LISAN SHUXUE XITI JI

离散数学习题集

数理逻辑与集合论分册

耿素云 编著

北京大学出版社

新登字(京)159号

内 容 简 介

本书为《离散数学习题集》数理逻辑与集合论分册。内容包括命题逻辑、一阶逻辑、集合及其运算、二元关系、函数等部分的定义、定理、习题与解答。概念陈述精练，习题丰富，解答详实，注重方法与能力的培养。安排由易到难，由浅入深，力求照顾到不同需求和不同层次的读者。

读者对象：大专院校计算机系或有关专业的师生，计算机理论科学或离散数学的自学者、爱好者。

离散数学习题集

数理逻辑与集合论分册

耿素云 编著

责任编辑：陈进元

*

北京大学出版社出版发行

（北京大学校内 邮编：100871）

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 12.125印张 270千字

1993年2月第一版 1993年2月第一次印刷

印数：0001—5 000册

ISBN 7-301-01990-4/O·303

定价：6.45元

前　言

随着计算机科学的迅速发展，作为计算机科学理论基础之一的离散数学，已成为计算机及有关专业的必修课程。在广泛收集资料和多年教学积累的基础上，我们编写了这套《离散数学习题集》,以期对离散数学的教与学有所裨益。

习题集每分册分两大部分，第一部分是“内容提要”与“习题”,第二部分是“习题解答与提示”.每小节的内容提要给出了基本概念、主要性质和定理，基本上划定了该节的取材范围。习题中的题目多数取自书后所列参考书，一部分是笔者在教学工作中自编的。对于题目的解答，笔者希望对读者在掌握基本概念及解题技巧方面有所帮助。有些题目给出了多种解法，目的也在于扩大思路，掌握更多的技巧。在编写过程中，既考虑到高等院校有关专业的教学需要，也注意到自学者的需要。书中有些题目的内容或难度可能超出了教学大纲的要求，这部分内容可供学习能力较强，希望进一步钻研的学生学习和参考。

本书为《离散数学习题集》数理逻辑和集合论分册。共分 6 章，包括 465 道习题。数理逻辑和集合论是离散数学的重要的组成部分，内容极其丰富。但在内容的取舍方面，离散数学教材的各种版本之间存在着很大的差异，鉴于这种情况，本书只包含数理逻辑和集合论的最基本的内容。数理逻辑包含命题逻辑和一阶逻辑两部分内容（书中第一章和第二章）,集合论包含集合及其运算，二元关系、函数、自然数、基

数等内容（第三、四、五、六章）.每小节的题目，一般按由易到难，由浅入深的顺序安排的。对于难度较大的题目，以及第六章中的题目，读者可根据自己的需要和能力进行选择。

在本书的写作过程中，得到了陈进元同志的大力支持和帮助，作者表示诚挚的谢意。在写作过程中，参考了不少离散数学方面的教材和专著，特别是陈进元、屈婉玲同志所编的《离散数学》(上册).在此，向有关的作者表示衷心地感谢。

由于水平所限，书中难免有些不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

编著者

1991年7月于北京大学

目　　录

第一章　命题逻辑

1.1　命题符号化及联结词

内 容 提 要

命题与真值　一般说来，陈述句都是表达判断的，称判断正确的陈述句的**真值**或**值为真**，判断错误的陈述句的真值或值为假。称具有唯一真值的陈述句为**命题**。称简单的陈述句（不能分解成更简单的句子）构成的命题为简单命题或原子命题，称由简单命题用联结词联结而成的命题为**复合命题**.由于简单命题的真值是确定的，因而又称简单命题为**命题常项**或**命题常元**。称真值可以变化的简单陈述句为**命题变项**或**命题变元**.$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$既可以表示命题常项，又可以表示命题变项，这要由上、下文确定它们表示的是常项还是变项，不过一定注意，命题变项不是命题。在数理逻辑中将真值也符号化，一般用1（或T）表示真，而用0（或F）表示假。

逻辑联结词　逻辑联结词又称真值联结词。一般说来有以下5种。

否定式　设p为任一命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的**否定式**，记作$\neg p$。$\neg$为否定联结词。$\neg p$为真当且仅当p为假。

