函數圖象及二元二次聯立方程

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

新知識出版社

函數圖象及二元二次聯立方程

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

新知識出版社

一九五六年·上海

函數圖象及二元二次聯立方程

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 九 號)
上海市書刊出版業營業許可證出〇一五號

上海市刷印四廠印刷　新華書店上海發行所總經售

*

書號：新 0310

開本：787×1092 1/32　印張：3 1/4　字數：65,000
一九五六年二月第一版　一九五六年二月第一次印刷
印數：1—9,100 本

定價：(7 類)0.36 元

序　言

本會爲了學習蘇聯先進經驗，幫助教師積極提高教學質量，並根據當前中學教學實際需要，決定着手編寫有關高中數學各科包括代數、幾何、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中學數學教師作爲進一步研究和了解教材的參考，從而更好地掌握教材的教學目的。同時，也可供高中學生作爲課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通過這一套小册子的出版，能使數學界同志對中學數學教材的研究得到廣泛的交流。

這本"函數圖象及二元二次聯立方程"的小册子，對於變量與常量函數及其定義域、各種表示法作了較明確的敍述，並歸結函數的圖象法使代數與幾何攜手。在講解二元二次聯立方程的代數解法時，盡可能配合函數圖象來說明方程組根的組數，並通過例題敍述三元二次聯立方程、分式聯立方程、無理聯立方程的代數解法，使讀者可以窺見解法的基本原則。

本會在編寫本册前，曾擬就編寫計劃，邀請上海市十餘個學校的高中代數教師參加意見，又經編輯組兩次討論，然後確定初步提綱，分別由黄公安、夏守岱兩同志提供材料，而由范際平同志執筆寫成，再經程其襄、楊榮祥、黄公安、夏守岱諸同志校訂，最後由范際平同志作了修正。雖然這樣，但由於我們水平有

限，時間忽促，缺點是難免的，希望數學界同志予以批評和指正。

中國數學會上海分會中學數學研究委員會

一九五五年十二月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　錄

一　函數……………………………………………………… 1

二　圖象………………………………………………………12

三　二元二次聯立方程……………………………………37

一　函　數

函數依從關係的概念是由初等數學進入高等數學的基本樞紐。按初等數學乃古老的科學(17 世紀前的產物),所研究的對象是不變的量或圖形,所用的方法是孤立的,彼此不相聯系。像研究代數用的是解析法,卽用文字或式爲推理的主要對象,而研究幾何用的是綜合法,卽用圖形爲推理的主要對象,在本質上沒有一點聯系。高等數學是比較年輕的科學,所研究的對象是從依從關係中去研究變量的,在方法上是在代數方法與幾何方法密切結合的基礎上發展起來的。這種結合首先是笛卡兒(1596 年—1650 年)的解析幾何。換句話說,研究高等數學方法是辯證的,卽具有唯物辯證法兩大特徵:1. 認爲宇宙間各種現象是互相密切連系,互相依賴,互相制約的;2. 認爲宇宙間各種現象是不斷運動,不斷變化,不斷發展的。恩格斯說得好:"笛卡兒的變數是數學中的轉折點。因此運動和辯證法便進入了數學"①。數學的"初等"與"高等"區分是照慣例的,目前初等數學中已愈來愈多地包括了涉及高等數學的內容;那末函數的依從關係無疑地是中學數學課中最重要的概念。

讓我們先來說明量的概念。凡是可以施行度量的一切對象稱爲量。我們可取一個本質和被量對象相同的東西作爲度量單

① 恩格斯:"自然辯證法",人民出版社 1955 年版,第 217 頁。

位，然後直接定出該被量對象容納多少倍單位。例如我們度量布的長，可取一尺布爲度量單位（實際上我們用所製造的尺爲長度的度量單位），因而反映出量的大小是不名數。所以自然科學中雖有種種本質不同的量，例如長度、面積、體積、重量、溫度、速度等，但數學的量是要抽去各種量的具體性質而只注意它們的數值。由於這樣，才反映數學理論的共同性、普遍性和抽象性。恩格斯曾經說過，要研究空間和數量的純粹情形，“就應該完全把它們與其內容相分裂，把內容暫置不管，當作無所可否的東西”[1]。因而所謂量就是能加以度量並用數（一個或多個）表示出來的一切。

