《高等数学》同步练习册（上册）

《高等数学》同步练习册编写组

高等教育出版社

《高等数学》同步练习册

（上册）

《高等数学》同步练习册编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》同步练习册. 上册/谢惠扬等编著.
北京:高等教育出版社,2002.7
ISBN 7-04-010817-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.谢…　Ⅲ.高等数学-高等学校-习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第028743号

《高等数学》同步练习册(上册)
《高等数学》同步练习册　编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2002年7月第1版
印　　张	8.5	**印　　次**	2002年7月第1次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	10.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步练习册，分为上下册。内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学以及空间解析几何与向量代数；多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数和微分方程。

本书特点：

1. 本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序，针对书上每一个知识点，我们在每一节中配备了一定量的基本练习题和提高题，每一章最后配备一套测验题。在上、下册的最后还各配备了两套模拟期终考试题。旨在帮助同学们迅速而全面地掌握《高等数学》的内容。

2. 本书的形式为学生的作业本，一方面由于比较规范，便于任课教师批改；另一方面，减轻了学生抄作业题的负担，同时也便于作业本的保留。

3. 本书不配备相应的答案或解答。旨在培养学生的独立思考能力和解决问题的能力。

本书是长期从事工科高等数学教师们对教学的一个重要环节——批改作业——的一个改革尝试，希望本书的出版，能对工科高等院校的学生和数学教师们具有切实的帮助。

本书适用于工科高等院校的本科生。

本套练习册第一章由北京林业大学谢惠扬编写，第二章由石油大学（北京）柴志明编写，第三章由北京林业大学徐凤琴编写，第四章由北京林业大学王小春编写，第五章由北京林业大学郎霞编写，第六章由石油大学（北京）谭立云编写，第七章由石油大学（北京）武清编写，第八章由华北电力大学何凤霞编写，第九章由华北电力大学吕蓬编写，第十章由华北电力大学邱启荣编写，第十一章由华北电力大学徐英凯编写，第十二章由华北电力大学彭武安编写。上册模拟考试题由北京林业大学李霞编写，下册模拟考试题由华北电力大学邱启荣编写，全书由谢惠扬统稿。

由于编者水平所限，错误在所难免，恳请同仁不吝指出，编者不胜感谢。

《高等数学》同步练习册编写组

2002年6月

目　录

第一章　函数与极限

重点：函数概念、初等函数、极限的概念、连续的概念极限运算、初等函数的连续性.

难点：复合函数、极限概念.

第一节　映射与函数

1. 设 $A=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，$B=[-7,1)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$，证明

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X，I_Y 分别是 X，Y 上的恒等映射，即 $\forall x\in X$，有 $I_Xx=x$，$\forall y\in Y$，有 $I_Yy=y$，证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

5. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X$，证明：

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

6. 函数 $y = \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域是__________.

7. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a) + f(x-a)\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域是__________.

8. 设函数 $f(x) = 2^x, g(x) = 5x + 1$，则 $g[f(x) + x] =$ __________.

9. 下列各对函数中，为相同函数的是(　).

(A) $f(x) = x\sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

(B) $f(x) = x, g(x) = \arcsin \sin x$

(C) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$

(D) $f(x) = 1 - \cos 2x, g(x) = 2\sin^2 x$

10. $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}\,(-1 \leqslant x \leqslant 0)$ 的反函数为__________.

11. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上是单调增函数，则 $f(-\pi)$ 与 $f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的大小关系是__________.

12. 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 的奇偶性为__________.

13. 函数 $f(x) = \tan(4\pi x + 3)$ 的最小正周期是__________.

14. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$，并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$，$g(x) = \ln x$，求 $f[g(x)]$.

16. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元。厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元。

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数.

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数.

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少.

第二节　数列的极限

1. 回答下列各问题.

(1) 如果在 n 无限增大过程中，数列 a_n 的各项越来越接近常数 A，那么 a_n 是否一定收敛于 A?(　　　　)

(2) 设在常数 A 的无论多么小的 ε 邻域内密集着数列 a_n 的无穷多个点，那么 a_n 是否一定收敛于 A?(　　　　)

(3) 有界数列是否一定收敛?(　　　　)

无界数列是否一定发散?(　　　　)

(4) 单调数列是否一定收敛?(　　　　)

摆动数列是否一定发散?(　　　　)

2. 设 $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}(n = 1,2,3,\cdots)$.

(1) $|a_1 - 3| =$ ______，$|a_{10} - 3| =$ ______，$|a_{100} - 3| =$ ______.

