高等数学(一)

高等教育自学考试教学指导组　编

全国高等教育自学考试公共课真题与模拟试卷

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国高等教育自学考试公共课真题与模拟试卷

高等数学（一）

高等教育自学考试教学指导组 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 . 1/高等教育自学考试教学指导组编 .
—北京:北京理工大学出版社,2002.9
(全国高等教育自学考试公共课真题与模拟试卷)
ISBN 7-5640-0007-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.高…　Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-试题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059610 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京房山先锋印刷厂
装　　订/天津市武清区高村印装厂
开　　本/787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张/9.5
字　　数/228 千字
版　　次/2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数/1-5000 册　　责任校对/陈玉梅
定　　价/13.50 元　　责任印制/母长新

目　录

第一篇　学好《微积分》的途径

《高等数学》(一) 微积分是全国高等教育自学考试中一门重要的公共基础课。同时也是考生最感困难的一门课程。那么,学好《微积分》的途径是什么呢?

从考题的类型来看有四种:选择题、计算题、应用题和证明题。四种类型的题目主要考查三个方面的内容:一是对数学概念是否真正理解;二是对计算方法是否真正熟练;三是对实际应用是否真正掌握。

下面谈谈学好《微积分》的途径。

1. 熟悉研究对象是学好《微积分》的前提

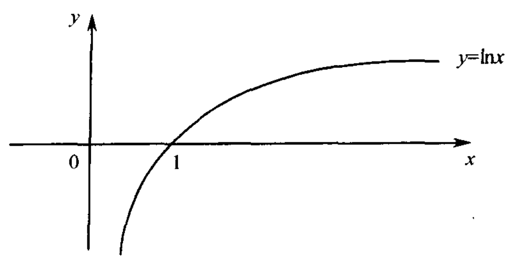
微积分研究的对象是函数。即研究初等函数和分段函数。初等函数又是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合构成的。因此,基本初等函数是基础。

基本初等函数指六种函数:常量、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。对于每一种函数的定义、图象、性质都要特别清楚,这是学好微积分的前提。由于基本初等函数不熟悉而发生错误或被卡住的情况是经常出现的。比如,在求极限时不知函数的图象;在求导数时不知是不是复合函数,是几次复合;在求图形面积时画不出图象等等。

下面举几个例子来说明:

例如,①x 在什么变化过程中,函数 $y=\ln x$ 是无穷大量?

解:由 $y=\ln x$ 的图象,立即得出结论:



$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

②已知 $y=e^{-x}$,求 y'

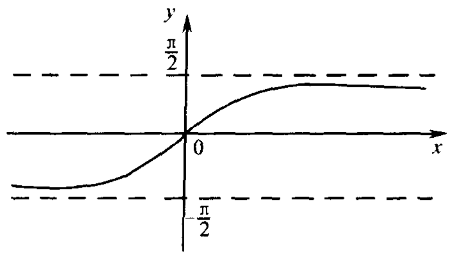
解:因为 $y=e^{-x}$是由$y=e^u$ 和$u=-x$ 复合而成

所以 $y'=e^{-x}\cdot(-x)'=-e^{-x}$

③ 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

解:求极限要先判断极限的类型

由 $y=\arctan x$ 的图象:



可知：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

判断出此极限为"$\infty\cdot0$"型，从而也找到了求解方法。

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1$$

④下列曲线中，有两条斜渐近线的是 (　　)

A. $\ln x$　　B. $\arctan x$　　C. $\frac{(x-2)^2}{x-1}$　　D. $x+\arctan x$

解：D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1=a$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\arctan x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

由 $y=\arctan x$ 的图象可知：

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

即有两条斜渐近线：$y=x+\frac{\pi}{2}$ 和 $y=x-\frac{\pi}{2}$

故应选 D。

通过这几个简单例题，可以看出熟悉基本初等函数的重要性。所以基础差的考生一定要下功夫补上这部分知识，为下面的学习铺平道路。

2. 理解数学概念是学好《微积分》的关键

数学中的概念一定要真正理解，这是学好微积分的关键所在。选择题主要就是考查对数学概念是否真正理解。当然，概念的错误也反映在计算题中。

微积分中，有极限、连续、导数、微分、不定积分、定积分、广义积分、偏导数、全微分等等重要概念，在学习中，一定要将这些概念真正弄明白。能够用简短的语言来说清这些概念。

