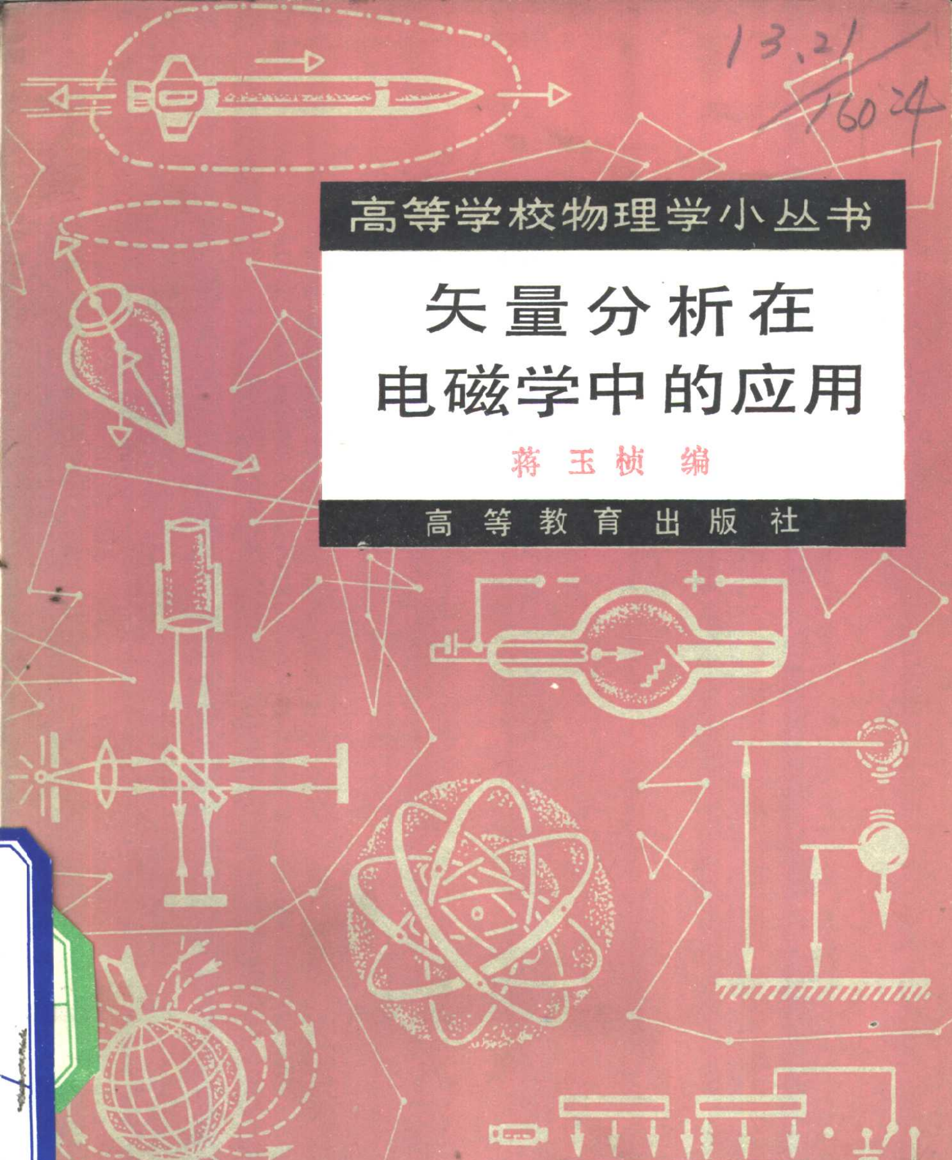


高等学校物理学小丛书

矢量分析在电磁学中的应用

蒋玉桢 编

高 等 教 育 出 版 社

本书是《物理学小丛书》的一个分册，是为高等学校普通物理课教学编写的参考读物.

本书分为三章，第一、二章着重讲解工科院校普通物理及电工学中所用到的矢量运算问题，在每节后附有典型例题；第三章为场论，着重讲矢量分析在电磁学中的应用. 本书可供高等院校理工科师生及具有大学一年级水平的读者学习参考.

