

# 环路法及最佳状态 反馈系统设计

---

李镇铭 著

国防工业出版社

# 环路法及最佳状态 反馈系统设计

李 镇 铭 著

国防工业出版社

## 内 容 简 介

本书是自动控制理论专著，主要介绍了求系统传递函数的新方法——“环路法”、最佳系统的传递函数及其设计、“环路法”实现最佳 I、II、III 型状态反馈系统的设计、以及任意配置最佳极、零点的结构综合等等。方法简便、独特，能设计动态、静态、抗扰动性能都好的系统，计算机仿真结果证明，性能指标远高于其他方法设计的系统。

本书可供自动控制、自动化仪表、计算机应用、航空、船舶、机械、化工、应用物理等与控制有关专业的师生及硕士研究生作参考用书，对上述有关专业的工程设计、科研人员及应考硕士研究生的考生等更有参考价值。

### 环路法及最佳状态反馈系统设计

李 镇 铭 著

\*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北省涿州中学印刷厂印装

\*

850×1168 1/32 印张 7 5/8 200千字

1988年4月第一版 1988年4月第一次印刷 印数：0,001—1,950 册

---

ISBN7-118-00157-0/TN31 定价：1.75元

## 前 言

本书是自动控制理论专著，作者近年来在自动控制理论方面写了几篇论文，有些已在杂志上发表，有些在全国控制理论及应用学术会议上宣读，有些尚未发表和宣读。本书以这些文章为基础，同时采用了与已有方法对比的手法。为了便于初学者自学和本书体系的联贯与完整，加入了部分基本控制理论内容。

书中介绍了直接由电路绘制方块图的方法、求控制系统传递函数的新方法——“环路法”、闭环控制系统的最佳传递函数及其设计、状态反馈系统的结构分析与设计、“环路法”实现 I、II、III 型最佳状态反馈系统的最佳极、零点的任意配置等独特的内容与方法。

“环路法”求复杂系统的传递函数，比用梅逊公式简捷、方便、表达式清楚，并且不易丢环、丢项出错，对初学者也比信号流程图及梅逊公式易掌握。“环路法”实现最佳状态反馈系统的设计，不但不需状态观测器，而且可把最佳状态反馈系统设计成 I、II、III 型系统；不但能任意配置系统的最佳极点，而且能任意配置最佳零点。在设计最佳系统传递函数时，由于用了计算机的计算结果，所以能非常简便地直接在时域内，根据给定的时域性能指标而一次成功地设计成最佳系统。不但设计方法简单易掌握，而且该方法设计系统的性能指标与其他方法相比，可提高几倍、几十倍、甚至几百倍。用书中介绍的新方法设计系统，可设计动态、静态、抗扰动性能都好的系统。

本书在编写过程中得到谢绪恺、李世卿、杨自厚、苏迪前、

赵业浩、李友善、孙虎章、尚雷、雷渊超、解学书、郑大钟、孙景森老师及北京轻工业学院副院长韩贵峰的指导与帮助，在此表示衷心感谢。

因时间仓促，本人知识面很窄、很浮浅，定有错误与不妥之处，敬请读者批评指正。

**作 者**

# 目 录

|                               |         |
|-------------------------------|---------|
| 第一章 传递函数和方块图 .....            | ( 1 )   |
| 1.1 传递函数和典型环节 .....           | ( 1 )   |
| 1.2 方块图 .....                 | ( 21 )  |
| 第二章 “环路法” .....               | ( 37 )  |
| 2.1 目前求解系统传递函数的方法及其优缺点 .....  | ( 37 )  |
| 2.2 “环路法”定理及其应用 .....         | ( 93 )  |
| 第三章 最佳状态反馈控制系统的设计 .....       | ( 126 ) |
| 3.1 引言 .....                  | ( 126 ) |
| 3.2 闭环系统的最佳传递函数 .....         | ( 127 ) |
| 一、 “二次性能最优”传递函数 .....         | ( 127 ) |
| 二、 “ITAE性能准则”及其最佳传递函数 .....   | ( 139 ) |
| 三、 “阶跃响应最佳准则”及最佳传递函数的设计 ..... | ( 158 ) |
| 3.3 几种方法设计系统时域性能指标的比较 .....   | ( 192 ) |
| 3.4 状态反馈系统的结构分析与设计 .....      | ( 207 ) |
| 参考文献 .....                    | ( 237 ) |

# 第一章 传递函数和方块图

## 1.1 传递函数和典型环节

### 一、传递函数

众所周知，微分方程式是描述物质运动规律的运动方程式，对于线性定常系统（包括电路、装置及元、部件等）的运动规律也常用微分方程式描述。即采用微分方程式来描述系统的输出量与输入量之间的运动关系。