下面举几个例子来说明。

(1) 关于"极限"的概念

微积分研究的对象是函数，而函数揭示的是因变量随自变量的变化而变化的情况。要研究变化的情况就要有一种变化的工具，这就是极限。因此，对极限的认识，首先应该清楚，极限是揭示因变量随自变量的变化而变化的趋势。这里首先要看自变量的变化趋势，对同一个函数而言，自变量的变化趋势不同，一般来说，因变量的变化趋势也不同。

例如，①$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$；②$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$；③$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$

虽然函数都是 $y=\frac{\sin x}{x}$,但由于自变量的变化趋势不同,函数的变化趋势也不同。

有些考生只注意函数表达式,而不注意自变量的变化趋势,见到$\frac{\sin x}{x}$就认为是重要极限。这是没有真正理解“极限”概念造成的。

其次,对于“极限”这一概念的理解,还应弄清,什么情况下极限存在,什么情况下极限不存在。一般来说,在自变量的某一变化过程中,因变量的变化趋势有三种:一种是趋于某一个常数 A;另一种是趋于无穷大;再一种是在两个数或一些数之间振荡。称第一种情况为极限存在,而后两种情况为极限不存在。所以,简单地说,极限存在就是“因变量趋向于一个(多个不行)常数(无穷大不行)”例如,

④ 下列极限存在的是 ( )

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x(x+1)}{3x^2}$ B. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3^x-1}$ C. $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{10x}}$

解:A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x(x+1)}{3x^2}=\frac{2}{3}$ B. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3^x-1}=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 振荡不存在 D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{10x}}=+\infty$

故应选 A。

(2) 关于“导数”的概念

“导数”的概念包含导函数和导数值两层含意。简单地说,“导数是增量之比的极限”。也就是函数的增量与自变量的增量之比,当自变量的增量趋于零时的极限。它可以有几种形式:

(ⅰ) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(ⅱ) $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $(h=\Delta x)$

(ⅲ) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x-x_0=\Delta x)$

这里需要注意的是,自变量的增量在分子,分母中必须相一致。例如,

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$是错误的。

应该是,$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

在考试中,经常出现此类题目。

例如,⑤设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则 $f'(x_0)=$ ( )

A. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{3h}$

C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$ D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}$

解:C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)$

自变量的增量在分子、分母中均为 $-h$,相一致.

而在 A、B、D 中均不一致。故应选 C。

⑥设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ ( )

A. $f'(x_0)$ B. $-f'(x_0)$ C. $2f'(x_0)$ D. $-2f'(x_0)$

解:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}=-2f'(x_0)$

故应选 D.

⑦已知函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,且极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=4$,则 $f'(x_0)=$

( )

A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

解:$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\times 4=-2$

故应选 A.

⑧设 $f(0)=0$,且 $f'(0)$存在,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ ( )

A. $f'(x)$ B. $f'(0)$ C. $f(0)$ D. $\dfrac{1}{2}f(0)$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

故应选 B.

(3) 关于“定积分”的概念

简单地说,“定积分就是和式的极限”。而极限若存在,其结果是一个常数。所以定积分是一个常数,这是对定积分最基本的认识。

例如,⑨ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b \arctan t\,\mathrm{d}t=$ ( )

A. $\arctan x$ B. $\dfrac{1}{1+x^2}$ C. $\arctan b-\arctan a$ D. 0

解:定积分$\displaystyle\int_a^b \arctan t\,\mathrm{d}t$ 是一个常数,对 x 求导为零

故应选 D.

