

信号复原与重建

东南大学出版社

序

信息科学是研究各种信号与信息的产生、获取、传输、变换、加工处理、分类识别、存贮及利用等内容的一门科学，其重要性将随着工业、农业、国防和科学技术的发展而与日俱增。信号与信息处理学科是信息科学的重要组成部分，它的基础理论和方法已经广泛应用于雷达、声纳、数据通信、语言通信、图像通信、图像处理、计算机图形学、自动识别、自动控制、机器视觉、人工智能、生物医学、振动工程、宇航工程、遥感技术、地质勘探以及波谱学等一切领域。该学科水平的高低，可反映一个国家的整体技术水平，故世界各国都非常重视此学科的课题研究和人才培养。我国也专门设立了信号与信息处理学科（专业）来培养硕士、博士研究生；每年在国内外学术会议和刊物上发表的论文甚多，包括一维和多维的信号与系统参数估计，离散变换及其快速运算，数字滤波和检测，谱估计与建模，自适应信号处理，语音信号处理，图像数字处理与识别，VLSI信号处理等分枝学科。

为了反映该学科迅速发展的面貌和世界各国近年来所取得的最新研究成果，特组织国内外专家教授撰写成本丛书，其中有些内容在国内同类书中还是首次发表。丛书共含六本专著：

- 信号处理的数学方法 (柳重堪教授)
- 离散变换和快速运算 (钱惠生教授)
- 信号复原与重建 (王延平教授)
- 现代谱估计 (王宏禹教授)
- 自适应信号处理 (何振亚教授)
- VLSI阵列处理 (S.K.Yung教授)

这套丛书的特点是内容丰富、取材新颖、系统性好、阐述严谨、概念清楚，便于阅读，可以作为硕士、博士研究生的教材或主要参考书，也可作为科技人员进修的专著，对我国培养高层次人才和推动学科发展将起到重要作用。

何振亚

1990. 9. 20 于南京

前 言

为了认识客观事物，人们总是先对它进行观测，然后通过分析观测数据对观测对象的本质进行了解。由于各种客观因素的限制，这些观测信号总是被一些噪声所污染，被观测系统所畸变。信号的复原和重建所研究的问题就是如何从这样一些被污染和畸变的观察信号中提取出所需要的信息来。在地震信号处理中所需提取的信息可能是地层的地质构造参数；在图象处理中可能是恢复经过不完善光学成象系统而遭受畸变的图象；在电镜图象处理中可能是如何克服衍射效应获得超分辨率图象；在光谱分析中可能是如何从噪声干扰中提取和分辨两个极其接近的谱线的问题；在医学界广泛使用的 X 射线 CT 中，通过测量 X 射线在不同方位和位置通过人体后的投影重建出该断层对 X 射线衰减的空间分布图象来。除了以上所列举的以外，在结晶学、天文学、光学、信息处理、遥感、生物医学信号处理、雷达信号处理和语声信号处理等领域信号复原和重建都有着广泛的用途。

复原主要是指将被噪声污染或畸变了信号中的噪声和畸变去除，从而恢复原来信号的“真貌”。重建也是复原的过程，但它更强调的是利用与原信号面貌全非或残缺不全的观测信号中的信息，恢复出原来的信号。

在给出信号复原和重建的上述定义时，我们隐含地假定了信号是可以被复原的。而事实上问题还要复杂得多。多数的情况，信号原来的真面貌是不可能完全复原的。因此就必须讨论在某种近似意义下的信号复原问题。从更广泛的角度上来看，信号的复原问题是一个信号的求逆问题。

逆问题一般说来要比正问题难解得多。逆问题经常存在着非唯一解，有时甚至无解。为了得到逆问题的有用解还经常需要一些额外的先验知识以及对解的一些其它附加的约束条件。为此本

书第一章研究作为先验知识的信号模型、观测模型。第二章研究如何从含有噪声的观测信号中复原出原信号的问题。

复原和重建的第一个困难在于逆问题的不适定性所带来的数值不稳定性。重建的另一个困难是由于观测系统的限制，使得所研究的图象的某些信息不可能为观测系统所观测到，即这些信息处于该观测系统的零空间。显然如果我们仅用观测数据来重建时，重建后的内容就不可能包含有零空间的任何信息。在第三章将讨论这些问题。

