·高等学校教学用书·

实用数值计算方法与程序

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

实用数值计算方法与程序

北京科技大学 吴继庚 编

冶 金 工 业 出 版 社

高 等 学 校 教 学 用 书

实用数值计算方法与程序

北京科技大学 吴继庚 编

*

冶 金 工 业 出 版 社 出 版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787 ×1092 1/16　印张 16 字数 380 千字

1991年5月第一版　1991年5月第一次印刷

印数00,001～4,000册

ISBN 7-5024-0841-X

O·17（课）定价4.15元

前　　言

随着电子计算机技术的迅速发展，电算方法及其应用已推广到各个学科领域，尤其是微型电子计算机的应用目前已普及到各基层单位。对学生及工程技术人员来说，如果掌握了算法程序，自已能设计有关的数值计算软件，那将会使教学、科研工作大大提高一步。笔者正是为了满足这方面的需要，根据自己多年来的科学研究和教学实践，总结了自己的经验和体会，尝试着编写了这本《实用数值计算方法与程序》。

本书主要内容包括：方程求根、插值计算、回归分析、数值积分、线性方程组求解、常微分方程计算等几个部分。每部分内容都是按方法概述、公式推导、计算步骤、程序框图、程序全文、计算例题这一结构，在理论分析的基础上介绍程序实例，以便于自学。

为适应教学的需要，本书除对必要的计算公式进行推导、证明及分析外，还对每个算法进行了程序设计，内容包括程序框图、主要标识符含意、计算例题、BASIC语言程序等。书中选用的程序全部在IBM-PC微机上调试通过。若选用其它型号的计算机时，只要将程序中的某些语句进行局部语法修改，即可顺利地使用。

本书在编写过程中，得到了林学福、马正午、江心智等同志的帮助，在此一并表示谢意。

由于本人水平有限，时间仓促，书中不当之处，敬请读者批评指正。

吴继庚

1990年9月

目　　录

第一章　方程求根

方程求根的数学形式为$f(x)=0$，即求解满足于方程的x值，采用不同的方法都可求解x值。

函数求值的数学形式为$y=f(x)$，即给定一个自变量x值，就可得到相应的因变量y值。当给出一系列x值时，即可得到一系列的y值。

分析方程求根与函数求值的概念可知：函数$y=f(x)$具有零点值时的x值，即为方程$f(x)=0$的根。换句话说，也就是求得函数$y=f(x)$的实零点值，如图1-1所示。

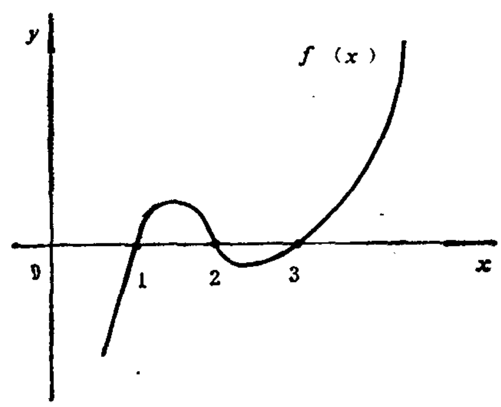

图1-1　方程与函数的关系

现举例说明方程与函数的关系：

已知方程式　　$x^3-6x^2+11x-6=0$

已知函数式　　$y=x^3-6x^2+11x-6$

给定x的取值范围是　　$x\in[0.5, 3.5]$

若间距取值0.5，经计算可得下列函数值：

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
y	−1.875	0	0.375	0	−0.375	0	1.875

由上述所计算的函数值可以看出，方程的根为：

$$x_1=1.0,\ x_2=2.0,\ x_3=3.0$$

第一节　迭代求根中的几个问题

对于一个超越方程或高阶代数方程，求解其一个根或多个根的最实用、最有效的方法即是数值迭代法。

数值迭代法就是给定一个初始值，按照一定规律，反复递推、迭代计算，使每次计算的中间值都逐步逼近一个稳定值，根据计算精度的需要，可取某个靠近稳定值的中间值作为迭代数值解。