高等学校物理学小丛书

矢量分析在电磁学中的应用

蒋玉桢 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.25 字数 169,000

1982 年 12 月第 1 版 1983 年 9 月第 1 次印刷

印数 00,001—10,500

书号 13010·0841 定价 1.05 元

前　言

矢量运算、矢量分析是研究电磁学的重要方法．这不仅因为电磁学中的很多物理量(如电场强度、磁感应强度等)都是矢量；而且还因为利用矢量的图解法分析电路时，可使问题大大简化．

我们常常感到，在学习数学时由于涉及的物理概念不多，觉得数学概念抽象；而在学习物理时，又不能将数学概念和某些物理规律有机的联系起来．因而本书试图解决上述问题，在学习上给读者一定的帮助．

本书分为三章，第一、二章为矢量运算部分，着重讲解工科院校普通物理及电工学所涉及到的矢量运算问题，并在每一节后有一些带分析及总结的典型例题；第三章为场论，着重讲矢量分析在电磁学中的应用．鉴于工科院校的低年级同学在学习电磁学时，由于数学内容不一定赶上物理课的需要及学时限制等因素，超出普通物理应用的数学方法讲得不多，所以第三章只着重用数学方法讲解物理概念，而例题较少．

由于本书不是电磁学讲义，因此不可能对电磁学内容进行系统的讨论．应该指出的是：本书中的一些例题在普通物理书上虽有较简单的解法，但在本书中却采用了较复杂的解法，其目的在于使读者熟悉矢量运算．

鉴于水平，书中难免有错误，请批评指正．

在编写过程中，承蒙我校物理教研室洪晶教授、阮尚弘副

教授和各位老师的帮助及指点，在此表示深深的感谢。

赵富鑫教授审阅了本书大纲和书稿，提出了许多指导性意见；黄天麟同志审阅了初稿，提出许多具体修改意见，在此一并表示感谢。

编者

1980.8.于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章　矢量加减法的应用

第一节　矢量加减法简介

一、标量和矢量

在物理量中，有些量只有大小而没有方向，如物体的体积、温度、电量等．这些仅由大小决定的量称为纯数量，习惯上称为“标量”．

标量可为正量或负量．例如，当温度高于零度时为正，而低于零度时为负．电量也有正和负之分．但是，有些标量只为正量，如体积、质量等．标量可以进行加减乘除等数学运算．

在物理量中还有一些量，它们不仅有大小，而且还有方向，如力、速度、加速度、电场强度、磁感应强度等．这些由大小和方向同时确定的量称为矢量或向量．矢量的方向用带箭头的直线段表示．箭头指明矢量的方向，线段的长度则表示矢量的大小，带有箭头的这一端叫“尾”，而另一端叫“首”（见图1-1）．一般用 **A**、**B**、**C**…等黑体字表示，有时也用 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$…，或用 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{AB}$…等表示．本书采用黑正体表示矢量．

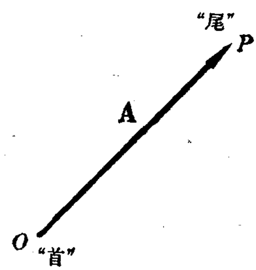


图　1-1

矢量大小(或长度)的数值叫做矢量的模或绝对值，用符号$|\mathbf{A}|$、$|\mathbf{B}|$、$|\mathbf{C}|\cdots$，或A、B、$C\cdots$，和$|\overrightarrow{OP}|$、$|\overrightarrow{AB}|$ …等表示. 矢量的模是正数量. 为了表示矢量，有时在该矢量方向上取一模等于一个长度单位的单位矢量. 矢量$\mathbf{A}$的单位矢量用$\mathbf{A}^\circ$表示，$\mathbf{A}^\circ$的指向与$\mathbf{A}$的方向相同，$|\mathbf{A}^\circ|=1$. 这样，矢量$\mathbf{A}$可表示为

$$\mathbf{A}=A\mathbf{A}^\circ$$

即矢量$\mathbf{A}$等于$\mathbf{A}$的模A乘以$\mathbf{A}$的单位矢量$\mathbf{A}^\circ$.