(2) 求 $N =$ ______，使当 $n > N$ 时，不等式 $|a_n - 3| < 10^{-4}$ 成立.

(3) 求 $N =$ ______，使当 $n > N$ 时，不等式 $|a_n - 3| < \varepsilon$ 成立.

3. 根据数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

4. 若 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，证明 $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = |a|$，并举例说明反过来未必成立.

第三节　函数的极限

1. 下列说法正确的是(　).

   A. 函数在 x_0 点处无定义,则在这一点必无极限

   B. 函数在 x_0 点处有定义,则在这一点必有极限

   C. 若函数在 x_0 处有定义且有极限,则其极限值必为该点函数值

   D. 在确定函数在 x_0 处的极限时,对函数在 x_0 点是否有定义不作要求

2. 当 $x \to 2$ 时,$y = 2x - 1 \to 3$,问 $\delta =$ ______ 时,则当 $|x-2| < \delta$ 时,有 $|y-3| < 10^{-3}$;问 $\delta =$ ______ 时,则当 $|x-2| < \delta$ 时,有 $|y-3| < \varepsilon$.

3. 当 $x \to \infty$ 时,$y = \dfrac{x}{x+1} \to 1$.问 $X =$ ______ 时,使当 $|x| > X$ 时,$|y-1| < 10^{-3}$;问 $X =$ ______ 时,使当 $|x| > X$ 时,$|y-1| < \varepsilon$.

4. 根据函数极限定义证明:$\lim\limits_{x \to 3} 3x + 1 = 10$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ -x+3, & 1 \leqslant x < \infty \end{cases}$,试分别讨论 $f(x)$ 在 $x \to 0$,$x \to 1$ 时的极限,并画出函数的图形.

6. 设 $f(x) = \dfrac{1 + 2^{-\frac{1}{x}}}{1 - 2^{-\frac{1}{x}}}$,求 $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$,$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$,$\lim\limits_{x \to 0} f[\,|x|\,]$,$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

第四节　无穷小与无穷大

1. 当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 均为无穷小量，下列变量中，当 $x \to x_0$ 时，可能不是无穷小量的是(　　).

A. $\alpha(x)+\beta(x)$　　B. $\alpha(x)-\beta(x)$

C. $\alpha(x)\cdot\beta(x)$　　D. $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}(\beta(x)\neq 0)$

2. 下列命题正确的是(　　).

A. 无穷小量是一个很小很小的数

B. 无穷大量是一个很大很大的数

C. 无穷大量必是无界变量

D. 无界变量必是无穷大量

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 是 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$ 的(　　).

A. 无关条件　　B. 充要条件

C. 充分条件　　D. 必要条件

4. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是(　　).

A. $\dfrac{|x|}{x}-1(x\to 0)$　　B. $\dfrac{1}{(x-1)^3}(x\to 1)$

C. $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0+0)$　　D. $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0-0)$

5. 根据定义证明：$y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 当 $x\to 2$ 时为无穷小.

6. 根据定义证明：当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1+3x}{x}$ 为无穷大.

第五节　极限运算法则

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3x-1)^3}{x^4(x+2)}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{3}{x^2}+x\cdot\arctan\dfrac{1}{x}\right)$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2-1}$.

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+17}-n}{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n^2-1}}$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

10. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

第六节　极限存在准则,两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{3x}=$ ________;$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$ ________;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=$ ________;$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=$ ________.

2. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$ ________;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=$ ________;

$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=$ ________;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+2}=$ ________.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x+2}$.

(4) $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right)$.

(6) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{1+\sin\dfrac{2}{x}}-1\right)$.

(8) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(\cos\dfrac{2}{x}-1\right)$.

4. 证明:数列 $x_1=\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}, \cdots, x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}, \cdots$ 的极限存在,并求其极限值.

5. 用极限存在准则证明：$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

6. 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

第七节 无穷小的比较

1. 当 $x \to 0$ 时，下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小（ ）.

   A. $x + x^2$ B. $1 - \cos x$ C. $\sin x$ D. $\ln(1 + x)$

2. 当 $x \to 0$ 时，与 $(\sqrt{1 + x^2} - 1)$ 等价的无穷小量是（ ）.

   A. x B. x^2 C. $2x^2$ D. $\frac{1}{2}x^2$

3. 证明：当 $x \to 0$ 时，$\arcsin x \sim x$.

4. 利用等价无穷小的性质求下列极限.

   (1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}$.

   (2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\arcsin x)^3}{x(1 - \cos x)}$.

   (3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

   (4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^{3x} - 1}$.

   (5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin x)}{x}$.

   (6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$.