合取式　设p,q为二命题，复合命题“p并且q”(或

“p 和 q”)称作 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$。$\wedge$ 为合取联结词。$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

析取式 设 p,q 为二命题，复合命题“p 或 q”称作 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$。$\vee$ 为析取联结词。$p\vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少一个为真。

蕴涵式 设 p,q 为二命题，复合命题“如果 p，则 q”称作 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p\rightarrow q$。称 p 为蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件。$\rightarrow$ 称作蕴涵联结词。$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

等价式 设 p,q 为二命题，复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的等价式，记作 $p\leftrightarrow q$。称 $\leftrightarrow$ 为等价联结词。$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p,q 真值相同。

习　题

1.1.1 下列各语句中哪些是命题？

1） 2 是素数。

2）雪是黑色的。

3）$2+3=5$。

4）明年10月 1 日是晴天。

5）这朵花多好看呀！

6）下午有会吗？

7）请把门关上！

8）$x+5>6$。

9）地球外的星球上也有人。

10）我正在说谎。

1.1.2 合取联结词的应用。将下面命题符号化。

1）李瑞既聪明又用功。

2）李瑞虽然聪明，但不用功。

3）李瑞不但聪明，而且用功。

4）李瑞不是不聪明，而是不用功。

5）李瑞和李珊是姐妹。

6）蓝色和黄色可以调配成绿色。

1.1.3 析取联结词的应用。将下列命题符号化。

1）王红是游泳冠军或百米赛跑冠军。

2）李兰现在在宿舍或在图书馆里。

3）选王红或李兰中的一人当班长。

1.1.4 蕴涵联结词的应用。将下列命题符号化。

1）只要不下雨，我就骑自行车上班。

2）只有不下雨，我才骑自行车上班。

3）除非天气好，否则我是不去公园玩的。

1.1.5 分析下列各命题的真值。

1）若 $2+2=4$，则太阳从东方升起。

2）若 $2+2\neq4$，则太阳从东方升起。

3）若 $2+2=4$，则太阳从西方升起。

4）若 $2+2\neq4$，则太阳从西方升起。

1.1.6 分析下列各命题的真值：

1）$2+2=4$ 当且仅当 3 是奇数。

2）$2+2=4$ 当且仅当 3 不是奇数。

3）$2+2\neq4$ 当且仅当 3 是奇数。

4）$2+2\neq4$ 当且仅当 3 不是奇数。

5）两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等。

6）两角相等当且仅当它们是对顶角。

1.1.7 将下列命题符号化。

1）2既是偶数又是素数。

2）虽然天气很冷，但老王还是准时到车站了。

3）小王一边吃饭，一边看电视。

4）王会民生于1970年或1971年。

5）李梅是三好学生或优秀团员。

6）派周丽或赵晖中的一人去开会。

7）不劳动者，不得食。

8）12是素数，这是假的。

9）只有鸟才会飞。

10）一个整数是奇数当且仅当它不能被 2 整除。

11）函数 $f(x)$ 在 x_0 可导当且仅当它在 x_0 处连续。

在以上各命题中，指出 1),8),10),11）的真值。

1.1.8　将下列命题符号化。

1）如果晚上小王做完了作业并且没有其它事情，他就看电视或听音乐。

2）若 a 是偶数，则 a 能被 2 整除；若 a 是奇数，则 a 不能被 2 整除；a 是偶数或者是奇数。所以 a 能被 2 整除或不能被 2 整除。

3）若张老师来了，这个问题可以得到解决；若李老师来了，那个问题可以得到解决；张老师和李老师都没来。所以这个问题和那个问题都没得到解决。

1.1.9　设 p,q,r 的意义如下：

p：刘宏是大学生。

q：刘宏心情愉快。

r：刘宏唱歌。

试用日常语言复述下列各复合命题。

1）$p\wedge(q\leftrightarrow r)$；

2）$p\wedge\neg(q\vee r)$；

3) $\neg p \wedge (q \to r)$。

1.1.10 设 p,q,r 的意义如下：

p：小王乘坐公共汽车。

q：小王在看书。

r：小王在考虑问题。

s：小王家住西四。

试用日常语言复述下列各复合命题。

1) $(p \wedge q \wedge s) \wedge \neg r$；

2) $\neg(p \vee q) \wedge r$；

3) $p \to (q \vee r)$；

4) $p \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$；

5) $s \to (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$。

1.2 命题公式及分类

内 容 提 要

合式公式

1) 单个命题常项或命题变项 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots,0,1$ 是合式公式；