〔例1.1.1〕 有一弹簧质量装置，如图1.1.1所示。当在质量为 $m$ 的物体上加以外力 $f$ 时，其物体产生位移 $y$ ，根据牛顿定律可列出描述输出量 $y$ 与输入量 $f$ 之间关系的运动方程式为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = f \quad (1.1.1)$$

通常把式(1.1.1)称作是描述图1.1.1装置的数学模型。

式中  $m$ ——物体的质量 (kg);  
 $y$ ——质量为 $m$ 的物体离开平衡点的位移 (m);  
 $f$ ——外力 (N);  
 $k$ ——弹簧刚度 (N/m)。

〔例1.1.2〕 如图1.1.2所示是电阻为 $R$ 、电感为 $L$ 、电容为

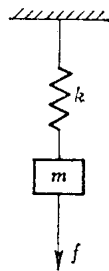


图1.1.1 弹簧质量装置

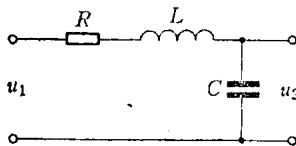


图1.1.2 RLC电路

C的RLC电路。当输入电压为 $u_1$ ，输出电压为 $u_2$ 时，其运动方程是

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1 \quad (1.1.2)$$

当式(1.1.1)和式(1.1.2)中的 $m$ 、 $k$ 和 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 均为常数时，则运动方程式为线性常系数微分方程式。在输入(控制作用或扰动作用)已知时，求其输出的运动规律，则需对运动方程式求解。在求解运动方程式时，对式(1.1.1)和式(1.1.2)的二阶微分方程式还比较容易，但对高阶微分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\ &= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

求解则是很困难的(应用计算机除外)，而描述自动控制系统的运动方程式往往是高阶微分方程式，因此在古典控制理论中采用拉氏变换和由拉氏变换所定义的传递函数作为工具，对自动控制系统进行研究和探讨。结果，由于引入传递函数，则把描述系统运动规律的微分方程式的数学模型变换成用复数多项式对系统进行描述的传递函数的数学模型，从而把微积分运算变换成在复数域内的比较简单的代数运算。在此基础上，比较成功地采用间接、近似、以及实验等方法，如频率法和根轨迹法等，解决了对系统的评价、分析与设计、综合等问题。

传递函数不仅用来描述系统的动态特性，而且还可以用来研究系统结构、参数变化对系统性能的影响，并且由于引入了以状态空间为基础的现代控制理论，为应用传递函数和状态变量反馈设计和实现最佳控制系统开辟了新途径。在实现由状态变量反馈设计的最佳控制系统时，求解系统传递函数的“环路法”，又是得力的工具。



### 什么是传递函数?

线性定常系统(包括电路、装置等),在初始条件为零时,其输出信号 $y(t)$ 的拉氏变换式 $Y(s)$ 与输入信号 $u(t)$ 的拉氏变换式 $U(s)$ 之比被定义为该系统的传递函数。书中对一般开环系统的传递函数用 $W(s)$ 表示;对一般闭环系统的传递函数用 $G(s)$ 表示;对最优或最佳闭环系统的传递函数用 $\Phi(s)$ 、 $\hat{G}(s)$ 、 $\hat{\Phi}(s)$ 等符号表示;对系统的不可变部分的传递函数,即设备或固有系统的传递函数用 $W_0(s)$ 表示。

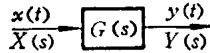


图1.1.3 系统或元件的传递函数

〔例1.1.3〕 求图1.1.1所示弹簧质量装置的传递函数。

解 首先根据物理定律列写出微分方程式,即式(1.1.1),而后对式(1.1.1)取初始条件为零的拉氏变换式,得

$$(ms^2 + k)Y(s) = F(s) \quad (1.1.4)$$

取输出拉氏变换式与输入拉氏变换式之比,得其传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} \\ &= \frac{1}{ms^2 + k} \\ &= \frac{1}{k} \\ &= \frac{m}{k} s^2 + 1 \\ &= \frac{k_1}{T^2 s^2 + 1} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

式中  $k_1 = \frac{1}{k}$ ，是比例系数（或称增益、放大系数），

$T = \sqrt{\frac{m}{k}}$ ，是时间常数。

〔例1.1.4〕 求图1.1.2式所示R、L、C电路的传递函数

解 根据式(1.1.2)的微分方程式，取初始条件为零的拉氏变换式，得

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_2(s) = U_1(s)$$

所以传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \\ &= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \\ &= \frac{1}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