如果矢量的模等于零，称为零矢量，记作$\mathbf{0}$；如果两个矢量的模相等且平行和同向，那么这两个矢量就彼此相等.

二、矢量的加减法

两个矢量$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$之和不能由简单的代数相加求得，而应由几何作图法来求. 几何作图法有平行四边形法和三角形法. 利用三角形法求矢量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的和$\mathbf{C}$时，可先将矢量$\mathbf{B}$平行移到使$\mathbf{B}$的首与$\mathbf{A}$的尾相接处，再从$\mathbf{A}$的首向$\mathbf{B}$的尾引一带箭头的直线$\mathbf{C}$，则矢量$\mathbf{C}$就是矢量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的矢量和. 由于$\mathbf{C}$同$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$组成一个三角形，所以这种方法称为三角形法［见图

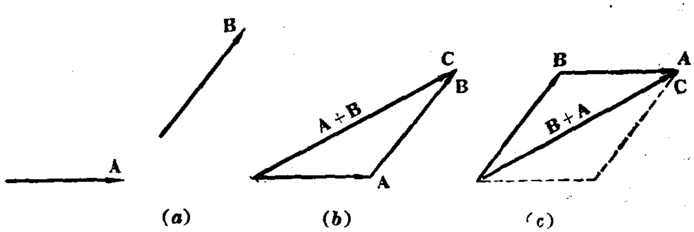


图 1-2

1-2(b)］. 从图1-2(c)中可以看出：$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$对调，即将矢量$\mathbf{A}$平行移到使$\mathbf{A}$的首与$\mathbf{B}$的尾相接处，矢量和$\mathbf{C}$不变. 因此

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

这就是说，矢量的加法运算服从于交换律.

几个矢量相加时，可以先求出两个矢量的矢量和，则将该矢量和与第三个矢量相加，……一直加到最后一个矢量为止. 多个矢量相加时服从于结合律. 这一点从图 1-3 所示的三个矢量相加中是不难看出的，即

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

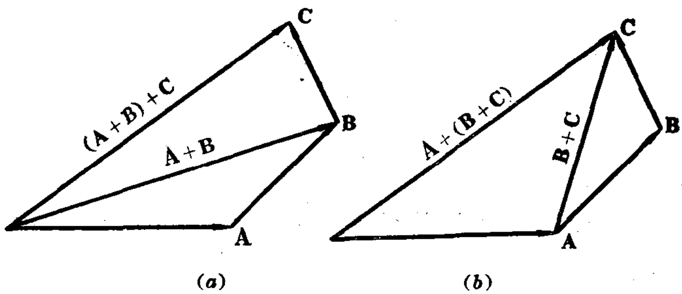


图 1-3

这就是说，几个矢量的矢量和与矢量相加的次序无关.

若用某一标量 K 乘矢量时，其结果满足乘法的分配律，即

$$K(\mathbf{A}+\mathbf{B})=K\mathbf{A}+K\mathbf{B}$$

两矢量相减时按图 1-4 规定的方法进行，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

其中，$-\mathbf{B}$ 矢量与 $\mathbf{B}$ 矢量大小相等而方向相反. 也就是说，$\mathbf{A}$ 矢量减去 $\mathbf{B}$ 矢量时，等于 $\mathbf{A}$ 矢量与 $\mathbf{B}$ 的负矢量 $(-\mathbf{B})$ 相加.

