

运筹学

陈凯
刘大成 编著
潘毅才

Y
U
N
C
H
O
U
X
U
E



河北教育出版社

前 言

本书的初稿——《运筹学讲义》已有多人在教学中用过多次。受到了学生的普遍欢迎。他们说：这本讲义系统完整，逻辑性强；重点突出，概念清晰；强调实用。实例分析使我们了解到运筹学理论如何用于实践；叙述上深入浅出，容易理解；例题分析教会了我们分析问题解决问题的本领；每章的问题及习题，启发我们多想问题及时进行小结。这本运筹学讲义我们喜欢。本书在使用中不断地进行了修改和完善，并得到了中国数学会运筹学会常务副理事长，中国科学院应用数学所研究员桂湘云同志的帮助并为本书写了序言。北方工业大学系统工程与人工智能研究所所长陈来安教授对本书的初稿提出过宝贵意见。最后，我们经过了认真修改，才将本书献给读者。在此我们向桂湘云同志和陈来安同志表示感谢。

由于作者的水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作者

1988年7月于北京

序 言

由于社会生产力与科学技术的发展，各部门内和各部门之间出现许多大规模的复杂的经济计划和管理问题。为了实现四个现代化，应用现代的科学管理方法来解决这些问题是十分必要的。运筹学是近几十年新发展起来的一门学科，它运用数学模型模拟和描述生产经营活动，并结合数学方法和计算机技术为决策者提供决策的科学依据。

冶金工业是重要的原材料工业，冶金企业规模大，产品种类繁多，生产工艺复杂，是一个大型复杂系统，需要运用运筹学方法作为现代的科学管理工具来提高管理水平和经济效益。本书是为经济管理类专业学生编写的，包括了与经济管理有关的运筹学的主要分枝。本书着重介绍目前的有效的实用方法以及有关的理论基础。本书的特点是，通过实例介绍数学模型的建立，求解的方法与对计算结果的分析，通俗易懂，逻辑性强，便于自学。作者对本书的重要方法附有可在微机上用的 BASIC 程序，这无疑对读者今后在解决实际问题时利用微机进行计算是十分有利的。本书除作为有关专业的教材外，还可供管理干部学院的学员作教学参考书，特别适合于在职的企业管理干部自学用。

中国数学会运筹学会常务副理事长

中国科学院应用数学所研究员

桂湘云

1987.5.21

目 录

第一章 运筹学简介.....	(1)
§1 什么是运筹学	(1)
§2 运筹学简史	(4)
§3 运筹学的特点和主要内容	(6)
一、运筹学的特点.....	(6)
二、运筹学的主要内容.....	(7)

第一篇 线性规划

第二章 线性规划的基本概念.....	(8)
§1 什么是线性规划	(8)
一、例.....	(8)
二、线性规划的数学模型.....	(11)
§2 二维线性规划问题的图解法	(17)
一、二维线性规划问题的一般解法及其几何解释.....	(17)
二、图解法.....	(23)
§3 例题分析	(27)
问题及习题.....	(39)
第三章 单纯形法.....	(44)
§1 基本概念	(44)
一、线性规划问题的标准形式.....	(44)
二、线性规划的数学模型和它的标准形式的等价性.....	(48)
三、基本可行解.....	(49)
四、凸集.....	(56)

§ 2 基本定理	(58)
一、定理 1	(58)
二、定理 2	(59)
三、定理 3	(60)
四、定理 4	(62)
五、定理 5	(63)
六、本节小结	(64)
§ 3 单纯形法	(64)
一、在原数学模型中函数约束条件均为“ \leq ”型的 线性规划问题	(65)
二、原约束条件非均为“ \leq ”型的线性规划问题	(84)
§ 4 例题分析	(97)
问题及习题	(106)
第四章 对偶问题	(111)
§ 1 基本概念	(111)
一、实例	(111)
二、对偶问题的定义	(113)
§ 2 对偶定理	(116)
一、弱对偶性定理	(116)
二、强对偶性定理(简称对偶定理)	(118)
三、检验数定理	(121)
§ 3 对偶单纯形法	(126)
一、基本思路	(126)
二、对偶单纯形法的解题步骤	(127)
§ 4 对偶问题的经济解释	(129)
一、原问题的经济意义	(129)
二、对偶问题的经济意义	(131)
三、松弛变量	(132)