宇宙間的量分爲兩類：卽常量和變量。如果量永遠（或至少在已知問題中，已知研究的條件下）保持着同一確定的數值，則此量稱爲常量。例如圓周長與圓的直徑之比總是等於 $\pi=3.14159265358979\cdots\cdots$，是一個常量。任何三角形的內角和等於 $180°$，亦是一個常量。光在眞空中的速度、眞空中的溫度都是常量。如果量在已知問題的條件下，在已知研究的範圍內，取不同的數值，則此量稱爲變量。由於宇宙的現象是不斷地運動，不斷地發展，所以宇宙中極大多數的量是變量。例如大氣的壓力、空氣的溫度、火車的速度、人體的重量、太陽在地平面上的高度都是變量。

有時我們從表象看來認爲一個量是常量，但如把它仔細分析，就能發現它仍是時時刻刻在變化着的。例如我們觀察一晝夜間一根鐵棒的長度，似乎是不變的量。但事實上它的長度是

[1] 恩格斯：“反杜林論”，三聯書店 1953 年版，第 35 頁。

隨着空氣的溫度變化，時而增加，時而減小。它在冬天和在夏天的長度，是有明顯差別的。因此我們量一根鐵棒的長度，只可以說它在這個時間內的長度是一個常量，過了一些時間它的長度就要改變：不是伸長便是縮短。這樣我們就能體會到鐵軌的接頭處必須留出空隙的道理。區別一個量是常量還是變量，和問題的條件也有密切的關聯。例如我們研究 M 點在平面上的運動，設 r 爲此點到定點 0 的距離，α 表示半直線 OM 與定線段 OA 之間的角(圖 1)。

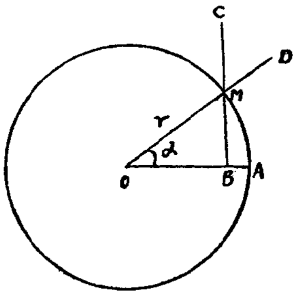

圖 1

(i)如果 M 點沿半徑爲 OM 的圓周運動，則 r 爲常量，α 爲變量。

(ii)如果 M 點沿半直線 OD 運動，則 α 爲常量，γ 爲變量。

(iii)如果 M 點沿垂直於 OA 的直線 BC 運動，則 r 與 α 都是變量，但乘積 $r\cos\alpha = OB$ 是常量。

由於數學中的量是抽去各種量的具體性質而只注意它們的數值，所以變數與變量、常數與常量的意義完全一樣。

設有兩個變量 x 與 y，如果其中任一個變量從它所要考慮的數集中所取的數值與另一變量取怎樣的數值無關，則此變量稱爲自變量。我們曉得自變量不能獨自成爲科學研究的對象，因爲它們可以彼此獨立地隨意地變化。但在宇宙中的現象並非在混亂的堆積狀態下，也不是簡單地存在着，它們是互相依賴，互相制約的。所以任何現象無論何時不是孤立地進行，而是常

常要引起一系列現象的變化，並且自己也取決於其他的一系列現象。例如：某人1小時行v里，則得勻速運動公式

$$s=vt,$$

此處s（距離）、t（時間）是變量，而v（速度）是常量。

我們容易看到如果某人1小時行4公里，則

2小時行8公里，

3小時行12公里，

……………………。

卽任與變量t某一個正值時，變量s能獲得一個確定的數值。這種變量間的關係，我們稱爲函數依從關係。一般說起來，如果對於一個變量x的每一個所考慮的數值，都對應着另一個變量y的一個或多個確定的數值，則後一個變量y稱爲前一個變量x的函數，而且變量x稱爲自變量，變量y稱爲因變量。

