断裂准则	(126)
日本焊接工程学会按脆性破坏观点的缺陷评定标	
准概貌和一些事例的研究	(134)

试验标准

英国裂纹张开位移 (COD) 试验方法 (标准)	
(BS-5762:1979)	(143)

弹塑性断裂力学的现状和前景(1)

——以J积分为中心——

大路清嗣, 小仓敬二, 久保司郎

1. 前言

在论述本题之前, 首先就构成主题背景的断裂力学的全部基本观点作如下简要叙述。

1.1 断裂力学的本质是什么?

断裂力学是研究含裂纹物体断裂的一个力学体系。由于该体系在断裂工程学方面的使用价值大, 因而当今受到极大的重视和期待, 那么, 构成该体系的中心的观点的特征究竟是什么? 一言以蔽之, 其特征就是: 只用一个力学参数就能够代表裂纹顶端附近的力学信息——若咎其根本, 即应力、应变场的情况。换言之, 断裂力学的特征是使上述裂纹顶端的力学信息的单一参数表示成为可能的合理的“裂纹力学”, 而对断裂这一现象的科学的探讨本身不一定是最主要的特征。毫无疑问, 为了使以所采用的力学参数为中心而构成的断裂力学的手法在工程学方面行之有效, 必须满足下列条件: (1) 用单一参数表示裂纹顶端附近的力学信息; (2) 作为与其相应的材料方面的条件, 裂纹的扩展在裂纹顶端的位置中连续发生; (3) 能够用这样的参数来表示或记述的、用材料实验能够确定的材料特性应作为物理的实体而实际存在; (4) 通过解析能够确定新采用的参数。

1.2 线性断裂力学与小范围屈服

目前广泛应用的线性断裂力学是以所谓“裂纹力学”为基础的, 它们把存在于线弹性体中的裂纹顶端附近的应力, 用原点于裂纹顶端的 (r, θ) 座标展开级数, 在所获得的应力分量 $A_n r^{(n-1)/2} h_{ij}^n(\theta)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 之中, 取最低次 ($n=0$) 项, 即用 $r \rightarrow 0$ 而变为无穷大的奇异应力分量。

$$\sigma_{ij} = A_0 r^{-1/2} h_{ij}^0(\theta) \equiv K f_{ij}(\theta) / \sqrt{2\pi r} \quad (1)$$

来近似。式中 $f_{ij}(\theta)$ 是确定应力的 θ 方向分布的固有函数, K 为应力强度因子, 是用弹性体的几何学条件和加载条件确定的系数。由(1)式可知, 在这种情况下裂纹顶端附近的应力和应变, 与 r 和 θ 相应, 有其固有的分布形状, 其大小取决于 K , 且形成“场”。我们把这种“场”称之为奇异应力场, K 则是表示奇异应力场强度的因子。只要给定了应力强度因子 K , 则裂纹顶端附近的应力, 甚至包括其分布也就完全可以确定, 用 K 就满足了上述单一参数表示的条件。若物体是线弹性体, K 不仅能代表应力和应变, 而且还能代表裂纹顶端附近的一切力学信息, 这是不言而喻的。

能够代表裂纹顶端附近的力学信息的力学参数, 从上述已知, 不仅限于 K 。例如, 自 Griffith 的脆性 (不稳定) 断裂理论以来^[1], 在规定了材料的力学状态中经常应用

的能量释放率 G ，如以I型断裂为例，将材料常数 E ， ν 介入后，它与 K 之间有着

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= K_1^2/E && (\text{平面应力}) \\ G_1 &= (1-\nu^2)K_1^2/E && (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} (2)$$

的关系。除能量释放率这一实质外， G_1 在裂纹顶端附近同时具有支配应力、应变的代表值这一性质。下述小范围屈服下的塑性区尺寸和裂纹顶端的张开位移（CTOD）也具有同样的性质。

在裂纹顶端附近奇异应力场会产生非常高的应力，而在实际的材料中在裂纹顶端附近一定会产生塑性区，但是，如果这个塑性区的尺寸比物体的代表性尺寸（例如，裂纹长度、从裂纹顶端至邻接裂纹和自由表面的尺寸、宽度、长度等等）小得多的话，塑性区附近的弹性应力及应变仍然受上述奇异应力的支配。这种状态叫做小范围屈服，是线性断裂力学适用的可能范围。

小范围屈服，对有限尺寸的物体来说在理论上是无限小的塑性区（实际上对物体的代表性尺寸来说则是极小的塑性区）才成立，反之，对有限尺寸的塑性区来说是无限大的物体（而实际上是比塑性区尺寸大得多的物体）而成立的。

1.3 何谓弹塑性断裂力学？

如果在有限尺寸的试件中裂纹顶端的塑性区的尺寸在理论上是有限值，而实际上与试件尺寸相比超过了某一不能忽视的尺寸，则裂纹顶端附近的应力、应变已经不是在线性断裂力学上所导出的奇异应力场了，因此它不能用应力强度系数代表，为了记述这个区域的裂纹顶端附近的应力、应变状态，考虑材料的弹塑性的其他的模型化是必要的。和线性断裂力学类似的这种研究法就叫做弹塑性断裂力学或者叫做非线性断裂力学。

与支配裂纹顶端附近的应力、应变的（最低次的次数的）奇异应力场相近似的这

种模型在弹塑性断裂力学中也是有效的。微小变形理论下的主要塑性区的本构式可用下式近似时

$$\sigma/\sigma_0 = (\epsilon/\epsilon_0)^N, \quad \epsilon > \epsilon_0 \quad (3)$$

裂纹顶端附近起支配作用的奇异应力就能用下式^[2-4]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= K_\sigma r^{-N/(N+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \epsilon_{ij} &= K_\epsilon r^{-1/(N+1)} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \end{aligned} \right\} (4)$$

表示。式中 $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ 及 $\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta)$ 是表示塑性奇异应力场的 θ 分布的固有函数， K_σ 是塑性的应力强度因子， K_ϵ 是塑性的应变强度系数，是与线性断裂力学中应力强度因子 K 相当的量。 K_σ 和 K_ϵ 则构成 $K_\sigma/\sigma_0 = (K_\epsilon/\epsilon_0)^N$ 的函数关系。

在弹塑性断裂力学中奇异应力场近似的情况下，也可以与线性断裂力学中的小范围屈服作同样的考虑，即，如后面将要论述的那样，由于应力和应变在裂纹顶端附近集中，会局部地产生空隙和微裂纹，存在着极不均匀的断裂进行区，如果该区域的尺寸比物体的代表性尺寸及塑性区的代表性尺寸小得多的话，用弹塑性奇异应力就能代表断裂进行区外部的应力和应变。