⑩ 试确定满足:$f(x)=4x^3-3x^2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的函数$f(x)$

解:注意到定积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数

设$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=k$,则 $f(x)=4x^3-3x^2k$

由 $k=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(4x^3-3x^2k)\mathrm{d}x=x^4\Big|_0^1-kx^3\Big|_0^1=1-k$

知 $k=\dfrac{1}{2}$

即 $f(x)=4x^3-\dfrac{3}{2}x^2$

⑪ 设 $f(x)=x^2-\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,且 a 是不等于 -1 的常数.

求证：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{a^3}{3(a+1)}$

证明：注意到定积分$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数

设$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = k$，则 $f(x) = x^2 - k$

由 $k = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (x^2 - k)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^a - ak = \dfrac{1}{3}a^3 - ak$

知$(a+1)k = \dfrac{1}{3}a^3, k = \dfrac{a^3}{3(a+1)}$

即$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{a^3}{3(a+1)}$

证毕

3．掌握计算方法是学好《微积分》的重点

运算能力是数学培养的一种主要能力。因此，计算题在数学中占有相当大的比例。在微积分中，求极限、求导数、求微分、求积分、求偏导数、求全微分、解微分方程等等均是重要的计算题。

对于计算题，一定要做到方法熟练。这其中包括：公式法则要记住，过程步骤要清楚、规律技巧要掌握。

下面举例来说明。

(1) 求极限的方法　求极限是微积分中重要的计算方法。因为极限的理论是微积分的基础。象导数、定积分、广义积分、级数的敛散性等重要概念都是用极限来定义的。所以求极限在微积分中就占有重要的地位。

求极限的关键在于判断极限的类型，根据不同的类型选取不同的方法。这其中第一个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$与无穷小量与有界变量的乘积为无穷小量，这两种求极限的方法往往相混，因为都含有正弦函数。

例如，①$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$　　②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x$

如何区分这两种不同类型呢？其实很简单，看正弦的自变量是不是无穷小量。是无穷小量就利用重要极限，不是无穷小量就看作有界变量。

在①中 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$不是无穷小量，将 $\sin\dfrac{1}{x}$看作有界变量，于是有：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

在②中 $x\to 0$ 时，$x\to 0$ 是无穷小量，可利用重要极限

于是有：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

再如，③$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}$　（$n\to\infty$时，$\dfrac{\pi}{n}\to 0$，可利用重要极限）

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi = \pi$$

④$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{3x}$（$x\to\infty$时，$2x\to\infty$，不是无穷小量）

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}\sin 2x=0$$

在利用罗彼塔法则求极限时，也要对罗彼塔法则本身有一个全面的理解。对于"$\frac{0}{0}$"型和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式求极限时，可分子分母分别求导。求导后极限是常数 A，原极限就是常数 A，求导后极限趋于无穷大，原极限也趋于无穷大。但求导后若极限振荡不存在，原极限如何呢？法则中没有给出结论。说明这种情况下法则失效，需另找方法。这是我们特别需要注意的。

例如⑤$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$　使用罗彼塔法则后

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$　振荡不存在，

但原极限是存在的：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=0$

⑥$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$　使用罗彼塔法则后

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$　振荡不存在，

但原极限是存在的：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=1$

(2) 求积分的方法　在求不定积分、定积分、广义积分以及二重积分中，不定积分的计算是基础。计算不定积分主要有四种方法：积分公式、第一换元法（凑微分法）、第二换元法和分部积分法。每一种方法都有值得注意的问题。

第一换元法是通过凑微分，使新的变量满足某一积分公式，从而求出积分。那么，凑微分后满足的是哪个公式，就要特别注意。

例如，⑦$\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}\cos x=$　　（　　）

A. $\tan x-x+C$　　B. $\tan x-\cos x+C$　　C. $-\dfrac{1}{\cos x}-x+C$　　D. $-\dfrac{1}{\cos x}-\cos x+C$

解：$\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}\cos x=\dfrac{1}{-2+1}(\cos x)^{-2+1}-\cos x+C=-\dfrac{1}{\cos x}-\cos x+C$

故应选 D

（按照：$\int\left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{u}-u+C$ 计算的）。

⑧$\int\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解：$\int\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)=\ln(1+x^2)+C$