變量y是變量x的函數，可用記號$y=f(x)$表示之。要注意字母f在這裏已經不表示量，而是表示關係，也就是表示自變量與函數間的對應規律。

將自變量的一定數值代入函數的解析式子中，所得的數值稱爲函數值。例如當$x=a$，$y=b$，可用$b=f(a)$表示其函數值。又如自變量的每個所考慮的值對應了唯一確定的函數值，這種函數稱爲單值函數，否則就稱爲多值函數。今後如果沒有特別指明，我們所稱的函數，都是指單值函數。

爲了表示不同的函數關係除了記號$y=f(x)$外，還可用記號$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$等等來表示。例如：圓周長C及圓面積A都是圓的半徑r的函數。

由於　　　　$C=2\pi r$,　$A=\pi r^2$

此兩函數依從關係我們可分別記爲 $C=f(r)$, $A=F(r)$ 而表出它們的差別來。又如球的表面積 S 是球的半徑 r 的函數，亦是球的直徑 d 的函數。且

$$S=4\pi r^2=4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\pi d^2。$$

因其依從關係與 $A=\pi r^2$ 相同，故可用記號 $S=F(d)$ 表示之。

從上面所講的函數定義，我們體會到當自變量變動時並不要求函數也要變。而最主要的是每一個所考慮的自變量值對應着確定的函數值。所以 $y=k$ (k 爲常量)。對於自變量的一切值來說，所得的 y 的數值都是 k；自然亦是函數。我們更要特別注意"每一個所考慮的自變量值"的意義。簡單地說，所謂自變量所考慮的值就是自變量所能允許的值。例如 $C=2\pi r$ 。半徑 r 所允許的值是一切正數的集合。又如 n 邊凸多邊形的內角和 s 是按照公式

$$s=(n-2)180^\circ \text{ 計算的。}$$

所以內角和 s 是邊數 n 的函數，而自變量所允許的值是等於 3 或大於 3 的自然數集合。

函數 $y=x^2-1$，其自變量所允許的值易見是全部實數集合，可用開區間 $(-\infty, +\infty)$ 表示之。又函數 $y=\frac{1}{x}$，其自變量所允許的值是除了 0 的全部實數集合，可用開區間 $(-\infty, 0)$ 及開區間 $(0, +\infty)$ 表示之。此種自變量的一切被考慮的值所組成的集合稱爲函數的定義域。例如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

函數 $y=\sqrt{1-x^2}$，我們知道 $1-x^2\geqslant 0$ 時在實數集合中才有意義，卽 $x^2\leqslant 1$，亦卽 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 是函數的定義域，可用閉區間 $[-1, 1]$ 表示之，表明 $-1, 1$ 都在定義域中。又如函數 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定義域是半開區間 $(-\infty, -1]$ 及半閉區間 $[+1, +\infty)$。(先開後閉的區間稱爲半開區間；先閉後開的區間稱爲半閉區間)

同樣，函數 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定義域是開區間 $(-1,1)$，因爲分母不能爲 0，所以 $-1,1$，都不在定義域中。函數 $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 的定義域是開區間 $(-\infty,1)$ 及開區間 $(1,+\infty)$。函數 $y=\dfrac{4}{x^2-4x}$ 的定義域是開區間 $(-\infty, 0)$，開區間 $(0, 4)$ 及開區間 $(4, +\infty)$。

按中學代數有四個主要內容：1. 數的概念的發展；2. 恆等變換；3. 方程；4. 函數。我們曉得方程 $y^2-4x=0$ 的解，例如 $x=1$, $y^2=4$, $y=\pm 2$；$x=2$, $y^2=8$, $y=\pm\sqrt{8}$ 是適合函數定義的。卽每給 x 一個正值，可得 y 的對應兩個確定值。所以這是兩值函數，它的定義域是半閉區間 $[0, +\infty)$。不過這個函數在變量 x 及 y 之間，沒有解出 y 的方程所給定的函數 y 罷了。這種函數我們稱爲自變量 x 的隱函數，而函數 $y=\pm 2\sqrt{x}$ 則稱爲自變量 x 的顯函數。所以我們研究方程與討論函數有關，例如方程 $x^2+y^2-5=0$，令 $y=1$，得 $x^2-4=0$，解得 $x=\pm 2$。卽表明要想自變量是 x 的隱函數 $x^2+y^2-5=0$ 的函數值爲 1，其自變量值應爲 ± 2。同理要想它的函數值爲零，應解 $x^2-5=0$，卽 $x=\pm\sqrt{5}$。同時我們曉得含有一個變量的代數式自然是函數，過去我們求某代數式的數值，就是求函數值。而所謂恆等變