如同线性断裂力学中的 K 那样，目前在弹塑性断裂力学中一般不用 K_ϵ （或者 K_σ ）作裂纹顶端附近的力学信息的代表值，因为 K 是只根据荷载和形状确定的，而 K_σ （或者 K_ϵ ）除此之外还将受本构式、平面应力、平面应变状态等的影响，从而造成解析上的困难。

在弹塑性断裂力学中，由于塑性变形引起能量消散，所以线性断裂力学中能量释放率的研究现在尚未获得显著成效，有许多问题也还没有弄清。不论其将来发展如何，就目前的观点来看，能够从这些方面构成裂纹顶端附近的应力、应变的代表值的恰当的量尚未找到。

那么，在弹塑性断裂力学中究竟用什么量作裂纹顶端附近的力学信息的代表值呢？

其答案就是 J 积分。

随线弹性体的裂纹扩展而增大的能量释放率 G 与应力强度因子具有一一对应关系。对 G 同时具有作为裂纹顶端附近的应力、应变的代表值这一特性已经作了叙述,故在此不作详细论述,但是,如果考虑求 G 和 K 的关系的过程,那末即使在弹塑性体的条件下,也将其材料假设为非线性弹性体*。如果对材料定义相当于随裂纹扩展的假设的能量释放率的量,那末就能很容易地推测该量有可能成为代表弹塑性区中裂纹顶端附近奇异应力场的量。并且,只要形式上是相当于能量释放率的量,若选择单纯的条件,即使不加解析,用实验就能确定这个量,这一点根据线性断裂力学中 G 的性质就能很容易推断。 J 积分作为弹塑性断裂力学的参数,至少在实用性方面受到注视,其原因有两点:它有着下述的积分路线的独立性以及表达上的优点。

J 积分,如下一章所述,能够用能量线积分的状态对弹性体(与线性、非线性、全应变塑性体等价)下定义,具有积分路线独立性,是与系统的势能释放率相当的量。如上面所进行的推测那样,它具有在裂纹顶端附近构成支配奇异应力场强度的代表值的性质,在某种单纯的条件,在不引起卸载(裂纹不扩展)等的制约下,还具有能够用荷载-位移曲线在实验上表达该值的优点。由于有上述优点,所以在弹塑性断裂力学中,能代替 K 。作为代表奇异应力场的参数而受到注目**。本文以 J 积分为中心论述弹塑性断裂力学的现状和前景。

最后,就目前的线性断裂力学与弹塑性断裂力学的关系扼要地叙述如下。线性断裂力学的应用能够改变成最终实现小范围屈服的条件来加以论述。虽然在有限物体的无限小的塑性区域或者在相对于有限塑性区的无限大的物体中能够实现小范围屈服,但是,从工程学的观点来看,后者是会出现问题的。例如,日常广泛使用中的乃至低强度高

韧性材料在断裂之前,在裂纹顶端附近一定不会产生大的塑性区。如果要从线性断裂力学上来鉴定这种材料的断裂韧性,就需要很大的试件和大容量的试验装置。如果断裂只是受裂纹顶端力学状态的支配,则根据弹塑奇异应力对有限塑性区的状态进行记述,就可不用无限大试件而用有限试件,换句话说,不用大型试件而用小型试件就能鉴定断裂特性。为此目的, J 的积分路线的独立性起着十分良好的作用。

现在,作为弹塑性断裂力学的一个中心内容是用 J 积分的平面应变断裂韧性 J_{Ic} 的表达,实际上它是以线性断裂力学为基础用平面应变断裂韧性 K_{Ic} 的小型试件鉴定的这一工业上的要求为根据的,因而,实质上是线性断裂力学延伸的这一特性的表达。真正的弹塑性断裂力学的推广,还需要若干时间,但是,其苗头已经开始显露了。

2. J 积分是什么?

J 积分最大的特征,就在于材料发生线弹性状态,及产生塑性状态时,都能用 J 积分表示裂纹顶端附近的应力、应变场。本章在对这一点进行论述的同时,就 J 积分的表达中起巨大作用的能量理论的基础加以解说。

2.1 定义式

考察如图1所示的具有与 x 轴(x_1 轴)相平行的裂纹的二维、全应变弹塑性体(与非线弹性体等价)。假定无体积力,且裂纹面上无作用力,至于变形当应用微小变形理论时, J 积分用下式就能给定***。

$$J = \int_{\Gamma} (W v_1 - T_i \cdot \partial u_i / \partial x_1) dc$$

注: * 即使表现为全应变塑性体也是一样的。

** 虽然在 J 积分中使用上的限制也很多,但由于有上述优点,即使以后有修正,也被认为是不会容易地为其他参数所取代。

*** 用 Einstein 的简式。

$$= \int_{\Gamma} \left[\left\{ W - \left(\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right\} dy + \left\{ \sigma_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right\} dx \right] \quad (5)$$

式中 Γ ，如图1所示，是从裂纹下表面上的1点至表面上1点的物体内的路线， W 是应变能量密度，即为

$$W = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij} de_{ij} \\ = \int_{(0,0,\dots,0)}^{(e_x, e_y, \dots, e_{xz})} (\sigma_x de_x + \sigma_y de_y + \sigma_z de_z + \sigma_{xy} dr_{xy} + \sigma_{yz} dr_{yz} + \sigma_{xz} dr_{xz}) \quad (6)$$

v_i 为 Γ 的单位外法线向量， σ_{ij} 是应力张量， e_{ij} 是应变张量， r_{xy} 、 r_{xz} 为剪切应变， J_i 是应力向量 ($T_i = \sigma_{ij} v_j$, $T_x = \sigma_{xx} v_x + \sigma_{xy} v_y + \sigma_{xz} v_z$, ...), u_i 为位移， dc 为 Γ 的线素。

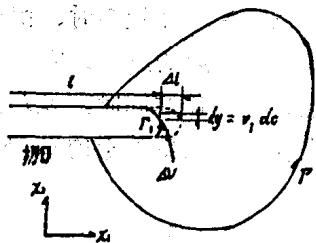


图1 积分路线

2.2 积分路线独立性

在已知的 J 的一个性质中有积分路线独立性。下面首先对此作简单的证明。现在，只要沿包围物体内部 A 区域的闭合路线 ∂A 表达线积分 J ，根据Gauss的定理，便构成

$$\oint_{\partial A} \left(W v_i - \sigma_{ij} v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dc \\ = \int_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right\} dA \quad (7)$$