2) 如果 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式；

3) 如果 A,B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也都是合式公式；

4) 只有有限次地应用 1)—3) 形成的符号串才是合式公式。合式公式也称命题公式，简称公式。公式的最外层括号可以省去。

合式公式（命题公式）的层次

1）若 A 是单个命题常项或命题变项 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots,0,1$，则称 A 是 0 层公式；

2）称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 A 符合下列情况之一：

(a) $A=\neg B$，B 是 n 层公式；

(b) $A=B\wedge C$，其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

(c) $A=B\vee C$，其中 B,C 的层次同(b)；

(d) $A=B\rightarrow C$，其中 B,C 的层次同(b)；

(e) $A=B\leftrightarrow C$，其中 B,C 的层次同(b)；

3）若 A 的最高层次为 k，则称 A 是 k 层公式。

叙述中出现的"="为通常的等号。

赋值或解释　设 A 为一命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为出现在 A 中的所有的命题变项。给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 指定一组真值，称为对 A 的一个**赋值或解释**。若指出的一组值使 A 的真值为真，则称这组值为 A 的**成真赋值**；若使 A 的真值为假，则称这组值为 A 的**成假赋值**。

真值表　含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项的命题公式共有 2^n 组赋值。将命题公式 A 在所有赋值之下取值情况列成表，称为 A 的**真值表**。构造真值表的具体步骤如下：

1）找出命题公式中所含的所有命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$（或按字典顺序排列），列出所有可能的赋值（2^n 个）；

2）按从低到高的顺序写出各层次；

3）对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后计算出命题公式的值（真值表中最后一列的值）。

命题公式的分类 设 A 为一个命题公式。

1）若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 为**重言式**或**永真式**；

2）若 A 在它的各种赋值下取值均为假，则称 A 为**矛盾式**或**永假式**；

3）若 A 至少存在一组赋值是成真赋值，则称 A 是**可满足式**。

重言式自然是可满足式。

真值函数 一个 $n(n\geqslant 1)$ 维卡氏积 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的函数称为一个 n 元真值函数。设 F 是一个 n 元真值函数，则可记为 F：$\{0,1\}^n\to\{0,1\}$。n 个命题变项共可形成 2^{2^n} 个不同的真值函数。