換的目的，大部分是化爲簡單形式而便於求函數值。至於數的概念，由於解決問題的需要，數的概念擴張是必然趨勢。例如解方程 $x+2=1$，或求使函數 $y=x+1$ 爲零的 x 值，自然要產生負數。所以我們可以說中學代數的中心內容是函數。函數依從關係雖然在高一下才正式講授，但過去所讀的代數哪一部分不是與函數發生密切關係呢？又在中小學算術中所討論的和、差、積、商的變化，例如除數不變，被除數擴大（或縮小）若干倍，則商亦擴大（或縮小）相同的倍數，又如被除數不變，除數擴大（或縮小）若干倍，則商縮小（或擴大）相同的倍數，不是很明顯地培養函數概念嗎？

過去我們講代數式的意義，例如無理式 $\sqrt{1-x^2}$，只有 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 時在實數集合中才有意義。閉區間 $[-1, 1]$ 可稱爲代數式子（或解析式子）的定值域或存在域。在一般情況，函數 $y=f(x)$ 如果在給定時不附加任何條件，我們總把它所對應的解析式子的存在域作爲該函數的定義域。

但如圓面積公式 $A=\pi r^2$。

由於 r 不能爲負數，r 如爲零，A 亦爲零，仍是沒有意義。爲了切合實際情況，它的定義域是開區間 $(0, +\infty)$。但要注意給定這函數的解析式子 πr^2 的存在域却是開區間 $(-\infty, +\infty)$。

定義域的意義明瞭後，函數的意義便非常明確了。卽：如果對於集合 M 中的每一個元素 x，在集合 N 中有一個（或幾個）元素 y 與之對應，則 y 稱爲 x 的函數。此處集合 M 乃自變量值的集合，卽函數的定義域，而集合 N 乃函數值的集合。

又兩個變量的每一對所考慮的數值對應着另一個變量的一個或幾個數值，則第三個變量叫做前兩個變量的函數。

例如：矩形的面積乃是兩個變量——矩形的長 a 和闊 b 的函數卽 $s=ab$，我們可用記號 $s=f(a,\ b)$ 表示之。它的定義域是笛卡兒坐標系中第一象限內的點。

一般說起來，n 個自變量的每一批所考慮的 n 個值對應着另一變量的一個或幾個值，則最後那個變量稱爲前面 n 個自變量的函數。

在中學代數中，總是研究具有一個自變量的函數。

函數依從關係是由於因果關係產生出來的，但它們在本質上是有差別的。因果關係需要找出那引起已知結果的確實原因，但函數依從關係僅提供兩個量的關係，並不一定認爲其中某個量的變化乃是他量變化的實際原因。例如一晝夜空氣溫度變化與時間變化的關係是函數依從關係；但時間變化顯然不是溫度變化的原因。風力的變化、太陽幅射力的強弱、空氣的濕度才是溫度變化的原因。所以因果關係是函數依從關係，是產生函數依從關係的源泉，但函數依從關係不一定是因果關係。

表示函數依從關係有各種不同的方法。通常有下列三種表示法：

1. 列表法　這種表示方法，是將一系列的自變量值與其對應的函數值寫出來。例如自然數列的對應因數個數是一個函數依從關係，這裏自變量值的集合是所有自然數的集合，而函數值的集合也是所有自然數的集合。我們可以列成下表指出這種依從關係：

自然數列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
因數個數	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	…

這種方法我們是常用的。例如平方表、平方根表、三角函數表以及高中二年級講到的對數表都是。至於物理化學的實驗結果，更是這個方法的應用。下面是正弦函數表：

角度	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°
正弦值	0.5736	0.5878	0.6018	0.6157	0.6293	0.6428	0.6561	0.6691