在许多情况下，可以用正则化方法来解决以上两个问题。这种方法的实质就是在求解的过程中将观测数据和先验知识综合在一起考虑。这样所得到的结果有可能既消除了某些观测噪声的影响又得到了包含某些零空间信息的解。这样，正则化方法提供了由不完全观测数据进行信号的复原和重建的可能。我们将在第四章中讨论这一重要问题。

由于在信号复原和重建中大量采用了非线性方法，第五章讨论迭代算法。在第六章中我们介绍研究近代的信号和图象的复原与重建的一些方法。第七章所讨论的是由不完全观测数据进行信号的复原和重建，这是近年来一个十分活跃的研究领域，也是本书的重点。第八章则讨论在信号复原和重建中的另一个重要问题——信号的拟合。

近代的信号复原和重建已经从一维发展到多维。计算机图形和图象处理技术的发展也提供了二维和三维信号显示和数据处理的相应的功能，因此作为多维信号的二维切面或投影的二维信号的处理就在本书中给予了更多的重视。

本书在编写过程中得到东南大学何振亚教授的鼓励支持。他亲自审阅了原稿并提出许多宝贵的意见。作者在此表示由衷的感谢。作者还要感谢的是编辑朱经邦老师，他对本书的文字润色和内容校对都作了大量的工作。

由于本人水平有限，因此书中难免存在错误和不当之处，诚望读者批评指正。

王延平 于武汉大学
1991年12月

作者简介

王延平(教授),
1937 年生于山东省青
岛市,1960 年毕业于
南京工学院无线电
系,现任武汉大学无
线电信息工程系主
任。主要研究领域为
信号处理及计算机应
用,发表有关论文约
50 篇,其研究成果曾
获得国家发明奖、省
市科学技术进步奖等
多项奖励。



封面设计:徐晓平
胡 滨

目 录

第一章 信号模型、观测模型和判据.....	(1)
1. 1 信号和图像模型	(1)
1. 2 观测模型	(11)
1. 3 判据	(30)
参考文献.....	(33)
第二章 噪声的滤除.....	(35)
2. 1 观测噪声	(35)
2. 2 基于图像局部特性的自适应滤波	(37)
2. 3 基于人眼视觉特性的滤波方法	(42)
2. 4 各向异性滤波	(44)
2. 5 级联一维自适应滤波	(48)
参考文献.....	(51)
第三章 逆问题.....	(53)
3. 1 有限范围连续目标的离散化	(53)
3. 2 离散系统的矩阵表示	(58)
3. 3 逆问题, 右逆、左逆和广义逆	(65)
3. 4 奇异值分解 SVD	(71)
3. 5 用 SVD 来分析复原与重建中的非唯一性和 观测噪声的影响.....	(77)
3. 6 连续信号的逆问题	(82)
3. 7 降质算子的奇异系统	(92)
3. 8 在奇异系统下的广义逆及系统的条件数	(94)
参考文献.....	(98)
第四章 正则化.....	(100)
4. 1 用正则化方法解决不适定问题	(100)
4. 2 吉洪诺夫正则化算法	(105)
4. 3 C-广义解及 C-广义解的正则化	(116)

4.4 正则化算法的发展	(119)
参考文献	(121)
第五章 迭代算法	(123)
5.1 引言	(123)
5.2 范希特迭代算法和 P 阶迭代算法	(124)
5.3 容纳先验知识的约束迭代算法	(131)
5.4 带限信号通过带限非线性降质后的复原	(137)
5.5 线性移不变降质信号的迭代复原	(138)
5.6 约束解卷积算法的实现和应用	(143)
参考文献	(154)
第六章 近代信号复原和重建的一些方法	(155)
6.1 广义维纳滤波	(155)
6.2 贝克斯-吉尔伯特理论	(157)
6.3 L_p 范数判据下的信号复原	(164)
6.4 最大熵复原方法 ME	(172)
6.5 凸集合投影信号重建方法 POCS	(180)
6.6 信号复原和重建中的广义投影理论	(192)
6.7 EM 算法及其在图像复原中的应用	(198)
参考文献	(213)
第七章 从不完全观测数据对信号进行复原或重建	(216)
7.1 超分辨率和带限信号的外推	(216)
7.2 由部分傅里叶变换信息对信号进行重建	(221)
7.3 由不完全投影数据重建图像	(229)
参考文献	(252)
第八章 信号复原和重建中的拟合问题	(254)
8.1 用正规方程进行信号拟合	(255)
8.2 用正交多项式进行信号拟合	(257)
8.3 莱文森算法	(260)
8.4 B-样条函数拟合	(262)
8.5 径向基函数拟合	(268)
参考文献	(274)