四、影子价格	(132)
§ 5 例题分析	(136)
§ 6 实例分析	(145)
问题及习题	(150)
第五章 灵敏度分析	(154)
§ 1 引言	(154)
§ 2 灵敏度分析	(156)
一、目标函数中 c_i 变化的分析	(156)
二、常数项 b_i 变化的分析	(161)
三、增加新变量的分析	(164)
四、增加新约束条件的分析	(167)
问题及习题	(170)
第六章 运输问题	(173)
§ 1 运输问题的基本理论	(173)
一、问题的提法和数学模型	(173)
二、基本性质	(175)
§ 2 表上作业法	(177)
一、求初始基本可行解	(177)
二、最优方案判别法	(180)
三、方案的调整	(183)
§ 3 例题分析	(185)
问题及习题	(191)

第二篇 整数规划

第七章 整数规划	(193)
§ 1 基本概念	(193)
§ 2 分枝定界法	(196)
一、基本思路	(196)

二、解题步骤	(202)
三、两个具体问题	(204)
§ 3 割平面法	(207)
一、基本思路	(207)
二、割平面的求法	(214)
§ 4 0-1型整数规划	(214)
§ 5 实例分析	(218)
问题及习题	(223)

第三篇 非线性规划

第八章 基本概念和一维搜索	(226)
§ 1 基本概念	(226)
一、例题分析	(226)
二、非线性规划的数学模型	(228)
三、本篇概貌	(231)
§ 2 预备知识	(232)
一、极值问题	(232)
二、凸函数	(236)
§ 3 凸规划	(240)
一、定义	(240)
二、定理	(241)
§ 4 一维搜索法	(244)
一、问题的提出	(244)
二、一种搜索区间的求法	(246)
三、斐波那契(Fibonacci)法	(247)
四、黄金分割法	(255)
五、牛顿法	(260)
问题及习题	(262)

第九章 多维无约束最值问题的近似解法	(265)
§ 1 最速下降法	(266)
一、最速下降法的基本思路	(266)
二、最速下降法的数学描述	(266)
三、最速下降法的迭代步骤	(268)
四、收敛性	(272)
五、最速下降法的优缺点和适用场合	(272)
§ 2 牛顿法	(272)
一、原理	(272)
二、牛顿法的计算步骤	(273)
三、收敛性和广义牛顿法	(275)
四、广义牛顿法的优缺点及适用场合	(276)
§ 3 共轭梯度法	(276)
一、共轭方向及其性质	(277)
二、共轭梯度法	(280)
三、共轭梯度法的优缺点及适用场合	(287)
§ 4 变尺度法	(288)
一、DFP法的基本思想	(288)
二、DFP法迭代步骤	(290)
三、收敛性	(293)
四、优缺点及适用场合	(294)
§ 5 坐标轮换法	(294)
一、基本思路	(294)
二、迭代步骤	(296)
三、优缺点和适用场合	(298)
§ 6 方向加速法	(298)
一、基本思想	(299)
二、方向加速法的计算步骤	(299)

§7 例题分析	(303)
问题及习题	(305)
第十章 多维有约束最值问题简介	(308)
§1 库恩—塔克 (Kuhn—Tucker) 条件	(309)
一、预备知识	(309)
二、库恩—塔克条件	(312)
三、说明	(313)
§2 序列无约束最小化方法	(314)
一、SUMT 外点法	(314)
二、SUMT 内点法	(320)
§3 实例分析	(324)
问题及习题	(325)

第四篇 动态规划

第十一章 动态规划	(327)
§1 动态规划的概念和基本方程	(327)
一、基本概念	(331)
二、动态规划的基本方程	(333)
§2 函数迭代法和策略迭代法	(336)
一、函数迭代法	(337)
二、策略迭代法	(341)
三、两种迭代法的比较	(344)
§3 动态规划应用举例	(345)
一、资源分配问题	(345)
二、商业计划问题	(350)
三、最优排序问题	(354)
§4 实例分析	(359)
问题及习题	(461)