（是按照：$\int\dfrac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C$ 计算的）

不能用公式 $\int\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$ 来计算。

在凑微分后，要判断用哪个公式，只要把被积表达式中的积分变量部分都还原成 x 即可。

在计算积分时，当 $\int u\mathrm{d}v$ 不易计算时，可考虑用分部积分法转化成求 $\int v\mathrm{d}u$ 的积分。

例如，⑨ $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解：$\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 当作 u 不易计算，可考虑将 $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 当作 v：

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right) + C = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$$

类似有

⑩ $\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}\sin\sqrt{x} = 2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}\right)$

$$= 2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + C$$

⑪ $\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -2\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}\cos\sqrt{x} = -2\left(\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}\right)$

$$= -2\left(\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) + C$$

以上举例，供大家参考。

第二篇　全国高等教育自学考试试卷

一九九九年上半年全国高等教育自学考试试卷

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中,选出一个正确的,并将正确答案的号码填写在题干后的括号内。每小题 1 分,共 40 分)

1. 下列集合中为空集的是　(　　)

A. $\{x\,|\,x<1 \text{ 且 } x\geqslant 0\}$　　B. $\{x\,|\,x+1=0\}$

C. $\{x\,|\,x^2+1=0, x \text{ 为实数}\}$　　D. $\{x\,|\,x>0 \text{ 且 } x<1\}$

2. 若 $f(x+3)=x(x+3)$,则 $f(x)=$　(　　)

A. $x(x+3)$　B. $(x-3)(x+3)$　C. $x(x-3)$　D. $(x-3)^2$

3. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(x+1)$的定义域是　(　　)

A. $[0,1]$　B. $[-1,0]$　C. $[1,2]$　D. $[0,2]$

4. 设 $f(x)=\sin x^2, \varphi(x)=x^2+1$,则 $f[\varphi(x)]=$　(　　)

A. $\sin(x^2+1)^2$　B. $\sin^2(x^2+1)$　C. $\sin(x^2+1)$　D. $\sin^2x^2+1$

5. 函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right)$在$[-\pi,\pi]$上的最小值点 $x_0=$　(　　)

A. 0　B. $\frac{\pi}{2}$　C. π　D. $-\pi$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n}=$　(　　)

A. x　B. 0　C. ∞　D. 不存在

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$　(　　)

A. $e^{-\frac{1}{3}}$　B. e^{-3}　C. $e^{\frac{1}{3}}$　D. e^3

8. 函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x-2)}$的连续区间是　(　　)

A. $(2,+\infty)$　B. $(2,3)\cup(3,+\infty)$　C. $(-\infty,2)$　D. $[2,3]\cup(3,+\infty)$

9. 下列变量中,为无穷小量的是　(　　)

A. $\ln x\quad(x\to 1)$　B. $e^{\frac{1}{x}}\quad(x\to 0^+)$　C. $\sin\frac{1}{x}\quad(x\to 0)$　D. $\frac{x-3}{x^2-9}\quad(x\to 3)$

10. 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=$　(　　)

A. $-2f'(x_0)$　B. $2f'(x_0)$　C. $-\frac{1}{2}f'(x_0)$　D. $\frac{1}{2}f'(x_0)$

11. 一物体按规律 $s(t)=3t-t^2$ 作直线运动，当其速度为零时，$t=$　（　）

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{3}{2}$　D. 3

12. 曲线 $y=2x^2+3x-26$ 上点 M 处的切线斜率是 15，则点 M 的坐标是　（　）

A. (3,15)　B. (3,1)　C. (−3,15)　D. (−3,1)

13. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导并取得改变量 Δx，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分是　（　）

A. $f(x_0)\Delta x$　B. $f'(x_0)\Delta x$　C. $f'(x)\Delta x$　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

14. $\mathrm{d}(\arccos x)=$　（　）

A. $\sec^2 x\,\mathrm{d}x$　B. $\csc^2 x\,\mathrm{d}x$　C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　D. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

15. 某企业每月生产 q 吨产品时总成本 C 是产量 q 的函数 $C(q)=q^2-10q+20$，则每月生产产品 8 吨时的边际成本是　（　）

A. 4　B. 6　C. 10　D. 20

16. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ x^2 & x\leqslant 1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处　（　）