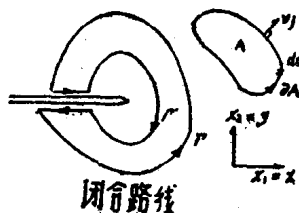


图2 闭合路线

另一方面，根据式(6)所给定义的 W 的性质可得：

$\partial W / \partial x_i = \partial W / \partial e_{ij} \cdot \partial e_{ij} / \partial x_i = \sigma_{ij} \cdot \partial e_{ij} / \partial x_i$
式中若应用应力的对称性 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ，应变的定义式 $e_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ ，以及平衡方程式 $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0$ ，则式(7)的被积分函数恒等地为0。因此，若使 J 积分适用于物体内任一闭合路线， J 便等于0。由于裂纹面与 x 轴平行 ($dy = v_1 dc = 0$)，且表面力为零 ($T_i = 0$)，故裂纹面上 J 积分的被积分函数等于零。所以，作为闭合路线，若采用图2所示的由 $\Gamma + \Gamma'$ 和裂纹面构成的路线，则就变成

$$J = \int_{\Gamma} () dc = - \int_{\Gamma'} () dc$$

如果注意到 Γ' 的方向是相反的，那末上式就表示 J 积分不依赖于积分路线。

由 J 积分的路线独立性所导出的重要性质是：(1) 如果从裂纹顶端起取最大的路线作 Γ 的话，用有限元法就能比较精确地求出 J ；(2) 如果取裂纹顶端附近作 Γ 的话， J 便成了裂纹顶端附近的应力、应变的代表值。

上述情况虽然是全应变弹塑性所产生的结果，但对于接近于实际塑性状态的增量塑性来说是否也会产生同样的结果呢？只有在各点上比例加载的条件得到满足的时候，两者才是完全一致的；如果在载荷不断增加的单调加载情况下，除去非常靠近裂纹顶端的部分，则可认为基本上可实现比例加载，两塑性解大体一致。因此，在增量塑性体中，在裂纹顶端的最近部分， J 依存于路线^[7,8]，如果除去这个部分，就可认为路线的独立性

成立。这可用有限元法加以确证^[8-11]。

2.3 能量论的关系

本节根据 Budianski 和 Rice[12] 的观点, 论述 J 和位能的关系。全应变塑性体的位能 U 用下式给定

$$U = \int_V W dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \quad (8)$$

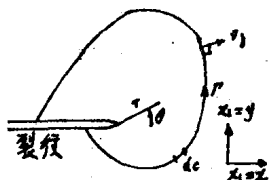


图3 切口的扩展

式中右边的第一项是物体内的体积积分, 第二项是在应力边界上的面积积分。此时, 如图3所示, 假设二维物体内的锐切口仅扩展 Δl , 这时的位能变化用下式给定

$$\Delta U = \int_V \Delta W dV - \int_{S_\sigma} T_i \Delta u_i dS - \int_{\Delta V} W dV \quad (9)$$

根据虚功原理, 式(9)中的第1项和第2项会相互抵销。而且, 第3项的 dV , 当假定围绕切口底的路线 Γ_l 的线素为 dc , 把板的厚度设为 B 时, 可用 $dV = B dy \Delta l = B v_1 dc \Delta l$ 给定, 因而使得

$$\Delta U = -B \Delta l \int_{\Gamma_l} W v_1 dc \quad (10)$$

一方面, 在 Γ_l 上表面力为零 ($T_i = 0$), 因而, 根据式(10), 便构成

$$\begin{aligned} -\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial l} &= \int_{\Gamma_l} W v_1 dc \\ &= \int_{\Gamma_l} \left(W v_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dc \end{aligned}$$

式中, 如考虑式(5)的 J 积分在路线上是独立的, 使得

$$J = -(\partial U / \partial l) / B \quad (11)$$

若以裂纹作为切口的极限, 根据式(11), J 积分就会与随裂纹增大的位能的释放率相等[13,14]。因而, 对于线弹性体, J 积分与能量释放率 G 一样。

下面, 以式(11)为基础, 讨论 J 积分和荷载 (P)-位移 (δ) 曲线的关系。在位能 U 的定义式(8)中, 第1项是 P - δ 曲线下的面积, 第2项是用控制荷载条件下加载时的 $-P\delta$, 在控制位移条件下加载时等于零。因此, U 如图所示, 用图4(a)及(b)的斜线部分的面积表示。

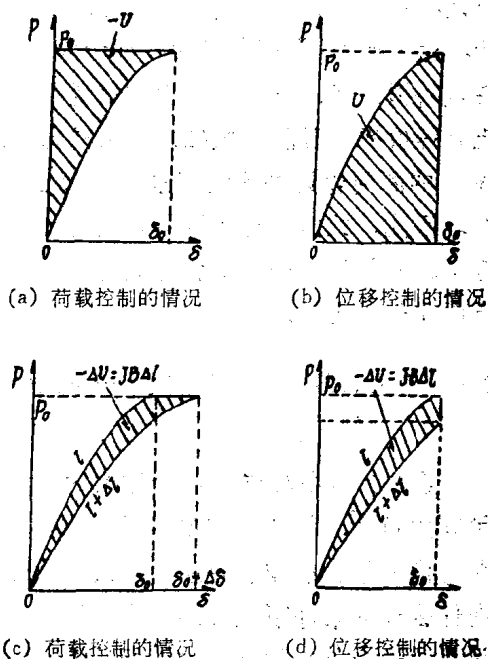


图4 J 积分和位能 U 的关系

因而控制荷载时, 便构成

$$-U = \int_0^p \delta dp \quad (12)$$

控制位移时, 便构成

$$U = \int_0^\delta p d\delta \quad (13)$$

因此, 裂纹长度 l 和 $l + \Delta l$ 时的 p - δ 曲线之间的面积 (图4(c)及(d)的斜线部分) 与 $-\Delta U$ 相等, 其值用式(11)表示 $J B \Delta l$ 。而且, 如果将式(12)及(13)代入式(11), 即为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij} &= \sigma_0 \{J / (I_N \varepsilon_0 \sigma_0 r)\}^{N/(N+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_0 \{J / (I_N \varepsilon_0 \sigma_0 r)\}^{1/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta)\end{aligned}\quad (18)$$

现在, 如果假设断裂进行区很小, 如图 5 所示, 便可认为在离裂纹顶端很近且离开断裂进行区的②上, 式(18)是成立的。因此, ②的内侧的场与上述情况相同, 边界条件是根据式(18)所给定的情况的解, 用 J 同样能够加以记述。以上虽然是对全应变塑性体的论述, 但是, 若在增量塑性体中②上的变形历程离比例加载不太远时, ②上的应力、应变也能用式(18)表示。因此, 如果应用上述看法, 在这种情况下, 则可认为 J 是裂纹顶端附近的场的代表值[7]。

综上所述, 如果变形历程离比例加载大的区域及断裂进行区不大, 则在离裂纹顶端不远的地方就能实现奇异应力场, 不论是弹性、弹塑性, 用单一的力学量 J 就能够代表裂纹顶端的状态。