第一章 信号模型、观测模型和判据

在信号复原和重建中，为了得到好的结果，正确和充分利用已知的先验知识是至关重要的。先验知识包括了对原信号的了解，这可以由信号模型加以表述。先验知识还包括对观测系统的了解，即原信号如何转变成为观测数据的过程，这部分由观测模型加以表述。另外，由于噪声的影响使得复原过程不可能得到完全准确的原信号，如何评价复原信号的好坏就必须给出一个标准或判据。不同的判据也会对复原的信号有所影响，而判据也是在复原和重建过程中需要先验给出的。

模型的广义意义可以认为是人们对于一个系统或信号的有关知识。模型可以分为如下几类：

1. 直觉模型：这是人们脑中的有关系统和信号的知识的一种非分析形式的罗列。例如一个汽车司机对汽车的一些动态特性的知识。

2. 列表或图形模型：关于系统或信号的知识以图形或图表的形式出现。例如一个线性系统频率特性的波特图就可以看成这个系统的图形模型。对于信号而言，例如可能是给出的某些概率分布的曲线或图形。

3. 数学模型：用数学关系表示出的系统或信号的一些性质，例如在用照相机摄象过程中所应遵循的光学成像公式等。对于信号而言，例如可能是有关信号的某些概率分布的公式。

1.1 信号和图像模型

我们所遇到的信号是各种各样的。研究信号模型的目的实际

上是揭示信号本身的内在关系，以便在以后的处理过程中可以利用这种关系。从另一角度来说，也可理解为把复杂的信号给以分类，而所分的类别就是该信号的模型。约束可以看成信号的一种模型：例如一些信号从本质上不可能为负，而另外一些信号只可能在某一限定范围之内存在。有关信号的这一类由约束所描述的模型将在第六章和其它有关章节中讨论。本章着重讨论的是信号的参数模型：例如对一个高斯分布的信号即可以用（为其均值和方差所完全确定的）高斯模型来描述。不同的参数（均值和方差）又对信号的小的类别作了进一步的明确。显然，如果可能，模型的参数化是信号的模型化的一种极为有效的表述。

对于信号复原和重建来说，利用数学模型是最为方便的。为了建立数学模型可以采用如下两种方法：

1. 由系统产生和变换信号的机构，即系统工作的原理和内在关系或信号本身的内在关系来直接推导出信号的数学模型。

2. 很多情况下，有关系统和信号机构或内在关系的知识可能是不完全的，或本身就是变化的，因而也是难以预测的。这时可以通过一些有关的测量然后进行模型化。这个过程称为模型的辨识。显然为此就必须仔细地设计试验方案以保证获取必要的信息。进行模型化的过程的第一步是找出一个个可能适用的模型系列，第二步是从中选出适合于试验观测数据的那个具体的模型，这一具体化过程是一个参数估计的过程。

1.1.1 参数统计模型

从统计的角度来说建立一个数学模型主要的是要得到一个能描述所讨论问题的概率密度函数 $p df$ ，在此假定 $p df$ 是可以利用一些参数来描述的。

假定 $f(x, y)$ 为一幅 $N \times N$ 的离散图像矩阵 f 的第 x 行第 y 列的元素，

$$f = \begin{bmatrix} f(1, 1) & f(1, 2) & \cdots & f(1, N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(N, 1) & \vdots & \cdots & f(N, N) \end{bmatrix}$$

我们用行或列的堆叠的方法可以把它表示成一个 N^2 维的列矢量 f ,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N \times N} \end{bmatrix}$$

现在讨论描述 N^2 维图像矢量 f 的参数统计模型。如果上式 f 的所有 N^2 个分量都是互相独立的, 则可以选择 N^2 个不同的 pdf 来描述每一个分量。由于它们之间是独立的, 因而整个矢量的 pdf 就可由这 N^2 个分量的 pdf 的乘积来表示。但不论是图像还是其它的一些信号实际上总具有某些统计关系 (即矢量 f 的第 i 个分量与第 j 个分量不会完全互相统计独立), 而一般说来, 多变量高斯过程可以一定程度的描述很多实际图像矢量 f 的 pdf 。其原因是概率论中中心极限定理所指出的: 当独立的随机变量数目不断增大, 其联合概率密度趋向于高斯分布。当然, 从另一方面说由于人们对高斯过程了解的较清楚, 用它来表示的 pdf 也比较简单和易于处理, 所以即使有些牵强, 人们也总是愿意采用高斯分布的表示。