第五篇 图 论

第十二章 图论基础	(365)
§1 图的概念	(365)
一、什么是图	(365)
二、图的连通性	(372)
三、子图	(374)
§2 树	(375)
一、树的概念	(375)
二、树的性质及有关定理	(376)
三、图的部分树	(378)
§3 最小部分树问题	(380)
一、问题的提法	(380)
二、最小树定理	(381)
三、求最小树的算法	(381)
§4 图的矩阵表示法	(382)
一、邻接矩阵	(382)
二、关联矩阵	(384)
三、点弧矩阵	(386)
§5 例题分析	(387)
问题及习题	(390)
第十三章 网络分析	(393)
§1 最短路问题	(394)
一、问题的提法	(394)
二、求最短路的方法	(395)
三、应用举例	(401)
§2 最大流问题	(406)
一、有关流的概念	(406)

二、最大流问题的提法	(408)
三、割切	(408)
四、求最大流的标号法	(412)
§3 最小费用最大流问题	(417)
一、问题的提法	(418)
二、基本概念和基本定理	(419)
三、求最小费用最大流的算法	(422)
问题及习题	(427)

第六篇 对 策 论

第十四章 对策论	(430)
§1 对策论的基本概念	(430)
一、对策现象	(430)
二、对策现象的三个基本要素	(431)
三、对策的分类	(434)
§2 矩阵对策的基本理论	(434)
一、矩阵对策的定义	(434)
二、矩阵对策的数学模型	(435)
三、矩阵对策的最优纯策略	(437)
四、混合策略与混合扩充	(445)
五、矩阵对策解的性质	(456)
§3 矩阵对策的解法	(457)
一、 2×2 矩阵对策的解法	(457)
二、支配原则	(460)
三、图解法	(465)
四、线性规划法	(470)
§4 例题分析	(475)
§5 实例分析	(483)

问题及习题	(486)
-------	-------

第七篇 排队论

第十五章 排队论基础	(490)
§ 1 基本概念	(490)
一、排队过程的一般表示	(490)
二、排队系统的特征	(491)
三、排队系统模型分类的记号	(498)
四、排队模型的几个数量指标	(499)
§ 2 $M/M/1$ 排队系统	(500)
一、标准的 $M/M/1/\infty$ 模型	(501)
二、 $M/M/1/N$ 系统	(512)
三、顾客源为有限(m)的情形	(516)
§ 3 $M/M/S$ 排队系统	(519)
一、标准的 $M/M/S/\infty$ 模型	(519)
二、 $M/M/S/N$ 排队系统	(522)
三、顾客源为有限(m)的情形	(526)
§ 4 排队系统的最优化	(530)
一、 $M/M/1/\infty$ 排队系统中最优服务率 μ	(530)
二、 $M/M/S/\infty$ 排队系统中最优服务台数 S	(537)
§ 5 实例分析	(540)
问题及习题	(547)
第十六章 决策论	(551)
§ 1 决策的类型与价值函数	(551)
一、确定型决策问题	(551)
二、风险型决策问题	(552)
三、非确定型决策问题	(553)
四、竞争型决策问题	(553)

五、模糊型决策问题	(553)
六、价值函数	(554)
§2 风险型决策方法	(555)
一、期望值准则	(555)
二、决策树方法	(558)
三、贝叶斯决策	(562)
四、马尔柯夫分析法	(566)
§3 非确定性决策方法	(575)
一、等概率法	(576)
二、最大最小益损值法	(577)
三、乐观系数准则	(577)
四、后悔值准则	(578)
五、效用值准则	(580)
§4 模糊决策简介	(584)
一、模糊集合及其运算	(584)
二、模糊目标与模糊约束	(585)
三、单目标模糊决策	(586)
四、多目标模糊决策	(587)
§5 例题分析	(590)
问题及习题	(597)
第十七章 计算程序及其使用说明	(600)
一、解线性规划的单纯形法程序	(600)
二、一维搜索的黄金分割法程序	(614)
三、共轭梯度法程序	(616)
四、SUMT 外点法程序	(622)
五、最短路问题的动态规划程序	(630)
六、资源分配问题的动态规划程序	(639)
七、有限队长无限源多服务台系统程序	(645)

附 录

符号表.....	(650)
参考书目.....	(652)
各章问题及习题的答案或提示.....	(653)