根据代表裂纹顶端附近的场的 J 的特性, J 当然与代表裂纹顶端变形的裂纹顶端张开位移 (CTOD) δ_i 有一定的关系。即以 σ_0 为屈服应力, J 积分用下式

$$J = m \sigma_0 \delta_i \quad (19)$$

给定。式中, m 是常数, 其值尽管因材料、模型而不同, 但在实验值、解析值中都大体上等于 1—2 左右。例如, 若根据 Dugdale 模型, $m=1$, 若根据滑移线场理论中的裂纹钝化分析, $m=1.5$ 。

3. J 积分的表达法

应力强度因子 K 取决于几何形状及加载条件。但是, 在 J 积分的表达中, 本构方程式和平面应力、平面应变条件等也是相关联的。因此, J 的解析表达必须建立在这些假定上。为此, 要得到相当于 $K = \sigma \sqrt{\pi l}$ 那样简单的, 且能适用于一般弹塑性体的 J 的表达式是困难的。根据这个观点, 对于任何几何形状, 加载形式及本构方程式都能适

用的有限元法。当考虑到今后的发展时, 就可以被认为是表达实验时及设计时的 J 的最有效方法。但是, 如 J_{IC} 实验中实际所进行的那样, 将实验所得的 J_{IC} 值换算成 K_{IC} 值, 将其应用于设计时, 只需要实验时的 J 值。此时, 如 3.4 及 3.5 节所述, 完全不做本构方程式等的假定而用测定加载时的变形来表达 J 值的方法是很方便的, 目前已被广泛采用。

3.1 有限元解析

如上所述, 由于在有限元法中有着灵活的适用性, 所以用有限元法的许多 J 的解析已经形成。首先, 作为应力、应变得解析的方法有:

- (1) 使用一般单元的方法
- (2) 使用奇异单元的方法^[18-18]
- (3) 使用叠合法的方法^[20]

(4) 使用有限元解析和滑移线场解析的组合法等等。另一方面, 作为以应力、应变得解析结果为基础的 J 计算法, 可以任意使用: (a) 在裂纹顶端附近进行式(5)的线积分的方法, (b) 在离开裂纹顶端的路线上表达式(5)的线积分的方法, (c) 在解析的表达中使用 3.2 节中的柔度法的方法。从原理上说, (1)—(4) 和 (a)—(c) 的一切组合都是可能的, 但是, 可以根据解析方法的特性, 对组合加以选择。例如, 对 (1) 来说与 (b)、(c) 组合的时候较多, 而对于 (2) 来说则与 (a) 组合的时候较多。

迄今为止已采用弯曲试件^[21,22,24], 紧凑拉伸试件^[18,24], 中心裂纹试件^[17,19,20,22,26] 和两边裂纹试件等作为分析对象。

3.2 柔度法(Begley和Landes[25])

就裂纹长度不同的若干试件, 如图 4 所示, 根据荷载-位移曲线用实验求出位能 U , 若就裂纹长度在数值上对其进行微分的话, 则用式(11)就能求出 J 值。这种方法在原理上对任何单一裂纹的试件虽然都可能适用,

但它的缺点是需要很多试件, 花费许多劳动。因此, 目前基本上不采用这种方法, 而实际采用3.4及3.5节中所叙述的方法。

3.3 弹性解和刚塑性解组合而成的方法(Bucci等[26])

Bucci 等把载荷-位移曲线假设成如图6(a)所示的弹性解和刚塑性解之和, 根据与式(11)的组合, 求出以位移 δ 为函数的 J 值。但是, 如果用这种表达法, 就会过大地表示 J 值, 因此, 作为弹性解, 使用塑性区修正后的值与实验结果非常一致。但是, 进行修正的时候虽然会造成计算上的麻烦, 然而, 如图6(b)所示, 在作了塑性区修正的弹性解的 J - δ 曲线上作一条与刚塑性体的 J - δ (直线)相平行的切线, 从而能简单地获得 J - δ 的计算曲线。

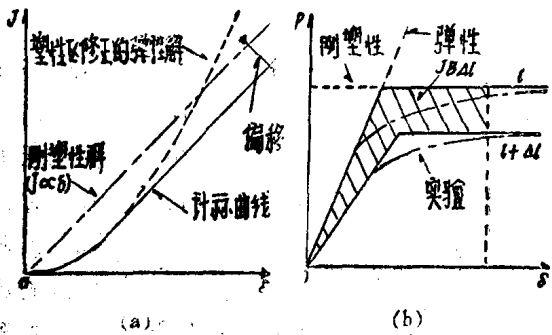


图6 用弹性解和刚塑性解的 J -位移曲线的推算

3.4 深裂纹材料 J 值的简便确定法(Rice等[27])

若用3.2节所述的方法, 那么在求 J 值时通常需要若干根试件的 P - δ 曲线。因此, Rice 等曾提议由一条 P - δ 曲线求深裂纹材料 J 值的方法。在 J_{1c} 试验中所用的很多试件由于满足这种“深裂纹”的条件, 所以这种简便确定法现在已被广泛采用。因为与后面的讨论有联系, 所以下面对这些内容稍作详细介绍。

3.4.1 中心裂纹试件和双边裂纹试件

考察如图7所示的受载 $2P$, 板宽为 $2W$,

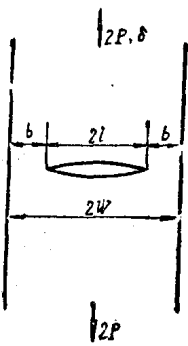


图7 中心裂纹试件

韧带(剩余截面)宽度为 b 的中心裂纹试件。把载荷点的位移 δ 分解成弹性部分 $\delta_{\text{弹性}}$ 和塑性部分 $\delta_{\text{塑性}}$, 即

$$\delta = \delta_{\text{弹性}} + \delta_{\text{塑性}} \quad (20)$$

将式(20)代入式(14)得

$$J = J_{\text{弹性}} + \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial \delta_{\text{塑性}}}{\partial l} \right) dp \quad (21)$$

式中 $J_{\text{弹性}}$ 是弹性的 J , 也就是 G 。假定裂纹很深, 因而 $\delta_{\text{塑性}}$ 与 b 有关, 但与 W 和载荷点之间的距离无关。根据因次分析, $\delta_{\text{塑性}}/b$ 变成仅为净断面应力 $P/(bB)$ 的函数, 即

$$\delta_{\text{塑性}} = bf(P/bB) \quad (22)$$

因而

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \delta_{\text{塑性}}}{\partial l} \right)_P &= - \left(\frac{\partial \delta_{\text{塑性}}}{\partial b} \right)_P \\ &= - \frac{P}{bB} f' \left(\frac{P}{bB} \right) - f \left(\frac{P}{bB} \right) \\ &= [P(\partial \delta_{\text{塑性}} / \partial P)_b - \delta_{\text{塑性}}] / b \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)代入式(21)得

$$J = G + \frac{1}{bB} \left[2 \int_0^{\delta_{\text{塑性}}} P d\delta_{\text{塑性}} - P \delta_{\text{塑性}} \right] \quad (24)$$