习　题

1.2.1 下列各符号串中，哪些不是合式公式（命题公式）？为什么？

1）$(p\wedge q)\wedge\neg r$；

2）$(\neg p\wedge\neg q)\vee$；

3）$((p\to q)\to(r\wedge s)$；

4）$(\neg(p\vee q)\wedge r)\vee s$；

5）$(pq\vee r)\to s$；

6）$p\vee q\vee\wedge r$；

7）$p\to(q\vee s)$。

1.2.2 下列命题公式各为几层公式？

1）$(p\vee\neg q)\to r$；

2）$((\neg p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$；

3）$\neg(p\vee(q\to(r\wedge s)))\to((p\to q)\wedge s)$；

4） $((p\vee q)\to r)\leftrightarrow(r\to s)$。

1.2.3 给定下面5个命题公式，其中 p,q,r 为3个任意的命题变项。

1） $(p\wedge q)\to r$；

2） $\neg r\to(\neg p\vee\neg q)$；

3） $r\to(p\wedge q)$；

4） $\neg(p\to q)\wedge q$；

5） $p\to(p\vee q)$。

（a） 指定：p：a 能被2整除，

q：b 能被2整除，

r：$(a+b)$能被2整除。

（b） 指定：p： 4能被2整除，

q： 5能被2整除，

r：$(4+5)$能被2整除。

在(a)下各公式的真值都能确定吗？在(b)下呢？

1.2.4 设 p,q 的值为0，r,s 的值为1。求下列各公式在此赋值之下的真值。

1） $p\vee(q\wedge r)$；

2） $(p\leftrightarrow r)\wedge((\neg q\wedge\neg s)\vee(q\wedge s))$；

3） $(p\wedge(q\vee r))\to((p\vee q)\wedge(r\wedge s))$；

4） $\neg(p\vee(q\to(r\wedge\neg p)))\to(r\vee\neg s)$；

5） $\neg(q\to p)\wedge p\wedge r$；

6） $(p\to(p\vee q))\wedge((p\wedge q)\to q))$。

1.2.5 用真值表判断下列命题公式的类型，即指出哪些是重言式？哪些是矛盾式？哪些是可满足式（非重言式的可满足式）？

1） $(p\wedge q)\to q$；

2) $(p\to(p\vee q))\wedge((p\to\neg p)\to\neg p)$;

3) $\neg(q\to p)\wedge p$;

4) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$;

5) $(\neg p\to q)\to(q\to\neg p)$;

6) $(p\to q)\leftrightarrow p$;

7) $(p\vee\neg p)\to((q\wedge\neg q)\wedge r)$;

8) $(p\leftrightarrow q)\to\neg((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$;

9) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$;

10) $((p\vee q)\to r)\wedge s$。

1.2.6 求下列各命题公式的成真赋值和成假赋值。

1) $((p\leftrightarrow q)\wedge q)\leftrightarrow p$;

2) $(p\to q)\wedge(q\to p)$;

3) $(p\to q)\to(p\wedge q)$;

4) $((p\vee q)\to r)\to p$。

1.2.7 设 F,G,H,R,S 是2元真值函数。它们随 p,q 的变值而取值情况如表1.1所示。试各用两个不同形式的含 p，q 的命题公式表示它们。

表 1.1

$p\ q$	F	G	H	R	S
0 0	0	0	1	1	1
0 1	0	0	1	0	1
1 0	0	1	0	0	1
1 1	0	1	1	1	1

1.2.8 设 F,G,H,R,S 是3元真值函数，它们随 p,q,r

的取值而取值情况如表 1.2 所示. 试各用两个不同形式的含命题变项 p,q,r 的命题公式表示它们.

表 1.2

$p\ q\ r$	F	G	H	R	S
0 0 0	0	1	0	0	0
0 0 1	0	1	0	1	0
0 1 0	0	1	1	1	0
0 1 1	0	1	0	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	0	1	1	1	1

1.2.9　已知 A,B,C,D 是含命题变项 p,q,r 的命题公式. 又已知

1) A 是矛盾式;

2) B 是重言式;

3) C 的成真赋值为 000,010,101;

4) D 的成假赋值为 011,100,110,111.

求 $\neg A,\neg B,\neg C,\neg D$ 的成真赋值和成假赋值.

1.2.10　设 A,B 是含命题变项 p,q,r 的命题公式. 已知

1) A 的成真赋值为 000,011,100,110,111;

2) B 的成真赋值为 000,101,110.

求 $A\vee B$，$\neg A\vee B$，$A\wedge B$，$\neg A\wedge\neg B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$ 的成真赋值，成假赋值。

1.3 等 值 演 算

内 容 提 要

等值 设 A，B 为二命题公式，若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A\Leftrightarrow B$。

设 A,B,C 是任意的命题公式，下面给出的是重要的基本的等值式。

等值式	名称
1) $A\Leftrightarrow\neg\neg A$	双重否定律
2) $A\Leftrightarrow A\vee A$ 3) $A\Leftrightarrow A\wedge A$	等幂律
4) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$ 5) $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$	交换律
6) $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ 7) $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$	结合律
8) $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 9) $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	分配律
10) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ 11) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$	德·摩根律
12) $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$ 13) $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$	吸收律
14) $A\vee 1\Leftrightarrow 1$ 15) $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$	零律
16) $A\vee 0\Leftrightarrow A$ 17) $A\wedge 1\Leftrightarrow A$	同一律