在迭代求根中，首先介绍如下的几个问题：求根迭代式的建立、迭代过程的收敛性、迭代过程的收敛速度、如何加速迭代收敛等。

一、迭代公式的建立

已知一个原方程$f(x)=0$，将它改写为一个等价方程$x=\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$ 称为迭代函数。

设　$x=\varphi(x)$　　则$x-\varphi(x)=0$

因　$f(x)=0$　　则$f(x)=x-\varphi(x)$

因此可得　　$\varphi(x)=x-f(x)$

利用等价方程$x=\varphi(x)$，写成迭代形式为：

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots\cdots,\ \infty)$$

经过k次迭代，在收敛的情况下，即可得到方程的根x^*：

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_k$$

现将等价方程两端分别写成两个函数形式，并以图1-2表示。

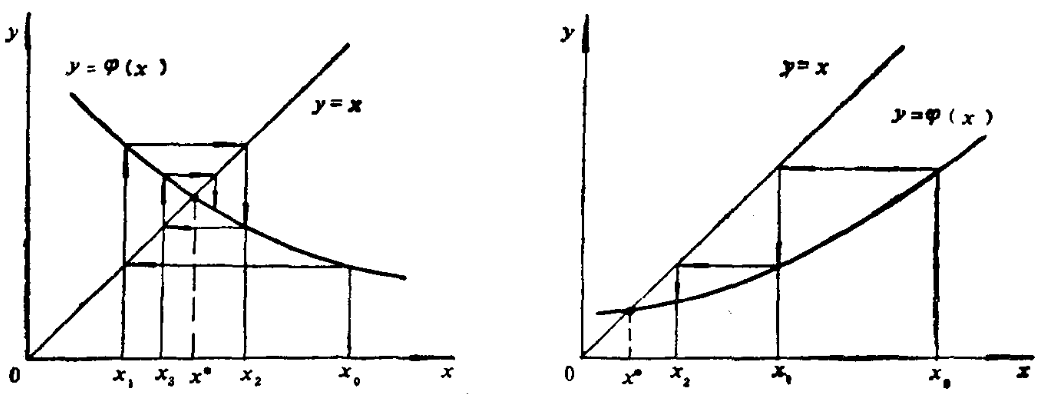

图 1-2　方程求根迭代过程

将等价方程　$x=\varphi(x)$　分解为两个函数$\begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x)\end{cases}$

给定x_0　　迭代可得　$x_1=\varphi(x_0)$

利用x_1　　迭代可得　$x_2=\varphi(x_1)$

利用x_2　　迭代可得　$x_3=\varphi(x_2)$

⋮　　⋮

利用x_k　　迭代可得　$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

⋮　　⋮

因此可得结论：$x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,\ \infty)$

例如，已知方程$f(x)=x^3+4x^2-10=0$，给定解区间为$x\in[1,2]$，其精确解为$x^*=1.36523001$。现利用不同的方法，可将原方程$f(x)=0$转换为如下的几个等价方程：

第①式　　　$x=\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$

$$\because \quad \varphi(x)=x-f(x)$$

第②式 $$x=\varphi_2(x)=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\because \quad \frac{x^3+4x^2-10}{x}=x^2+4x-\frac{10}{x}=0$$

第③式 $$x=\varphi_3(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\because \quad (2x)^2=10-x^3$$