在此利用式(20)和

$$2 \int_0^{\delta_{\text{弹性}}} P d\delta_{\text{弹性}} = P \delta_{\text{弹性}} \quad (25)$$

那么式(24)变成

$$J = G + \frac{2}{bB} \left[\int_0^{\delta} P d\delta - \frac{1}{2} P \delta \right] \quad (26)$$

式 (26) 右边的第一项可以按 K 计算 (式 (12)), 而第二项括号内的值是图 8 $P-\delta$ 线图的阴影线部分的面积。因而, 若 K 已知, J 值就可用一条 $P-\delta$ 曲线求出。

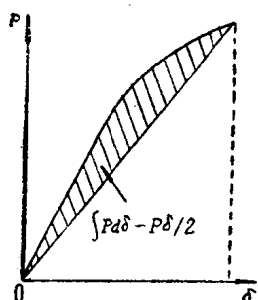


图 8 中心裂纹试件的载荷-位移曲线

对于受 $2P$ 载荷的板宽为 $2W$ 、韧带长度为 $2b$ 的双边裂纹试件, 也可获得和上述中心裂纹试件的结果完全相同的结果。

3.4.2. 弯曲试件

研究图 9 所示的为弯矩 M 、韧带长度为 b 的试件。这种情况下的 J 值, 可在式 (14) 中以 M 替换 P , 用加载点的角变位替换 δ 后由下式给出

$$J = -\frac{1}{B} \int_0^M \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l} \right)_M dM \quad (27)$$

认为 Θ 可表示成: 假定无裂纹时的那个转角 $\Theta_{\text{无裂纹}}$ 与因存在着裂纹时所提供的 $\Theta_{\text{裂纹}}$ 之和*, 即

$$\Theta = \Theta_{\text{无裂纹}} + \Theta_{\text{裂纹}} \quad (28)$$

如果裂纹较深, 则 $\Theta_{\text{裂纹}}$ 和式 (22) 一样可由下式表示

$$\Theta_{\text{裂纹}} = g(M/b^2 B) \quad (29)$$

利用式 (28) 和式 (29) 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l} \right)_M &= - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial b} \right)_M = - \left(\frac{\partial \Theta_{\text{裂纹}}}{\partial b} \right)_M \\ &= - \frac{2M}{b^2 B} g' \left(\frac{M}{b^2 B} \right) \end{aligned}$$

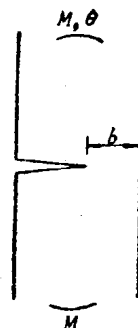


图 9 弯曲试件

$$= \frac{2M}{b} \left(\frac{\partial \Theta_{\text{裂纹}}}{\partial M} \right), \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (27) 得

$$J = -\frac{2}{bB} \int_0^{\Theta_{\text{裂纹}}} M d\Theta_{\text{裂纹}} \quad (31)$$

式 (31) 的积分表示用外力所作的一种功。因而, 像在三点击弯试件, 紧凑拉伸试件中那样, 在韧带部分中弯曲应力是个支配量, 并且当载荷在用力 P 加载的情况下, 上式变为

$$J = -\frac{2}{bB} \int_0^{\delta_{\text{裂纹}}} P d\delta_{\text{裂纹}} \quad (32)$$

假如无裂纹时的位移 $\delta_{\text{无裂纹}}$ 比较小, 则

$$J = -\frac{2}{bB} \int_0^{\delta} P d\delta \quad (33)$$

* 与中心裂纹试件中将位移分解成式 (20) 那样的弹性部分和塑性部分相对应, 在弯曲试件中像式 (28) 那样将位移分解与无裂纹时的位移和因存在着裂纹所贡献的位移, 这也许是个出奇的想法。作为这种分解方法不同的理由考察下面的情况即可看出。现在把和式 (28) 同样的分解法应用于中心裂纹试件, 可以得到代替式 (26) 的式子

$$J = \frac{2}{bB} \left[\int_0^{\delta_{\text{裂纹}}} P d\delta_{\text{裂纹}} - \frac{1}{2} P \delta_{\text{裂纹}} \right]$$

在线弹性体中 $\delta_{\text{裂纹}}$ 为有限值, 故变成 $J=0$ 。这里, 由于把 $\delta_{\text{裂纹}}$ 只看作是 $P/(bB)$ 的函数是不合理的 [31]。另外, 把式 (20) 的分解法用于弯曲试件时变成

$$J = G + \frac{2}{bB} \int_0^{\Theta_{\text{塑性}}} M d\Theta_{\text{塑性}},$$

表达变得困难。

因而 J 值是由 $P-\delta$ 曲线下的面积, 即外力功的二倍除以韧带面积的值给出。如果裂纹很深, 那么从原理上来讲, 式 (32) 的精度应该比式 (33) 的好。然而, 在供实用的三点弯曲试件中, 也有所谓式 (33) 给出良好近似值的报告^[28, 29], 和表达比较容易这一点相结合, 式 (33) 正被广泛应用。

3.5 紧凑拉伸试件的 J 值简便确定法 (Merkle 和 Corten [32])

在紧凑拉伸试件的韧带部分上不仅有弯曲而且也作用着拉伸。为此, 用式 (33) 表示紧凑拉伸试件的 J 值时, 会发生对 J 值表达过小的倾向^[33-35]。于是, Merkle 和 Corten 提议把

$$J = \frac{\eta_r}{bB} \int_0^{\delta} P d\delta + \frac{\eta_o}{bB} \int_0^P \delta dP \quad (34)$$

用来作为考虑拉伸的式子。

式中 $\eta_r = 2(1+\alpha)/(1+\alpha^2)$

$$\eta_o = 2\alpha(1-\alpha-\alpha^2)/(1+\alpha^2)^2$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + 2\beta + 2} - \beta - 1, \quad \beta = 2l/b$$

由式 (34) 可知, 用 Merkle 和 Corten 的简便确定法, 也和 Rice 等的简单式 (式 (26), (33)) 一样, J 值可以根据一条 $P-\delta$ 曲线计算。