在建立图像参数统计模型的过程中, 我们所处理的问题实际上是一类图像。根据这一概念, 在多变量随机数据的这类图像中, f 这个图像样本的 pdf 可用以下高斯联合分布表示:

$$p(f) = \left((2\pi)^{N^2/2} (\det[\Phi_f])^{1/2} \right)^{-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (f - \langle f \rangle)^T [\Phi_f]^{-1} (f - \langle f \rangle) \right\} \quad (1.1.1)$$

式中 $[\Phi_f]$ 为协方差矩阵; $\langle f \rangle$ 为均值矢量。

下面进一步考虑协方差矩阵 $[\Phi_f]$ 的结构。由定义有:

$$[\Phi_f] = E\{(f - \langle f \rangle)(f - \langle f \rangle)^T\} \quad (1.1.2)$$

式中 $E\{\cdot\}$ 表示在总体上求期望值。由于 f 是 $N \times N$ 图像 $f(x, y)$ 的堆叠形式，为一个 N^2 维的列矢量，因此 $[\Phi_f]$ 是一个 $N^2 \times N^2$ 的矩阵。为方便起见，还可看成由 $N \times N$ 个分块矩阵表示的矩阵，每个分块是 $N \times N$ 维的。

$$[\Phi_f] = \begin{bmatrix} [\Phi_{11}] & \cdots & [\Phi_{1N}] \\ \vdots & [\Phi_{nn}] & \vdots \\ [\Phi_{N1}] & \cdots & [\Phi_{NN}] \end{bmatrix}$$

下面研究分块矩阵 $[\Phi_{mn}]$ 。如果 f_j 表示由 $f(x, y)$ 第 j 行元素组成的 N 维矢量

$$f_j = \begin{bmatrix} f(j, 1) \\ \vdots \\ f(j, N) \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

这样 $[\Phi_f]$ 的第 m, n 个分块矩阵 $[\Phi_{mn}]$ 可表示为

$$[\Phi_{mn}] = E\{(f_m - \langle f_m \rangle)(f_n - \langle f_n \rangle)^T\} \quad (1.1.4)$$

可以看出 $[\Phi_{mn}]$ 是对称的：

$$[\Phi_{mn}] = [\Phi_{nm}]^T \quad (1.1.5)$$

从而整个协方差矩阵 $[\Phi_f]$ 也是对称的：

$$[\Phi_{mn}] = [\Phi_{nm}] \quad (1.1.6)$$

由于每个分块 $[\Phi_{mn}]$ 携带了各不同 m, n 行间协方差的信息，因此 $[\Phi_f]$ 称为分块协方差矩阵。

由于原图像 $f(x, y)$ 最多只能有 N^2 个自由度，而式 (1.1.1) 中 pdf 却需要 $N^4 + N^2$ 个参数去说明 ($N^2 \times N^2$ 的协方差矩阵和 $N^2 \times 1$ 的均值矢量)，所以初看起来利用式 (1.1.1) 的参数统计模型是低效的。但不要忘记，利用 $N^4 + N^2$ 个参数表示的是无穷多类的图像，而 f 仅仅是这无穷多类图像中的一个具体样本。因此上面的看法并不是很全面的。

下面说明利用式(1.1.1)来建立图像模型的基本概念。

1. 用来描述一类图像模型的参数数值就是与我们对该类图像的先验了解的一种描述。在此，协方差矩阵和均值矢量各自起到全然不同的作用。例如，假定先验的知识表明图像具有常数均值，即均值矢量在每一点都是一个常矢量：

$$\langle f \rangle = E\{f\} = \mu \quad (1.1.7)$$

其中

$$\mu = \mu_0 \quad (1.1.8)$$

由于 $\langle f \rangle$ 已选择为常矢量，这样描述图像模型整体约束的协方差矩阵就必须用来描述图像模型的其他结构。在这种情况下，这类的图像模型就只能局限于一些纹理图像的表达。

2. 均值矢量 f 实际上是可以表示图像结构的。假定均值图像不是常矢量，而具体代表了某一幅图像的结构，例如可以用 f 来进行一个人脸的粗糙的表示：一个模模糊糊的，有眼、鼻、口等的鸭蛋状的脸型。式 (1.1.1) 图像模型实际上可表示包括围绕给定均值 $\langle f \rangle$ 随机起伏的一类图像。即在给定某一协方差矩阵 $[\Phi_f]$ 后，这一模型还代表了类似于 $\langle f \rangle$ 的一大类人脸的图像。