第④式 $$x=\varphi_4(x)=\left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\because \quad \frac{x^3+4x^2-10}{x^2}=x+4-\frac{10}{x^2}=0$$

$$x+4=\frac{10}{x^2},\quad x^2=\frac{10}{4+x}$$

第⑤式 $$x=\varphi_5(x)=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$$

$$\because \quad x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

当给定初始迭代值$x_0=1.5$时，分别对上述五个迭代式进行迭代计算，即可得到如下的迭代计算过程及计算结果（表1-1）。

表 1-1 五种迭代式的计算过程

k	第 ① 式	第 ② 式	第 ③ 式	第 ④ 式	第 ⑤ 式
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.28695377	1.34839973	1.37333333
2	6.732	2.9969	1.40254080	1.36737637	1.36526201
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.34545838	1.36495701	1.36523001
4	1.03×10^8		1.37517025	1.36526475	
5			1.36009419	1.36522559	
6			1.36784697	1.36523058	
7			1.36388700	1.36522994	
8			1.36591673	1.36523002	
9			1.36487822	1.36523001	
10			1.36541006		
15			1.36522368		
20			1.36523024		
23			1.36522998		
25			1.36523001		
结　　论	发　　散	非　　法	25　次	9　次	3　次

根据上表中的计算过程及结果，可得出如下不同的结论：

第①式　$x=x-x^3-4x^2+10$　………………迭代发散

第②式　$x=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{\frac{1}{2}}$　……………………迭代非法

第③式　$x=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$　…………………迭代25次

第④式　$x=\left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$　……………………迭代9次

第⑤式　$x=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$　………………迭代3次

二、迭代过程的收敛性

在方程迭代求根过程中，如果能得到一个稳定的解，则称为迭代收敛，否则称为发散。方程迭代求解的收敛过程与发散过程，称它为迭代过程的收敛性。

1．方程求根迭代式的性质

方程迭代式　$x_{k+1}=\varphi(x_k)$　$(k=0,1,2,\cdots\cdots)$

迭代过程的解序列为　x_0，x_1，x_2，……，x_k，……，x^*

若　$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$　则称迭代过程收敛

若　$\lim\limits_{k\to\infty}x_k\neq x^*$　则称迭代过程发散

2．迭代过程的几个要点

（1）原始方程式的构型　已知方程式$f(x)=0$，其最简单的构造迭代函数

$$\varphi(x)=x-f(x)$$

例如　$f(x)=x^3+4x^2-10=0$

则有　$\varphi(x)=x-x^3-4x^2+10$

此式在迭代过程中是发散的，不具备收敛的条件，因此，这种简单的构造迭代式是不理想的，必须转换为其它形式的迭代式。

（2）等价式的转换　在给定原始方程式的情况下，利用数学变换的方法，将它改变为新的构型形式。例如上面对给定的方程式$f(x)=x^3+4x^2-10=0$进行了五种迭代式的转换，并列表计算了方程求根的迭代过程及运算结果。从表中可以明显地看出不同的等价转换式其计算结果是有很大差异的。因此，方程等价式的转换形式是很重要的，它直接影响着方程迭代求解的收敛性。

第①式与第②式的等价转换式是失败的。

第③、④、⑤式的等价转换式是成功的。虽然这三个迭代式是收敛的，但它们的收敛速度不同。

（3）迭代初始点的选取　有些方程式的等价转换式，在迭代开始时，对初始迭代点x_0要求是很严格的。选取不同的初始迭代点x_0，很可能使等价式在迭代过程中出现三种情况：正常迭代并快速收敛；迭代虽正常，但收敛速度很缓慢；迭代不正常，数值越算越大或造成计算非法，迭代发散、失败。因此，迭代初始点x_0的选取也影响方程迭代过程的