前面谈到，既有大小又有方向的量称为矢量. 但这并不是说一切有大小和方向的量都是矢量. 例如，刚体绕空间定转轴转动时，转动的量是有大小(用转角或角位移来衡量)和

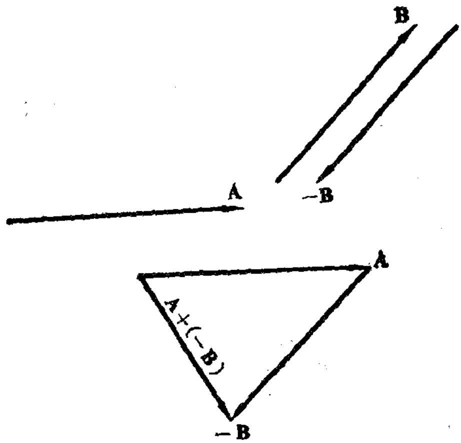
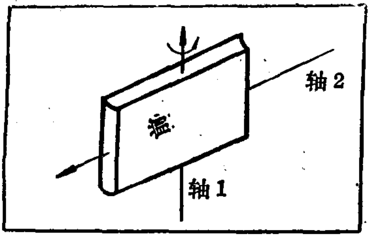


图 1-4

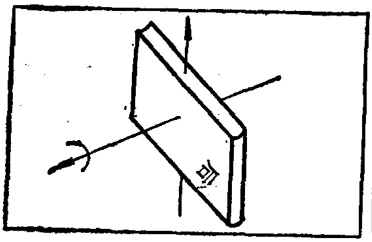
方向(转动的方向)的，然而，两个角位移，除非它们为无限小量外，是不能按照矢量加法进行求和的．这可用一特殊情况，即两个转轴互相垂直的刚体各绕其轴转过 90° 来说明．用一本书实验，能明显地看出这个问题（见图 1-5）．由于转动方式不同，加法交换律在这些转动中不再成立，也就是说有限的角位移不服从矢量加法规律．因此，有限的转动的角位移不能用矢量表示①．但 $\Delta\theta/\Delta t$ 的极限——角速度是矢量，服从矢量的加法规律．由此得出必须满足以下两个条件的量才是矢量：

1. 服从平行四边形或三角形的加法规律，
2. 具有大小和方向且与坐标系的选择无关．

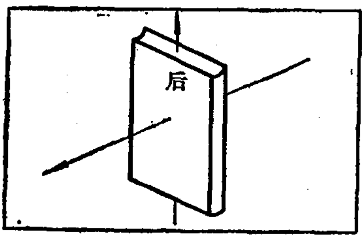
① 无限小的角位移可用矢量表示，其方向在当时的转动轴线上，指向服从右手螺旋定则，大小由沿轴线上的长度决定．



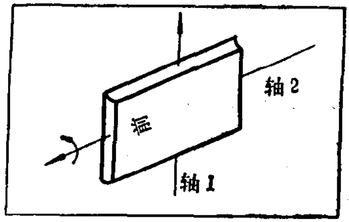
(*a*) 书在起始方位



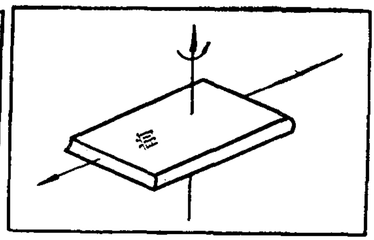
(*b*) 绕轴 1 转动$\frac{\pi}{2}$之后的方位



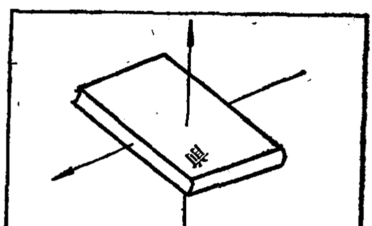
(*c*) 再绕轴 2 转动$\frac{\pi}{2}$后的方位



(*d*) 书在起始方位



(*e*) 绕轴 2 转动$\frac{\pi}{2}$后的方位



(*f*) 再绕轴 1 转动$\frac{\pi}{2}$后的方位

图 1-5

三、矢量的投影表示法

上面讨论矢量时，未涉及坐标系问题．事实上，对矢量进行加法等矢量运算时，可以不考虑坐标系．由于矢量与坐标

系选择无关的这一特点，用矢量形式能简单明瞭地表示出物理定律的基本内容. 但在应用物理定律求解问题时，视问题的具体情况，常常先选定某一坐标系，然后把矢量分解为该坐标系的各个坐标方向的分量，这样在进行运算时会很方便. 我们先介绍笛卡儿直角坐标系. 在该坐标系中，三个坐标轴 X、Y、Z 的单位矢量分别为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$. 于是，在笛卡儿坐标系中，矢量 $\mathbf{A}$ 可用它的三个坐标分量表示为