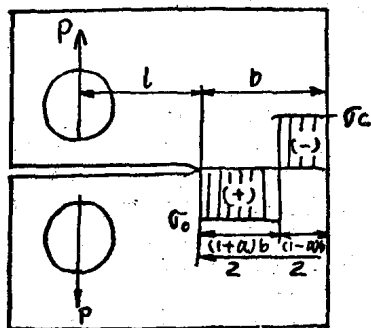


图10 紧凑拉伸试件

式 (34) 虽然是以极限分析为基础的, 但是在通常所用的形状和尺寸范围内, 对线弹性体用式 (34) 得到的 J 值和由 K 换算而得的 J 值很一致。在弹塑性区域中, 和用

式 (33) 的表达式相反, 式 (34) 会发生对 J 值作过大表达的倾向^[33-35]。

对于考虑拉伸的紧凑拉伸试件的其它的 J 表达法来说, 还有以白鸟·三好^[36] 的滑移线场分析为基础的简便确定法。

3.6 全断面塑性下 J 值的简单式 (大路等^[36, 37])

大路等假定

$$\sigma = \sigma_o (e/e_o)^N \quad (35)$$

为构成方程式, 导出了全断面塑性下 J 值的简单式。表 1 汇总了这些结果。

表 1 全断面塑性下 J 值的简单式

两边裂纹	中心裂纹	单边裂纹	紧凑拉伸	环形裂纹圆棒
$J = \frac{1-N}{1+N} \frac{P\delta_o}{bB} \quad (N < 1/3)$	$J = \frac{2+N}{2+2N} \frac{P\delta_o}{bB} \quad (N < 1/3)$	$J = \frac{2+N}{2+2N} \frac{P\delta_o}{bB} \quad (N < 1/3)$	$J = \frac{2P\delta_o}{bB} \quad (b/e < 0.5, N < 1/3)$	$J = \frac{2-N}{2+2N} \frac{P\delta_o}{\pi e^2} \quad (\text{深裂纹})$
$J = \frac{1-N}{1+N} \frac{P\delta}{bB} \quad (\text{深裂纹}, N < 1/2)$	$J = 2 \frac{P\delta}{bB} \quad (\text{深裂纹}, N < 1/3)$	$J = 2 \frac{P\delta}{bB} \quad (\text{深裂纹}, N < 1/3)$		

3.7 J 值的解析表达式

Shih 和 Hutchinson [22] 根据有限单元分析的结果建议: 在 I 型-平面应力下的非线性弹性体 (式 (35)) 中的浅裂纹的 J 值分析表达式取为

$$J = \sigma_o e_o l [3.85 (1-N)/\sqrt{N} + \pi N] (\sigma^\infty/\sigma_o)^{1+1/N} \quad (36)$$

式中 l 是裂纹长度, σ^∞ 是远场应力。然而, 当 l 变大时, 式 (36) 显然过小地表示了 J 值, 于是大路等^[38] 对 I 型-平面应力求得:

$$J_o = \pi \{ \pi / (2N) \}^{(1-N)/(2-N)} \sigma_o e_o l (\sigma_{\text{净}}/\sigma_o)^{1+1/N} \quad (37)$$

作为浅裂纹的 J 值表达式 ($\sigma_{\text{净}}$: 净应力);

$$J_d = \{ 4\pi / (\pi^2 - 4) \} \sqrt{N} \sigma_o e_o b (\sigma_{\text{净}}/\sigma_o)^{1+1/N} \quad (38)$$

作为深裂纹的 J 值表达式 (b : 韧带长度)。

他们进而提议由这些值以

$$1/J = 1/J_s + 1/J_d \quad (39)$$

的形式来表示 J 值的方法。对于中心裂纹试件, 用式 (37)~(39) 计算的 J 值和有限元的分析值很一致。

另外, Begley [39] 对于发生在应力集中部分的塑性区域内的裂纹提出了 J 的表达法。

这种解析表达式的建议现在虽然不少, 但考虑到对 J 设计的应用, 所以仍期待于今后的发展。

3.8 其它方法

除了以上方法外, 还有一些 J 解析法。例如 Amazigo [40, 41] 用 Wiener-Hopf 法解析求得了受纵向剪切的中心裂纹试件的应力-应变场, 在此解的基础上来计算 J 值。

4. 对开裂问题的应用 (J_{Ic} 、 J_c 断裂条件)

4.1 平面应变断裂韧性 J_{Ic}

如前所述, 假如只限于裂纹不扩展情况下的问题, 那么 J 积分不论对弹性和塑性体都可以作为裂纹尖端附近应力-应变场的代表值。因而, 如图 5 所示的那样, 如果 J 值相同, 那么不管是大结构物, 也不管是小试件, 其裂纹尖端附近的应力-应变场也都相同。此外, J 值像 3.1, 3.3, 3.7 节所述的那样可用解析法表示, 同时根据 3.2, 3.4—3.6 节的方法用实验表示也是可能的。因而, 对于开裂问题比较容易想到导入 J 积分。

根据这样的观点, Begley 和 Landes [25, 42] 建议 (1972年) 把 J_{Ic} 当作平面应变断裂韧性。以此为理由关于 J_{Ic} 断裂条件的研究也就活耀地开展起来^[35, 43-62], 现在美国材料试验学会推荐的试验方法已进入准备阶段。 J_{Ic} 试验可以说是 J 积分向实验方面的应用和成功的第一个试验。

那么, 为何 J_{Ic} 试验会急速普及的呢? 用一句话来说, 那是由于以线性断裂力学为基础的平面应变断裂韧性 K_{Ic} 试验的试件尺寸最小这个条件而造成的。即, 如果根据美国材料试验学会 E 399 的话, 当屈服应力假设为 σ_0 时, 那么在 K_{Ic} 试验中所用的试件尺寸必须满足

$$l, B, b \geq 2.5(K_{Ic}/\sigma_0)^2 \quad (40)$$

为此, 在求中、低强度, 高韧性材料的 K_{Ic} 时, 必须要有非常大的试件。根据从原材料中取试件尺寸或从试验机容量这方面的情况来看, 事实上也存在着不能求得 K_{Ic} 的情况。另一方面, 在 J_{Ic} 试验中最小尺寸的约束条件, 当把 $\sigma_{屈服}$ 假设为屈服应力和拉伸强度平均值时, 由下式给出^{[63]*}

$$l, B, b \geq 50 J_{Ic}/\sigma_{屈服} \quad (41)$$

但是, 对式 (41) 中的常数 50 也有提出取 25 为好的意见^[43], 现在还在争论中。反正式 (41) 要比式 (40) 更容易满足。因而, 采用比 K_{Ic} 试件小得多的试件也可测出有效的平面应变断裂韧性值 J_{Ic} 。再根据式 (16), K_{Ic} 和 J_{Ic} 之间的关系变为

$$J_{Ic} = (1-\nu^2) K_{Ic}^2 / E \quad (42)$$

所以 J_{Ic} 值就可简单地换算成 K_{Ic} 值。用式 (42) 由 J_{Ic} 值换算成的 K_{Ic} 值, 与按照美国材料试验学会 E 399 所求得的有效 K_{Ic} 值非常一致。在一部分材料中, J_{Ic} 的断裂韧性比 K_{Ic} 的低, 这可以解释为: K_{Ic} 试验法允许发生 2% 左右的稳态裂纹扩展, 所以它对断裂韧性作了过高的表达^[45]。在 K_{Ic} 试验法中不能求韧性的区域, 例如对于高韧性材料的上架 (upper shelf) 区域, 用 J_{Ic} 法也能求得断裂韧性值。