收敛性。

3．迭代收敛的条件

在各类数值计算中，迭代求解的方法是一种最常用的方法，而迭代过程的关键是看迭代是否收敛。这里着重分析方程迭代求根的收敛条件，以便对方程求根作出正确的结论。

（1）几何图形的解释　根据方程迭代求根的过程，从几何的观点看可绘制八张图，即八种情况（图1-3）。

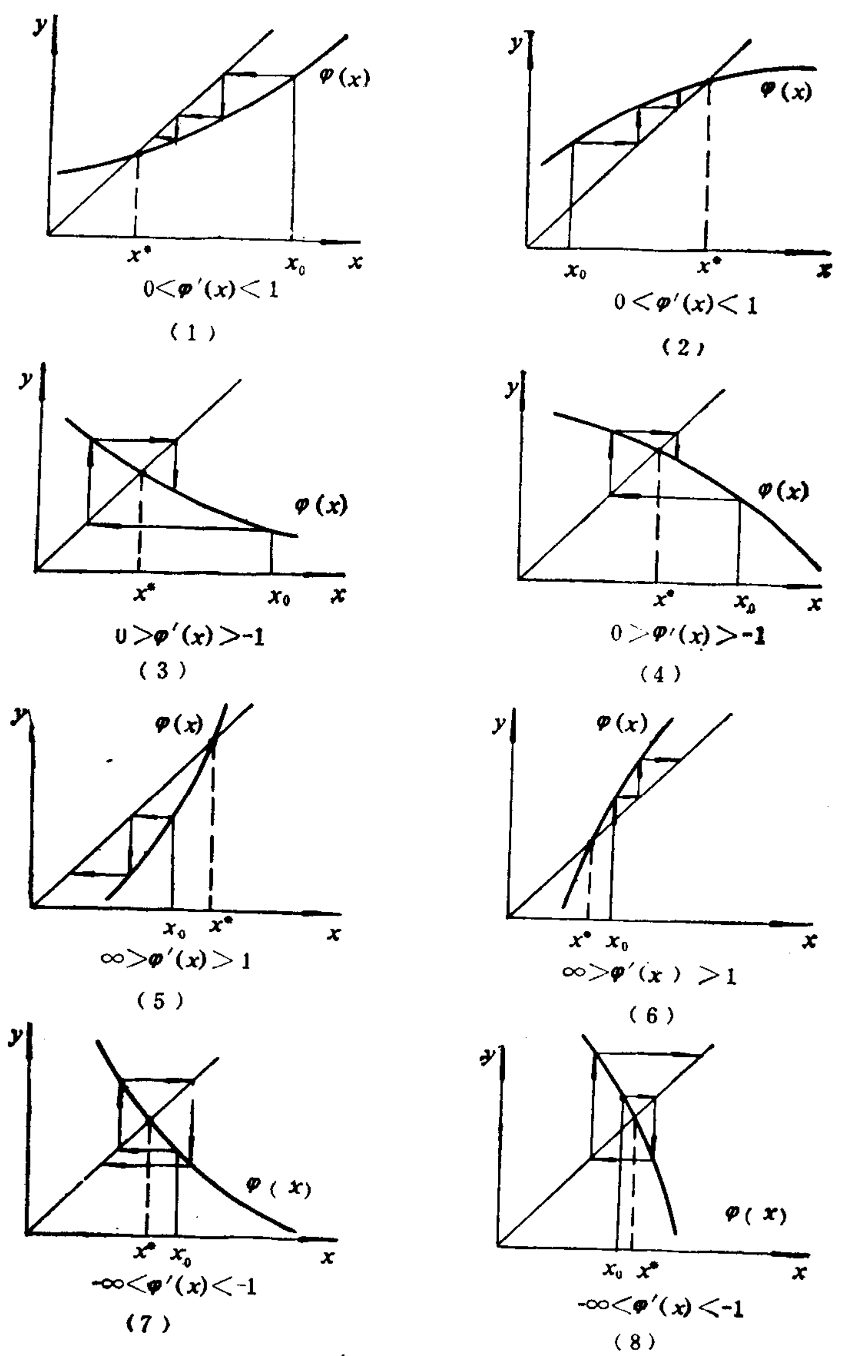

图 1-3　迭代求根的收敛与发散

从上面八张几何图形可以看出，上升函数4个，下降函数4个；上凸函数4个，下凸函数4个；收敛函数4个，发散函数4个。

其中四个收敛函数的共同特点是：

$$\left.\begin{array}{l}0<\varphi'(x)<1\\0>\varphi'(x)>-1\end{array}\right\}\text{可综合为}|\varphi'(x)|<1$$