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$$

标量 A_x、A_y、A_z 分别是 $\mathbf{A}$ 在 X、Y、Z 轴上的投影，而 $A_x\mathbf{i}$、$A_y\mathbf{j}$、$A_z\mathbf{k}$ 为 $\mathbf{A}$ 的分矢量或分量(如图 1-6)，x、y、z 为矢量 $\mathbf{A}$ 的尾这

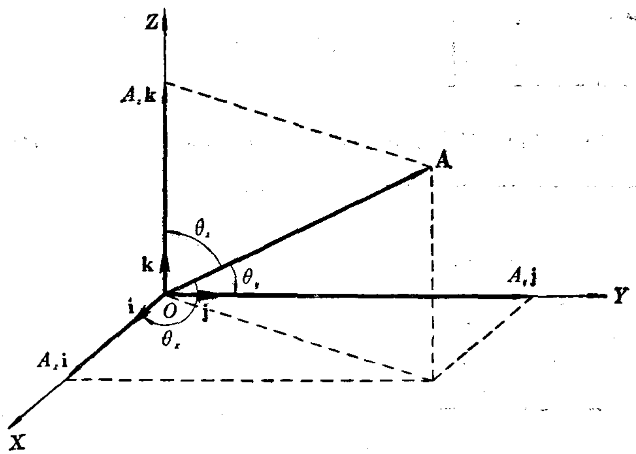


图 1-6

一点的坐标变量. 如果 θ_x、θ_y、θ_z 分别是 $\mathbf{A}$ 与各坐标轴正方向之间的夹角(称为矢量 $\mathbf{A}$ 的方位角)，则

$$A_x=|\mathbf{A}|\cos\theta_x$$

$$A_y = |\mathbf{A}| \cos\theta_y$$

$$A_z = |\mathbf{A}| \cos\theta_z$$

$\cos\theta_x$、$\cos\theta_y$、$\cos\theta_z$ 叫做矢量**A**的方向余弦．这样，在**A**方向上的单位矢量 $\mathbf{A}^\circ$ 就可以表示为

$$\mathbf{A}^\circ = \mathbf{i}\cos\theta_x + \mathbf{j}\cos\theta_y + \mathbf{k}\cos\theta_z$$

在任何一个坐标轴上矢量 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的各分量，等于 **A** 和 **B** 沿同一轴的分量之和．因为

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

$$= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A+B)_x\mathbf{i} + (A+B)_y\mathbf{j} + (A+B)_z\mathbf{k}$$

所以有

$$(A+B)_x\mathbf{i} + (A+B)_y\mathbf{j} + (A+B)_z\mathbf{k}$$

$$= (A_x+B_x)\mathbf{i} + (A_y+B_y)\mathbf{j} + (A_z+B_z)\mathbf{k}$$

下面来讨论一下柱面坐标．柱面坐标系相当于把直角坐标系(笛卡儿坐标系)中的 x、y 换为二维极坐标 ρ、α，而保留 Z 坐标(图 1-7)．柱面坐标系的变量 ρ、α、z 与直角坐标系的变量 x、y、z 的变换关系如下:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

柱面坐标三个变量的变化范围是

$$0 \leqslant \rho < +\infty$$

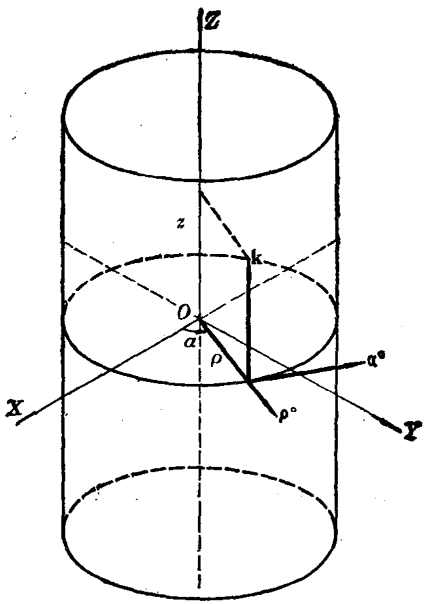


图 1-7

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$$

$$-\infty < z < +\infty$$

A 矢量在柱面坐标系中的表达式为

$$\mathbf{A} = A_\rho \boldsymbol{\rho}^\circ + A_\alpha \boldsymbol{\alpha}^\circ + A_z \mathbf{k}$$