4.2 J_{Ic} 试验法

J_{Ic} 试验法的特点之一是, 并不就便地

* 式 (41) 可解释为是在板厚的中间部分实现平面应变状态的条件^[64], 同时也是使高应变区域和张开量比试件尺寸小得多的式 (18) 的奇异应力场成立的条件^[44, 65]。

取最大载荷点为断裂发生点,而是取定为开裂的点。²对应于如何测出这种开裂点,到现在为止已提出了好几个 J_{IC} 试验法。下面介绍一些代表性的例子。在这些试验法中, R 曲线法作为标准试验法比较好,也有采用美国材料试验学会推荐的试验法的动向。从原理上来说,根据小林等建议的伸张区法^[47,48]比较好,它比 R 曲线法优越。

4.2.1 R 曲线法^[43]

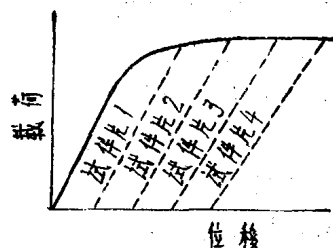
试件采用经过疲劳预制裂纹的弯曲试件(三点弯曲试件、紧凑拉伸试件)。试验方法的概要如图 11。即, (a) 对试件加载到给定的各种位移后卸载, (b) 用加热着色等方法给裂纹加上记号之后使试件断裂, 再测定裂纹扩展量 Δl 的平均值。这里, Δl 是伸张区宽度 SZW 和裂纹稳定扩展量 $\Delta l'$ 之和。 (c) J 值根据载荷 位移曲线进行计算。对于三点弯曲试件用 Rice 等的简单式(33), 对于紧凑拉伸试件采用 Merkle 和 Corten 的简单式(34)进行计算。 (d) 作相应于 Δl 的 J 值表示, 把由这个表格所描出的 R 曲线和下表钝化曲线

$$J = (2\sigma_{屈服})(\Delta l) \quad (43)$$

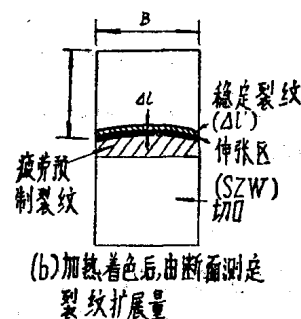
的交点当作 J_{IC} 。

图 12 表示 R 曲线法实验结果的例子。

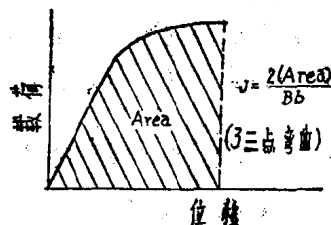
R 曲线法由于试验方法本身简单, 所以工程上认为比较有用。然而, 也存在一些问题。首先, 实际的钝化曲线不一定与式(43)一致^{[47-49]*}。因而开裂后 R 曲线的斜率比较大时, 由于这种钝化曲线的不一致将会产生误差, 联系到这种情况, Griffis^[50] 在作图 11(d) 的 R 曲线时不用 Δl 而是用裂纹稳定扩展量 $\Delta l'$ 作为横轴, 根据这样所求得的 R 曲线和纵轴的交点来求 J_{IC} 值。如果用这种方法, 那么根据有些不足和争论较多的式(43)的钝化曲线就变得不必要了。最近, 就连美国材料试验学会也停止使用由式(43)提供的钝化曲线, 它们正朝着求开裂前的 SZW 和 J 的关系, 然后采用其和 R 曲线的交点的方向在改变方针。



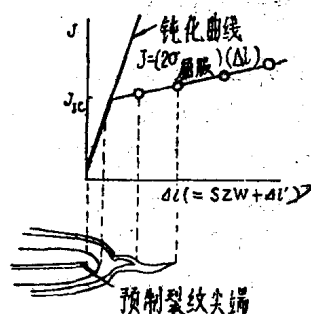
(a) 对试件加载到给定的位移



(b) 加热着色后, 由断面测定裂纹扩展量



(c) 计算各试件的 J 值



(d) J - Δl 图和 J_{IC} 的确定

图 11 用 R 曲线法确定 J_{IC}

其次, 虽然是确定开裂点, 可是裂纹扩展量较大区域的 R 曲线也被应用。此时, 不仅只确定开裂点, 而且还求得了裂纹稳定扩展后 R 曲线的一些值, 并且还掩盖了其参与

* 小林等^[47,48]根据有关各种材料的实验结果指出: 钝化曲线与屈服应力无关, 它可以用杨氏模量 E 近似地由下式表示

$$SZW = 95 J / E \quad (a)$$

关于式(a)的意义现在虽然还不一定明确, 但由于式(a)与材料无关, 所以能较好地成立。

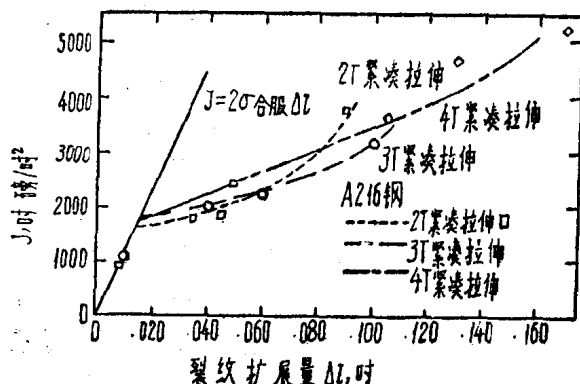


图12. 用R曲线法的实验结果^[43]

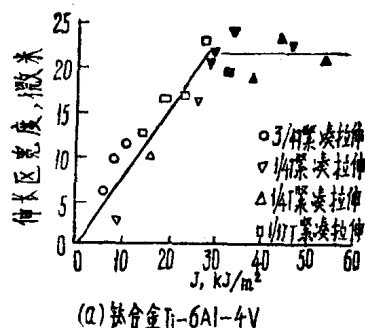
以后计算的作用，这看来会发生较大的影响。第三，裂纹扩展量虽然用的是断面上的平均值，但该值在试件厚度方向上是完全变化的，应该指出它易受到板厚的影响。