因此，方程求根迭代函数的收敛条件是：在确定方程$f(x)=0$的等价式$x=\varphi(x)$之后，当$|\varphi'(x)|<1$时，则给定初始点x_0进行迭代计算，其迭代过程总是收敛的。

（2）利用微分中值定理　设x^*为方程$f(x)=0$的根，利用等价迭代式$x=\varphi(x)$的几何图形（图1-4），根据微分中值定理　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$可以得到：

$$\frac{\varphi(x^*)-\varphi(x_k)}{x^*-x_k}=\varphi'(\xi)\quad \xi\in[x^*,\ x_k]$$

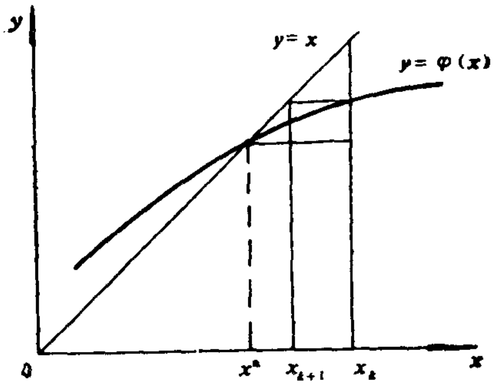

图 1-4　微分中值定理与收敛条件

因此可得如下等式：

$$\begin{cases}\varphi(x^*)-\varphi(x_k)=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)\\x^*-x_{k+1}=\varphi(x^*)-\varphi(x_k)\end{cases}$$

两式合并可得：

$$x^*-x_{k+1}=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$$

设$L=\varphi'(\xi)$　　则$(x^*-x_{k+1})=L(x^*-x_k)$

当$|L|<1$时，则$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$　迭代过程收敛。

因此，根据微分中值定理可以证明，方程求根迭代过程的收敛条件为$|\varphi'(x)|<1$。

（3）迭代误差的收敛性　在迭代求解过程中，若迭代是收敛的，则可得到收敛的解序列x_0，x_1，x_2，……，x_k，……，x^*，其迭代误差分别为：

$$\begin{array}{ll}e_0=|x^*-x_0| & e_0=e_0\\e_1=|x^*-x_1| & e_1=Le_0\\e_2=|x^*-x_2| & e_2=Le_1=L^2e_0\\\vdots & \vdots\\e_k=|x^*-x_k| & e_k=L^ke_0\end{array}$$

若迭代过程是收敛的，则迭代误差e_k也是收敛的，必定$|L|<1$。

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} L^k=0$ $\lim\limits_{k\to\infty} e_k=0$

必然 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x^*$ 迭代收敛

4．收敛性举例

判断方程$f(x)=0$是否具有收敛性，主要是将它转化为等价式$x=\varphi(x)$之后，判断其迭代函数$\varphi(x)$的一阶导数$\varphi'(x)$是否满足下列条件：

$$|\varphi'(x)|<1$$

例 若给定方程式：

$$f(x)=x^3+4x^2-10=0$$

经计算转换可得出下列五种迭代等价式，并求出它们的导函数$\varphi'(x)$，将初始点$x_0=1.5$分别代入$\varphi'(x)$，求其x_0点处的导数值$\varphi'(x_0)$，再利用$|\varphi'(x_0)|<1$的条件来进行判断，即可得到该迭代等价式是否收敛的结论。

等价式① $x=\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$

$$\varphi_1'(x)=1-3x^2-8x\big|_{1.5}=-17.75$$

等价式② $x=\varphi_2(x)=\left(\dfrac{10}{x}-4x\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\varphi_2'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{-\frac{1}{2}}(-10x^{-2}-4)\big|_{1.5}=-16.2278$$