A. 不可导　B. 连续　C. 可导且 $f'(1)=2$　D. 无法判断是否可导

17. 设 $y=\cos x$，则 $y^{(n)}=$　（　）

A. $\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$　B. $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$　C. $\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)$　D. $\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

18. 已知函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{\pi}\right)=$　（　）

A. 1　B. π^2　C. −1　D. $-\pi^2$

19. 设 $f(x)$ 一阶连续可导且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1$，则 $f(0)$　（　）

A. 一定是 $f(x)$ 的极大值　B. 一定是 $f(x)$ 的极小值

C. 一定不是 $f(x)$ 的极值　D. 可能是也可能不是 $f(x)$ 的极值

20. 函数 $f(x)$ 的连续但不可导的点　（　）

A. 一定不是极值点　B. 一定是极值点　C. 一定不是拐点　D. 一定不是驻点

21. $f'(x)<0, x\in(a,b)$ 是可导函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递减的　（　）

A. 必要条件　B. 充分条件　C. 充要条件　D. 无关条件

22. 在区间 (a,b) 内任意一点，函数 $f(x)$ 的曲线弧总位于其切线的上方，则该曲线在 (a,b) 内是　（　）

A. 下凸　B. 上凸　C. 单调上升　D. 单调下降

23. 已知函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在 $[-1,2]$ 上满足罗尔定理条件，则在 $[-1,2]$ 上罗尔定理中的值 $\xi=$　（　）

A. −1　B. 2　C. $\frac{-4\pm\sqrt{37}}{3}$　D. $\frac{-4+\sqrt{37}}{3}$

24. 选择其中一个符号连接，使关系式成立：$|\sin x-\sin y|\cdots|x-y|$　（　）

A. ⩾　B. ⩽　C. ＞　D. ＜

25. 设$[\int f(x)\mathrm{d}x]' = \sin x$，则 $f(x) =$ ( )

A. $\sin x$　B. $\sin x + C$　C. $\cos x$　D. $\cos x + C$

26. 若$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 e^{2x} + c$，则 $f(x) =$ ( )

A. $2xe^{2x}$　B. $2x^2e^{2x}$　C. xe^{2x}　D. $2x(1+x)e^{2x}$

27. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$，则$\int f'(x)\mathrm{d}x =$ ( )

A. $\frac{1}{x}$　B. $\frac{1}{x} + C$　C. $\ln x$　D. $\ln x + C$

28. 曲线 $y = f(x)$在点 x 处的切线斜率为 $-x+2$，且曲线过点(2,5)，则该曲线方程为 ( )

A. $y = -x^2 + 2x$　B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$　D. $y = -x^2 + 2x + 5$

29. $\int(\cot x - \csc x)\cot x\mathrm{d}x =$ ( )

A. $\cot x - x + \csc x + C$　B. $-\cot x - x + \csc x + C$

C. $\cot x - x - \csc x + C$　D. $-\cot x - x - \csc x + C$

30. 由定积分的几何意义，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ ( )

A. π　B. $\frac{\pi}{2}$　C. 1　D. 0

31. 广义积分$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x =$ ( )

A. 不存在　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 2

32. 已知 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ 且$\int_{-\infty}^{+\infty}kf(x)\mathrm{d}x = 1$，则 $k =$ ( )

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{3}{2}$　C. 2　D. $\frac{1}{2}$

33. 设 $\csc^2 x$ 是$f(x)$ 的一个原函数，则$\int xf(x)\mathrm{d}x =$ ( )

A. $x\csc^2 x - \cot x + C$　B. $x\csc^2 x + \cot x + C$

C. $-x\cot x - \cot x + C$　D. $-x\cot x + \cot x + C$

34. 设 $z = e^{\sin x}\cdot\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ( )

A. $e^{\sin x}\cos x\cos y$　B. $e^{\sin x}\cos x\sin y$　C. $e^{\sin x}\cos x$　D. $e^{\sin x}\cos y$

35. 设 $x = \ln\frac{z}{y}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ( )