這種方法的優點就是表中每一個自變量值不需要經過任何計算或度量，馬上可以讀出它的對應的函數值。它所存在的缺點是：(i)由於表格通常不可能把全部函數值完全給出，自然有一些自變量值沒有列在表中。上面正弦的函數表，小於 35° 或大於 42° 的正弦函數值便沒有列出。又 36.5° 的正弦函數值，表中亦未列出。我們固然可用補插法算出 sin 36.5° 的近似值來，但計算起來是要花很多手續的；(ii)我們從表格中不容易看出自變量變動時函數變動的情況，所以這種表示方法不醒目。

2. 解析法　即用解析式子表出函數依從關係例如 $y=\frac{1}{x}$, $y^2-4x=0$ 皆是。

函數亦可由不同的解析式子於其定義域的不同部分內被給定出來。例如：　函數

$$y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{當 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 時},\\ 1+x. & \text{當 } x>1 \text{ 時}.\end{cases}$$

我們曉得當 $x\geqslant 0$ 時，這是個完全確定了的函數，即它的定義域是半閉區間 $[0, +\infty)$。但這個函數在閉區間 $[0, 1]$ 及開

區間 $(1, +\infty)$ 却各用彼此不相同且又不能化爲一樣的兩個解析式子來表示。因而我們更進一步體會到函數的定義域與解析式子的定值域有時是有區別的。

這種表示方法的優點是:(i)表出的形式簡扼緊湊，非常明確;(ii)只要在函數定義域中任與自變量某一數值卽可按解析式子的運算次序算出它的對應函數值來;(iii)如果我們曉得函數依從關係的解析式子，那就便於我們深入研究它的性質。這種方法的缺點是:(i)不夠醒目;(ii)必須經過運算,有時還是很繁雜的運算才能求出它的對應的函數值來。

3. 圖象法　前面已經講過一晝夜的溫度變化是時間變化的函數。例如夏天某日一晝夜的溫度變化情形，用下面圖象表出:

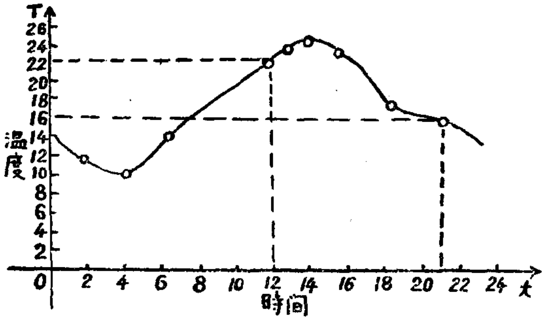

圖 2

我們如果要問 $t=12$ 卽中午溫度是多少，可在水平軸上點 $t=12$ 處作垂線與曲線相交。由交點向垂直軸作垂線卽可在垂直軸上讀出所求的溫度是 $T=22°C$。同樣可以求出 $t=21$ 時的溫度爲 $T=16.5°C$ (圖 2)。

這種方法的優點是明顯醒目。它的缺點是:(i)沒有解析式子,繼續深入研究困難;(ii)由圖象中讀出對應的函數值不大準確。

我們不應當認為每個函數的圖象都可以在圖上實際地表示出來。例如著名的季里黑(Dirichlet 1805年—1859年)函數。

$$y=\begin{cases}1, & \text{當 } x \text{ 為有理數,}\\ 0。 & \text{當 } x \text{ 為無理數。}\end{cases}$$

因為無論怎樣小的區間內都有無數個有理數和無理數,它們的對應值取1與0各是無數次,所以這個函數的圖象不能實際地表示出來。但這個函數的定義是很簡單和明晰的,它的定義域很明顯地是開區間$(-\infty, +\infty)$。

中學代數中研究函數,主要是三種表示法聯系起來應用。卽先用解析法寫出它的解析式子,由此關係式列出自變量值與對應函數值的表格,再把它們繪成圖象。那末所表示的函數便非常直觀醒目而且意義非常明確。一般的圖象法是坐標法。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com