等价式③ $x=\varphi_3(x)=\dfrac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$

$$\varphi_3'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(10-x^3)^{-\frac{1}{2}}(-3x^2)\big|_{1.5}=0.6556$$

等价式④ $x=\varphi_4(x)=\left(\dfrac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\varphi_4'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{4+x}\right)^{-\frac{1}{2}}[-10(4+x)^{-2}]\big|_{1.5}=0.22287$$

等价式⑤ $x=\varphi_5(x)=x-\dfrac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$

$$\varphi_5'(x)=1-\frac{(3x^2+8x)^2-(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$$

$$=\frac{(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}\Bigg|_{1.5}=0.05511$$

现将上述计算结果及分析列于表1-2。

三、迭代过程的收敛速度

在迭代求根过程中，如果迭代是收敛的，那么就可进一步考查迭代的收敛速度，也就是迭代误差消失的速度。

1．迭代收敛系数L

在给定初始迭代点x_0后，即可得到一个收敛的解序列x_0，x_1，x_2，……，x_k，……，x^*，其迭代过程为$|x^*-x_k|=L^k|x^*-x_0|$，即$e_k=L^k e_0$，因此可得：

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \qquad 及 \qquad \lim_{k\to\infty} L^k = 0$$

式中要求$|L|<1$，这是收敛的前提条件。而且还能看出$|L|$值越小，则收敛速度越快，也就是迭代次数K越少。否则，当$|L|$值越大，则收敛速度越慢，迭代次数K越多。

表 1-2　五种迭代式收敛性的计算与判断

比　　较	①　式	②　式	③　式	④　式	⑤　式
x_0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
x^*	1.03×10^8	$\sqrt{-8.65}$	1.36523001	1.36523001	1.36523001
k	4	3	25	9	3
$\varphi'(x_0)$	−17.75	−16.2278	0.6556	0.22287	0.05511
收　敛　性	发　散	发　散	收　敛	收　敛	收　敛
收敛速度	—	—	慢	中	快

2．迭代误差的下降速度

通常对于迭代收敛的速度，用一阶线性收敛（较慢）或二阶平方收敛（较快）来表示。其定义如下：

如果　$e_k=x^*-x_k$　　$e_{k+1}=x^*-x_{k+1}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=c \quad (c\neq0常数)$$

则称为迭代过程是p阶收敛。当$p=1$时，称为一阶线性收敛，当$p=2$时，称为二阶平方收敛。

对于在根x^*附近收敛的迭代公式　$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

由于　$x^*-x_{k+1}=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$

$$\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\frac{e_{k+1}}{e_k}=\varphi'(\xi)\doteq\varphi'(x^*)$$

第一种情况：若$\varphi'(x^*)\neq0$则称为一阶线性收敛。

第二种情况：若$\varphi'(x^*)=0$则$\varphi(x)$在x^*点处的泰勒（Taylor）展开式为：

$$\varphi(x)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}\varphi''(x^*)(x-x^*)^2+\cdots\cdots$$

设　$x=x_k$　则　$\varphi(x)=\varphi(x_k)=x_{k+1}$

$$(x-x^*)^2=(x_k-x^*)^2$$

由于假设　$\varphi'(x^*)=0$　则$\varphi'(x^*)(x_k-x^*)=0$

由于x^*是方程的根，则$x^*=\varphi(x^*)$

因此，上述泰勒展开式可简化为：

$$x_{k+1}=x^*+\frac{1}{2}\varphi''(x^*)(x_k-x^*)^2$$

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{1}{2}\varphi''(x^*)$$

当$\varphi''(x^*)\neq 0$时，则迭代过程称为二阶平方收敛。

综上两种情况，可得如下结论：

当$\varphi'(x^*)\neq 0$时，则称为线性收敛。

当$\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)\neq 0$时，则称为平方收敛。

四、加速迭代收敛过程的方法

虽然方程求解迭代过程是收敛的，但它的收敛速度可能是较慢的，如果采用一些数学变换手段则可以加速迭代收敛。这里介绍加权平均法和埃特金法。

1．加权平均法

一般迭代过程为$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，即由x_k迭代求x_{k+1}。若将此迭代过程分为两步，即由x_k迭代求$\bar{x}_{k+1}$，再由$\bar{x}_{k+1}$，迭代求x_{k+1}，这样就增加了求x_{k+1}的信息，多了一个“信息修正值”，即可加快迭代收敛的速度。这种方法称为加权平均法，其迭代公式为：