$\boldsymbol{\rho}^\circ$、$\boldsymbol{\alpha}^\circ$、$\mathbf{k}$ 为柱面坐标系三个坐标方向的单位矢量.

在直角坐标系 $O\text{-}XYZ$ 给定后，球面坐标系的三个坐标变量分别是矢径的长度 r、矢径与 Z 轴的夹角 θ 和矢径在 XOY 平面上的投影与 X 轴正向的夹角 α(图 1-8). 三个变量 r、θ、α 与直角坐标系中变量 x、y、z 的变换关系如下:

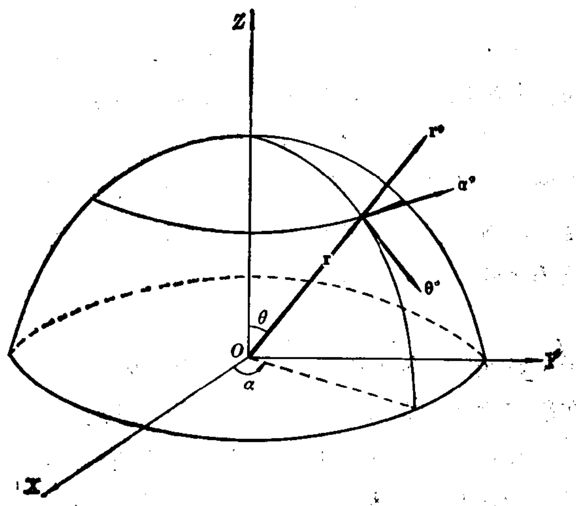


图 1-8

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\alpha \\ y = r\sin\theta\sin\alpha \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

球面坐标系中三个变量的范围是

$$0 \leqslant r < +\infty$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$$

A 矢量在球面坐标系中的表达式为

$$\mathbf{A}=A_r\mathbf{r}^\circ+A_\theta\boldsymbol{\theta}^\circ+A_\alpha\boldsymbol{\alpha}^\circ$$

$\mathbf{r}^\circ$、$\boldsymbol{\theta}^\circ$、$\boldsymbol{\alpha}^\circ$ 是球面坐标系三个变量方向的单位矢量.

四、一维同频简谐量的迭加　矢量图解法

1. 一维同频简谐量的迭加

机械振动的位移,交流电中的电压或电流,电磁波中的电场强度、磁场强度等,都可以表示为幅值为 A_0、角频率为 ω、初相位为 φ 的一维简谐量,其表示式为

$$A(t)=A_0\cos(\omega t+\varphi)$$

或若干个 ω 和 A_0 各不相同的简谐量的迭加.

在研究这类问题时,常常遇到的是一维同频简谐量的迭加问题. 在这里我们先阐明如何用矢量的图解法简化一维同频简谐量的迭加,在本章的第三节中再讨论它在电磁学中的应用.

今有两个同频简谐量

$$A_1(t)=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1) \tag{1.1}$$

$$A_2(t)=A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2) \tag{1.2}$$

其和为

$$A(t)=A_1(t)+A_2(t) \tag{1.3}$$

通过三角函数的运算可求得 $A(t)$与 $A_1(t)$和 $A_2(t)$之间的关系. 为此,我们先假设迭加的结果 $A(t)$仍具有同频简谐量的形式,即

$$A(t)=A_0\cos(\omega t+\varphi)$$

并把此式和式(1.1)、(1.2)代入式(1.3)中,得

$$A_0\cos(\omega t+\varphi)=A_{10}\cos(\omega t+\varphi_1)+A_{20}\cos(\omega t+\varphi_2)$$

两边用和角公式展开,则有