式中  $T = \sqrt{LC}$ ，是时间常数；

$\zeta = \frac{RC}{2\sqrt{LC}}$ ，是相对阻尼系数或阻尼比。

〔例1.1.5〕 求式(1.1.3)所描述的系统的传递函数。

解 对式(1.1.3)取初始条件为零的拉氏变换式得

$$D(s)Y(s) = M(s)U(s) \quad (1.1.7)$$

所以由n阶微分方程所描述的系统的传递函数是

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ &= \frac{M(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

$$= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.1.8)$$

从定义和上述的例中可以看到传递函数具有如下性质：

(1) 传递函数是复变函数，是复数变量 $s$ 的有理真分子，分母的次数为 $n$ ，分子的次数为 $m$ ，一般有 $n \geq m$ 。这是由系统或元件的物理性质决定的。传递函数中各系数都是实数，因为这些系数都是系统或元件的参数。

(2) 传递函数只取决于系统、元件的结构和参数，而与外作用和初始条件无关。

(3) 传递函数的分子多项式 $M(s) = 0$ 的根，称为传递函数的零点，分母多项式 $D(s) = 0$ 的根，称为传递函数的极点。传递函数的零极点的分布，表征系统的动态特性。传递函数是系统、元件的静态和动态特性的一种数学描述，是数学模型的复数形式。

## 二、典型环节

任何元件或复杂的系统都是由若干个典型环节构成的。虽然元件、系统的种类繁多，构成环节的类型更多，但根据动态特性对环节进行分类却只有几种，如果了解并掌握每类环节的动态特性，将为深入地研究自动控制系统打下基础。

任意系统的传递函数可用式(1.1.8)描述，现将其分母和分子分别分解因式，则得

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\tau} k_i \prod_{i=1}^{\mu} (\tau_i s + 1) \prod_{i=1}^{\nu} (\tau^2_{d_i} s^2 + 2\zeta_{d_i} \tau_{d_i} s + 1)}{s^{\nu} \prod_{i=1}^{\rho} (T_i s + 1) \prod_{i=1}^{\sigma} (T k^2_i s^2 + 2\zeta_{k_i} T R_i s + 1)} \quad (1.1.9)$$

式中表明，构成系统的最基本的典型环节有六种。在分母中有三种典型环节，它们分别是：积分环节；非周期环节；振荡环节。在分子中有三种典型环节，即：放大环节；一阶微分环节；二阶

## 微分环节。

### 1. 积分环节

传递函数为

$$W(s) = \frac{1}{s} \quad (1.1.10)$$

的元件等称为积分环节。

例如：电动机所输出的转角 $\theta(S)$ 是旋转角速度 $\omega(s)$ 的积分。又如：没有漏电的电容器，其充电电压是充电电流的积分。此外，液罐在没有输出的情况下进行充液时，其液位高度是充液流量的积分。

当在积分环节的输入端加单位阶跃输入时，如图1.1.4所示，即

$$u(t) = 1 \quad (t \geq 0)$$

其象函数，即拉氏变换式为

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

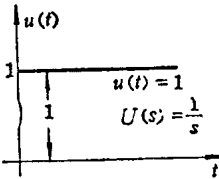


图1.1.4 单位阶跃函数

所以积分环节的输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= W(s)U(s) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

由拉氏变换表查得输出的原函数如图1.1.5所示，其输出为

$$y(t) = t \quad (1.1.12)$$

因此积分环节的单位阶跃响应是随时间 $t$ 的增加而成比例的增长，并且这种增长是无止境的。但在实际上，任何元件的输出量都不是无限的。例如：液罐的高度总是有限度的，不可能有无限高。

### 2. 非周期环节（惯性环节）

传递函数为

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (1.1.13)$$

的元件（包括装置、设备、电路等）叫非周期环节。也叫单容环节、惯性环节或弛放环节。

〔例1.1.6〕如图1.1.6所示的RC电路,当 $u_1$ 为输入、 $u_2$ 为输

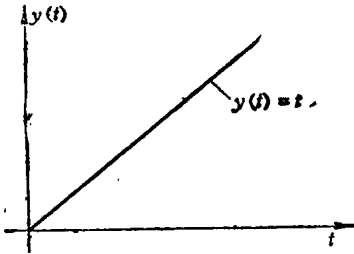


图1.1.5 积分环节的单位阶跃响应

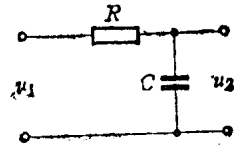


图1.1.6 RC电路

出时,描述RC电路的动态特性的微分方程式是

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

取初始条件为零的拉氏变换式得

$$(RCs + 1)u_2(s) = u_1(s)$$

由此得到非周期环节的传递函数为

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{u_2(s)}{u_1(s)} \\ &= \frac{1}{RCs + 1} \\ &= \frac{1}{Ts + 1} \end{aligned}$$