$$x_{k+1}=\frac{1}{1-L}[\varphi(x_k)-Lx_k]\quad \text{其中}L=\varphi'(x_k)$$

证明：设预报迭代值$\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$，迭代函数导数值$L=\varphi'(x_k)$。则：

$$x^*-\bar{x}_{k+1}=L(x^*-x_k)=Lx^*-Lx_k$$

$$x^*=\frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1}-\frac{L}{1-L}x_k$$

由于　$x^*\doteq x_{k+1}$，$\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$

因此　$x_{k+1}=\dfrac{1}{1-L}\varphi(x_k)-\dfrac{L}{1-L}x_k$

$$x_{k+1}=\frac{1}{1-L}[\varphi(x_k)-Lx_k]$$

例如　已知方程迭代式$x=e^{-x}$，给定初始点$x_0=0.5$，可求得：

$$x=\varphi(x)=e^{-x}$$

$$L=\varphi'(x)=-e^{-x}|_{0.5}=-0.6$$

因此可得加权平均迭代式为：

$$x_{k+1}=\frac{1}{1-(-0.6)}[e^{-x_k}-(-0.6)x_k]$$

经过迭代计算，其解序列如下：

0.5，0.56658，0.56712，0.56714，……

采用加权平均法迭代计算3次即可达到较精确的解，若采用一般迭代法计算，则需要

迭代18次才能达到上述的计算结果。

2．埃特金算法

在加权平均算法中，主要是多计算一个预报值$\bar{x}_{k+1}$，再求出迭代函数的下降率$\varphi'(x_k)$，虽然加速了迭代收敛过程，但求其导函数$\varphi'(x)$较为困难。因此，设想不求$\varphi'(x)$下降率，而在预报值$\bar{x}_{k+1}$的基础上，通过迭代式再预报一个值$\tilde{x}_{k+1}$，这样就可利用x_k，$\bar{x}_{k+1}$，$\tilde{x}_{k+1}$三个值作为"迭代信息"来计算x_{k+1}值，那么既提高了迭代收敛速度，又能避免求迭代式的导数$\varphi'(x)$，这给计算带来了很大的方便。

已知方程迭代式为：

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

假设　第一个预报值为　$\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$

第二个预报值为　$\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$

根据迭代收敛条件可得如下两式：

$$\begin{cases}x^*-\bar{x}_{k+1}\doteq L(x^*-x_k)\\ x^*-\tilde{x}_{k+1}\doteq L(x^*-\bar{x}_{k+1})\end{cases}$$

将上述两式相除可得：

$$\frac{x^*-\bar{x}_{k+1}}{x^*-\tilde{x}_{k+1}}=\frac{x^*-x_k}{x^*-\bar{x}_{k+1}}$$

求解可得：

$$x^*=\tilde{x}_{k+1}-\frac{(\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}$$

也可表示为：

$$x^*=\frac{x_k\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1}\bar{x}_{k+1}}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}$$

第二节　二分法求全部实根

对于一般超越方程与高次代数方程求根的问题，可选用方法简单实用有效的不求导数的二分法，即在给定的寻根区间内，利用步步查找，二分缩小区间的方法，求出全部实根。

一、概述

首先将方程式$f(x)=0$转化为函数式$y=f(x)$，假设方程求根解的区间为$x^*\in[a,b]$，跨步间距为h，迭代终止计算精度为ε。如图1-5所示，由a点出发向b点跨步，每跨一步h，经过计算，判断在该h区间内是否有根。如若有根则进行二分法求根计算，否则继续以h为步长向前跨步找根。