4.2.2 伸张区法^[47,48]

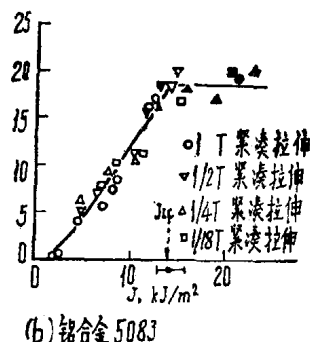
伸张区法从原理上来说，它是用伸张区宽度(SZW)代替图11(d)R曲线中 Δl 的方法。伸张区法的特点如图13所示，开裂点是以钝化曲线J-SZW线图上的明显的拐点给出。这一点除了特殊材料以外(如SUS-304钢)，在裂纹稳定扩展后(SZW)是不发生变化的^[68]。此外，如图14所示，假如实验求得了钝化曲线(J-SZW)，那么在一根因过载而发生断裂的试件断面上测出伸张区宽度(SZW)_c，然后在钝化曲线的外推线上读取对应于(SZW)_c的J值即可求得 J_{IC} 值。若进一步已知像式(a)那样的J和伸长区宽度(SZW)的关系，那么根据一根断裂试件的(SZW)_c值就可确定 J_{IC} 。

图13表示板厚变化时的实验结果^[48]。获得了不依赖于板厚的相同的 J_{IC} 值。诚然，为了标记伸张区或稳定的裂纹前缘，小林等对试件加载到规定的位移之后，用疲劳使裂纹扩展。

伸张区法的优点除上述几点之外，还有：(1)如果取板厚中间部分的SZW，那么即使在板厚方向SZW发生变化的薄板中，也存在着求得平面应变状态下的有效 J_{IC} 的可能性；(2)实测钝化曲线本身因为要集中



(a) 钛合金Ti-6Al-4V



(b) 铝合金5083

图13 用伸张区法的实验结果^[48]

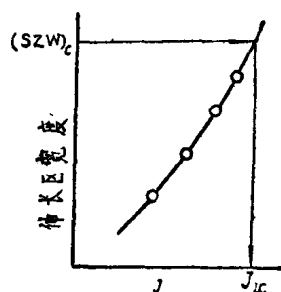


图14 用伸张区法确定 J_{IC} ^[47,48]

全力于确定起裂点，所以不会出现上述R曲线法那样的缺点和不安的情况。

另一方面也存在着一些问题，如：(1)在测量值中要用随机性和误差较大的函数图解法，所以作为工业试验而被采纳接受是有阻力的；(2)对于伸张区沿裂纹前缘不一定相同的材料，本方法的适用性需要研究等。

4.2.3 卸载柔度法^[61]

Clarke等提出用一根试件求 J_{IC} 的方法^[61]。即把荷重加到试件上之后略微卸掉一些载荷，根据卸载时载荷-位移曲线的斜

* 图13表示的实验结果全部满足 J_{IC} 的尺寸条件式(41)

率(柔度)求出裂纹长度,随后再加载。以后重复这种操作。若用这种方法,因为求得的是试件不发生断裂的裂纹扩展量,所以由一根试件描出一条 R 曲线。其余的过程与 R 曲线法同样进行即可求出 J_{IC} 。

4.2.4 电位差法^[52-54]

在开了切口的互相相反方向的两个接头之间流过不变的电流,当相对于切口张开位移描出接头间的电位差时,开裂点就以曲线的拐点给出。作为裂纹扩展量来说,测出的是有关板厚的平均值。若用电位差法,那么它和卸载柔度法一样,用一根试件就可确定 J_{IC} 值。不过,也有所谓因材料不同拐点不够明瞭的缺点。

4.2.5 声发射法^[55,56]

最近,用声发射检测开裂的试验已有好几个了。声发射法存在的问题是:(1)虽然适用于比平均值早得多的开裂点,但对于那种点的断裂韧性值,有可能在工业上给出过分安全的值。(2)在声发射中同时存在着因开裂的声发射和由于屈服的声发射,两者不仅很难分离,而且也有着开裂点的检测比较困难的情况。

用上述试验法求得的 J_{IC} 值,对于用高韧性材料制成的结构物的断裂来说,大多给出过分偏于安全一边的评价。因而,如后面所述的那样,希望建立允许有裂纹稳定扩展并用阻止裂纹失稳扩展的点来代替开裂点的方法[67]。

4.3 J_{IC} 对旋转体断裂强度的应用^[61,62]

J_{IC} 评价结构物断裂强度的应用例子,最近取得成功的问题有旋转体的强度问题。下面对其作一概略介绍。

坂田等导出下式

$$J = \int_{\Gamma} (Wv_1 - T_i \cdot \partial u_i / \partial x_1) dc$$

$$- \int_A F_i \cdot \partial u_i / \partial x_1 dA \quad (44)$$

作为存在着体积力(离心力)情况下的 J 积分[68]。式中 F_i 是体积力,右边第二项是与积分路线 Γ 和用裂纹面围成的区域有关的面积积分。当在式(44)中去掉第二项以后,式(44)就和通常的 J 积分的定义式(5)相一致。坂田等^[61]用紧凑拉伸试件首先求出了 J_{IC} ,并用式(44)根据有限元素法计算了有预制裂纹的旋转体的 J 值,假设当它达到 J_{IC} 值时就发生开裂的情况下,预测了旋转体的强度,获得了良好的结果。宫本等^[62]也得到了同样的结果。

4.4 J_{IC} 法和弹塑性断裂力学的另一些方法之间的关系

对平面应变断裂韧性的弹塑性断裂力学的研究除了 J_{IC} 法以外,还提出了以下几个方法。在这一节中,对这些方法和 J_{IC} 法的比较和联系作一些讨论。

4.4.1 和裂纹顶端张开位移(CTOD)法的关系^[60,69]

如前所述,CTOD(δ_i)也是裂纹尖端附近的应力-应变的代表值,它和 J 之间有式(19)那样的固定关系。因而可以认为 J_{IC} 条件和极限CTOD条件差不多是等价的。然而,CTOD法和 J_{IC} 法相比有如下弱点:(1)定义并不明确,(2)关于解析表达的基础不太充分等。

4.4.2 和等价能量法的关系^[70,71,72]

等价能量法^[72,73]可以解释成如图15所示的那样,它是将载荷-位移曲线的弹性部分延长,使得该曲线下面的面积等于发生断裂时实际载荷-位移曲线下的面积,取与此相应的载荷为 P_0 ,把在 P_0 作用下计算所得的 K 值作为断裂韧性的方法。因而,不论是弹性或是塑性,对于载荷-位移曲线下的面积即外力功和 J 值之间具有一定比例关系的