第一章 运筹学简介

§ 1 什么是运筹学

人类社会的生产和组织进入一定水平之后,人们在考虑生产,战争等问题时,自然就要仔细筹划,制定行动规范,决定行动的策略,以期用最小的代价获得最大的收益.一般我们把这叫做决策.要想使决策尽可能对决策者有利,他的思想方法和使用的手段就必须是科学的,合乎客观规律的.“进行筹划,制定策略”我国古代叫做“运筹”.《汉书,高帝纪》上记载,“上(刘邦)曰:夫运筹帷幄之中,决胜于千里之外,吾不如子房(张良).”这就是运筹一词的来源.由此可见,运筹的含意就是,进行筹划,制定策略,使事物的发展尽可能地对决策者有利.下面,我们举例具体说明运筹学所解决的问题.

例1 某厂有A、B、C三种设备,打算生产I、II两种产品.每种产品各有两道工序.已知产品I的第一道工序在A设备上加工,第二道工序在C设备上加工;产品II的第一道工序在B设备上加工,第二道工序在C设备上加工.每个产品在各设备上所需要的加工时数,每种设备每天的有效台时数以及每件产品所获得的利润如表1.1所示.问该厂如何安排生产才能获得最大利润?

解 ①建立数学模型 即把问题用数学式子表出.设 x_1 , x_2 分别表示每天所生产的产品I和产品II的件数. z 表示每天的总利润,则

总利润 = 产品I的利润 + 产品II的利润,

表 1.1

设备 \ 产品	产品		有效台时数
	I	II	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
每件利润	3 (千元)	5 (千元)	

即

$$z = 3x_1 + 5x_2, \quad (1.1.1)$$

由所论问题可知, (1.1.1) 中的 x_1 和 x_2 不能任意取值, 而应受到以下限制。

因为 x_1 和 x_2 分别表示产品 I 和产品 II 每天生产的件数, 所以它们都应该大于等于 0, 即

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (1.1.2)$$

产品 I 每天消耗的设备 A 的台时数应 \leq 设备 A 每天的有效台时数, 即

$$x_1 \leq 4. \quad (1.1.3)$$

同理

$$2x_2 \leq 12; \quad (1.1.4)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18. \quad (1.1.5)$$

综合上述, 所论问题可以归纳为求

$$z = 3x_1 + 5x_2, \quad (1.1.1)$$

在条件

$$\begin{cases} x_1 \leq 4; & (1.1.3) \\ 2x_2 \leq 12; & (1.1.4) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18; & (1.1.5) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (1.1.2) \end{cases}$$

下的最大值。

②求解

同时满足 (1.1.2)~(1.1.5) 各个条件的点 (x_1, x_2) 构成图 1-1 所示域 D 。我们求解的问题化为求 $z = 3x_1 + 5x_2$ 在域 D 上的最大值。这是典型的多元函数求在给定位域上最大值的问题，在微积分中已讨论过。可以求得（见第二章 § 2 例 2）最大值点为 $(2, 6)$ ，最大值为 $z = f(2, 6) = 36$ (千元)。

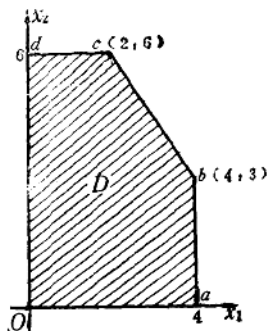


图 1-1

③应用

②的结果向该厂的决策者表明，按每天生产 2 件产品 I，6 件产品 II 按排生产，所获利润最大。这就为决策者进行决策提供了科学依据。

例 2 “齐王赛马”。两千年以前，有一天，齐国的国王提出要和他的大将田忌赛马，田忌答应了。双方约定：①各出三匹马；②每人均从自己的上、中、下三个等级的马中各选一匹；③各匹马均参加比赛，而且只参加一次；④每次比赛各出一匹马，共赛三次；⑤每次比赛后负者给胜者千金。当时的情况是，每个等级的马，齐王的均比田忌的强一些，但是田忌每个等级的马比齐王次一级的强。这样若赛马时，田忌和齐王的马总是一等对一等，二等对二等，三等对三等，则田忌必输三千金。当时田忌的朋友给田忌出了个一主意：①每次比赛前先让齐王说出他要出那匹马；②用下马对齐王的上马(负)；用上马对齐王的中马(胜)；用中马对齐王的下马(胜)，即