在跨步找根计算中，当相邻两个函数值为异号时，则在此跨步区间h内有一个实根。

为了缩小解区间的范围，将 h 区间一分为二，然后对两个小区间进行取舍判断——留取有解区间，舍弃无解区间（如图1-6所示）。反复进行区间取舍，可得到逐步缩小的解区间：

$$x^* \in [a_n, b_n] \in [a_{n-1}, b_{n-1}] \in \cdots\cdots \in [a_k, b_k] \in \cdots\cdots \in [a_0, b_0]$$
$$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

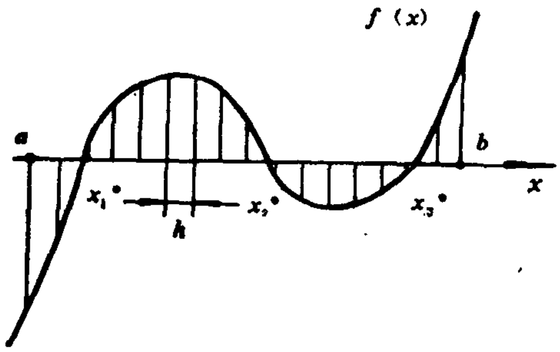

图 1-5　以h步长向前跨步找根

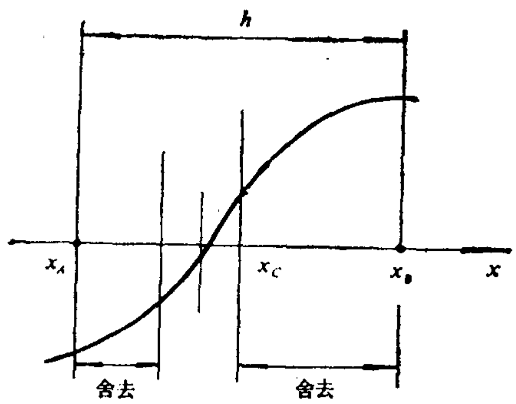

图 1-6　二等分区间取舍

当解区间由$[a_0, b_0]$经过逐步取舍缩小到$[a_n, b_n]$时，即 $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon$时，则可得到一个实零点——方程的一个实根。然后继续跨步找根，按同样的方法求得第二个、第三个、……方程的实根，直至跨步到终点 b 为止。

二、要点

1）只求解$x^* \in [a, b]$区间范围内的全部实根。

2）间隔步长 h 值要适当的小一些，若 h 值选取过大则容易丢根（若在 h 区间范围内有两个实根，则判定无根，即相邻两函数值符号相同）。若间隔 h 值取得过小，则将影响计算速度，造成跨步次数增多。因此，在步长 h 间隔内不准有两个实根。

3）由于进行一分为二的区间取舍，每次舍掉原寻根区间的一半，因此，它的收敛速度为0.5。

4）二分法求根方法简单，不求导数、计算程序较为简单，是方程求根最常用的方法之一。

三、步骤

1）输入寻查求根区间$[a, b]$，取步长间隔 h，计算精度ε。一般取$h=0.01$，$\varepsilon=0.00001$。

2）求相对寻根区间左端点值$x_A \Leftarrow a$及函数值$y_A \Leftarrow f(x_A)$，再求区间右端点值$x_B \Leftarrow a+h$及函数值$y_B \Leftarrow f(x_B)$。

3）判断此相对区间h内是否有根。其方法为：若$y_A \cdot y_B > 0$，则在此h区间内无方程的根；若$y_A \cdot y_B \leqslant 0$，则在此$h$区间内有方程的根。

无根时，将B点作为新A点，再求一个新B点，即：

$$x_A \Leftarrow x_B \qquad y_A \Leftarrow y_B$$
$$x_B \Leftarrow x_B + h \qquad y_B \Leftarrow f(x_B)$$