A. 1　B. e^x　C. ye^x　D. y

36. 设二元函数 $f(x,y)$在(x_0,y_0)有极大值且两个一阶偏导数都存在，则必有 ( )

A. $f'_x(x_0,y_0)>0$，$f'_y(x_0,y_0)>0$　B. $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$

C. $f'_x(x_0,y_0)<0$，　$f'_y(x_0,y_0)<0$　　　　D. $f'_x(x_0,y_0)>0$，　$f'_y(x_0,y_0)<0$

37. 设生产函数为 $Q=3L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$，则当 $L=27,K=8$ 时，资本 K 的边际生产率为　(　　)

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{36}{8}$　　C. 3　　D. $\frac{36}{27}$

38. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则一定有　(　　)

A. 对 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 加括号后所成级数收敛

B. 对 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 加括号后所成级数发散

C. 对 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 加括号后所成级数的收敛性不定

D. $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$

39. 在下列级数中发散的是　(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

40. 微分方程 $\cos y\,dy=\sin x\,dx$ 的通解是　(　　)

A. $\sin x+\cos y=C$　　B. $\cos x+\sin y=C$　　C. $\cos x-\sin y=C$　　D. $\cos y-\sin x=C$

二、计算题(一)(每小题 4 分，共 12 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\ A & x=1,\end{cases}$

求 A 的值，使 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

2. 求不定积分 $\int x\cot(x^2+1)dx$

3. 求解微分方程 $xy'-y=1+x^3$

三、计算题(二)(每小题 7 分，共 28 分)

1. 设 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$，求 y'

2. 设函数 $z=f(x,y)$由方程 $F(u,v)=0$ 确定,其中 $u=x+y+z, v=x^2+y^2+z^2$,求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 将函数 $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$展为 x 的幂级数。

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线$y=x$ 和圆$x^2+(y-1)^2=1$ 所围成且在直线 $y=x$ 下方的平面区域.

四、应用题(每小题 8 分,共 16 分)

1. 若边际消费倾向是收入 Y 的函数$\frac{3}{2}Y^{-\frac{1}{2}}$且当收入为零时总消费支出 $C_0=70$,

(1) 求消费函数 $C(Y)$

(2) 求收入由 100 增加到 196 时消费支出的增量

2. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间(2,6)内的一点,使该点的切线与直线 $x=2, x=6$ 以及 $y=\ln x$ 所围成的平面图形面积最小.

五、证明题(本题 4 分)

证明 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\arccos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

一九九九年下半年全国高等教育
自学考试试卷

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中,选出一个正确的答案,并将其号码填在题干后的括号内,每小题 1 分,共 40 分)

1. 若集合 $M=\{0,1,2\}$,则下列写法中正确的是 (　　)

A. $\{1\}\in M$　　B. $1\subset M$　　C. $1\overline{\in} M$　　D. $\{1\}\subset M$

2. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$,则 $f(2x)=$ (　　)

A. $\frac{1}{1-2x}$　　B. $\frac{2}{1-x}$　　C. $\frac{2(x-1)}{2x}$　　D. $\frac{2(x-1)}{x}$

3. 若 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 及函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是

(　　)

A. $[-a,1-a]$　　B. $[-a,1+a]$　　C. $[a,1-a]$　　D. $[a,1+a]$

4. 函数 $y=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$　$(a>0,a\neq1)$ 是 (　　)

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既是偶函数又是奇函数

5. 函数 $y=|\sin x|$ 的周期是 (　　)

A. 2π　　B. 4π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}=$ (　　)

A. ∞　　B. 0　　C. -1　　D. 1

7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=$ (　　)

A. ∞　　B. $n-1$　　C. n　　D. 0

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x=$ (　　)

A. e^2　　B. e　　C. 1　　D. 2

9. 设 x 和 y 分别是同一变化过程中两个无穷大量,则 $x-y$ 是 (　　)

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 常数　　D. 不能确定

10. 要使函数 $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续,应给 $f(0)$ 补充定义的数值是

(　　)