式中  $T = RC$ ，当R为欧姆 ( $\Omega$ )、C为法拉 (F) 时，T为秒 (s)。

当  $u_1(t)$  为单位阶跃函数时，其输出  $u_2(t)$  的单位阶跃响应曲线如图1.1.7所示。

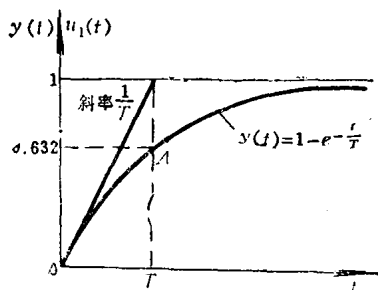


图1.1.7 非周期环节的单位阶跃响应曲线

因为  $u_1(t) = 1$ ，所以

$$U_1(s) = \frac{1}{s}$$

因此非周期环节的输出  $u_2(t)$  的象函数为

$$\begin{aligned} U_2(s) &= W(s)U_1(s) \\ &= \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

取拉氏反变换得

$$\begin{aligned} u_2(t) &= L^{-1}[U_2(s)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}\right] \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

由式 (1.1.15) 查拉氏变换表得到

$$u_2(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (1.1.16)$$

当  $t = 0$  时, 得

$$\begin{aligned} u_2(0) &= u_2(t) \Big|_{t=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

当  $t = T$  时, 得

$$\begin{aligned} u_2(T) &= 1 - e^{-1} \\ &= 0.632 \end{aligned}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 得

$$\begin{aligned} u_2(\infty) &= u_2(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这里应指出, 当  $u_2(t) = 0.632$  时, 即单位阶跃响应达到稳态值  $u_2(\infty) = 1$  的 63.2% 时, 必须满足  $t = T$ , 以此为依据, 提供了实验求取非周期环节的时间常数的方法。

单位阶跃响应在  $t = 0$  时的斜率为

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

这一结果说明, 如果单位阶跃响应按初始响应速度变化, 将在  $t = T$  时达到稳态值 (见图 1.1.7), 即

$$\begin{aligned} u_2(T) &= u_1(t) \Big|_{t > 0} \\ &= u_2(\infty) \end{aligned}$$

但实际上, 非周期环节的单位阶跃响应曲线的斜率是随时间  $t$  的增加而呈指数规律减小的。例如

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

$$t = T \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=T} = 0.368 \frac{1}{T}$$

$$t = 2T \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=2T} = 0.135 \frac{1}{T}$$

$$t = 3T \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=3T} = 0.0498 \frac{1}{T}$$

$$t = 4T \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=4T} = 0.0183 \frac{1}{T}$$

$$t = 5T \text{ 时} \quad \left. \frac{du_2(t)}{dt} \right|_{t=5T} = 0.00674 \frac{1}{T}$$

从以上分析看到，当  $t > 4T$  时，其斜率变化的数值已经很小。与此相应的  $u_2(t)$  的变化也很小，并且  $u_2(t)$  与稳态值  $u_2(\infty) = 1$  之间的误差已小于 2%，这时即认为阶跃响应达到稳态，所以可取  $t = 4T$  作为非周期环节响应曲线的过渡时间。时间常数越小，则所需要的过渡时间越小。

### 3. 振荡环节

传递函数为

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (1.1.18)$$

的元件等叫振荡环节。

〔例 1.1.7〕 如图 1.1.8 所示，是直流他激电动机拖动负载的示意图。当分别把加在电动机电枢上的电压  $u$  和电动机所拖动的负载转矩  $M_c$  作为输入量，输出量是电动机旋转的角速度  $\omega$ ，其传递函数推导如下。

应用牛顿定律，可列出式 (1.1.19) 的转矩方程式为



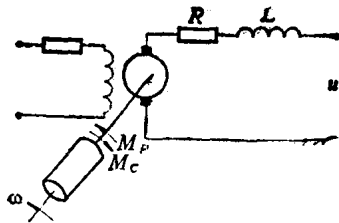


图1.1.8 直流他激电动机拖动负载的示意图

$$M_D - M_C = J \frac{d\omega}{dt} \quad (1.1.19)$$

式中  $J$ ——电动机及其他部分折合到电动机轴上的转动惯量；

$M_D$ ——电动机的电磁转矩；

$M_C$ ——电动机的负载转矩。

其中电磁转矩 $M_D$ 与电动机电枢电流 $i$ 和磁通 $\Phi$ 成正比，即有：

$$M_D = C_M \Phi i \quad (1.1.20)$$

式中  $C_M$ ——电动机的结构常数。

根据电动机的电枢回路，其电压平衡方程式为

$$u = e + L \frac{di}{dt} + Ri \quad (1.1.21)$$

式中  $L$ ——电动机电枢的电感；

$R$ ——电动机电枢的电阻；

$e$ ——电动机旋转产生的反电势。

电动机的反电势 $e$ 与磁通 $\Phi$ 和转速 $\omega$ 成比例，则有

$$e = C_e \Phi \omega \quad (1.1.22)$$

式中  $C_e$ ——电动机的结构常数。

由以上各式可得电动机的运动方程式为