利用式 (1.1.1) 图像模型也可以具体描述某一特定图像 f' ，这时可以令均值矢量 $\langle f \rangle = f'$ ，令协方差矩阵 $[\Phi_f]$ 的所有元素都为 0 即可。

3. 用式 (1.1.1) 表示的图像模型还可分成平稳的和非平稳的两类。一阶、二阶平稳模型具有如下性质：

$$E\{f\} = \mu \quad (\text{常矢量}) \quad (1.1.9)$$

而如果 $j - k = m - n$ ，及 $p - q = r - s$ ，则有

$$[\Phi_{pq}] = [\Phi_{rs}] \quad (1.1.10a)$$

及

$$\{[\Phi_{pq}]\}_{ik} = \{[\Phi_{pq}]\}_{mn} \quad (1.1.10b)$$

其中分块矩阵由式 (1.1.4) 表示，而 $\{\cdot\}$ 表示了矩阵或矢量的元素，具有式 (1.1.10) 性质的矩阵实际上是分块托普利兹矩阵。如

果一幅图像的协方差矩阵不是托普利兹的，则它将属于二阶非平稳模型。如果均值矢量不是常矢量，但为已知的，则若将图像减去这一个矢量，它仍然可能是平稳的。从上面第一点和第二点的讨论可知，一个平稳的图像模型仅仅可能用来表示某一类图像的比较粗略的总体性质。

4. 空间平稳的模型实际上等效于平稳遍历的模型。这样，我们就可以利用空间平均来代替集合平均。

$$\mu_0 = \frac{1}{N^2} \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N f(x, y)$$

由于这时如式 (1.1.8)， $\langle f \rangle$ 是一个常矢量，显然它就不可能携带图像不同结构的信息。这样就得到结论：如果想通过选择不同的 $\langle f \rangle$ 来表示图像的基本结构，这就必须选择一阶非平稳模型。

实际图像即便接近高斯模型也总是与高斯图像模型有差别的。例如，二值图像就不可能表示成高斯灰度分布。另外一个很明显的缺点是高斯模型要求图像中有负的分量，而实际图像中各象素的值总是非负的。关于负分量的问题可以从两方面考虑来解决：

i) 如果图像各点的方差比起其均值 $\langle f \rangle$ 的分量要小，即图像的密度函数非常集中于其正的均值 $\langle f \rangle$ 上，则图像仍可用高斯模型来近似。因为这时高斯分布负端的尾巴的总概率是很小的。这种截断负端尾巴的高斯分布与原分布相差不是很大的。

ii) 如果不是上述情况，还可采用斯多科汉 (Stockham) 提出的同态模型。根据这一概念，一幅图像 $f(x, y)$ 可以看成两个分量的乘积：一个分量是照射分量，另一个分量是反射分量，分别以 $f_i(x, y)$ 和 $f_r(x, y)$ 表示，即

$$f(x, y) = f_i(x, y) f_r(x, y) \quad (1.1.11)$$

照射分量一般由图像背景亮度的变化决定（即携有空间慢变化的均值矢量的信息），而反射分量则携有物体细节的信息。它主要反映了在不同照明条件下，物体表面由于不同细节所造成不同

的反射情况。可以通过取对数将式 (1.1.11) 的乘性过程变成加性过程:

$$\log(f(x, y)) = \log(f_i(x, y)) + \log(f_r(x, y))$$

令

$$\log(f(x, y)) = g(x, y)$$

$$\log(f_i(x, y)) = g_i(x, y)$$

$$\log(f_r(x, y)) = g_r(x, y)$$

则有

$$g(x, y) = g_i(x, y) + g_r(x, y)$$

这样就仍可在假定 $g(x, y)$ 为高斯分布的情况下保证 $f(x, y)$ 的正性。

上面的讨论中我们论述了高斯分布作为图像模型的合理性。但实际上即使基于一阶统计, 对一些典型图像的像素灰度直方图统计结果来看, 它们也有异于高斯过程。因此, 在处理要求比较高的场合下, 还是应该对于分布情况加以仔细研究。

对图像像素之间的空间关系的模型化有利于对图像统计性质的进一步揭示。对某些二阶统计的测量表明, 自相关函数是由图像中的细节决定的。大多数图像的自相关函数具有如下的两个特点: i) 相邻的像素间存在着大的相关性, 随着距离的增大, 相关性减小得很快。ii) 自相关函数减小的速率在像素间距小的时候大, 而像素间距变大的时候自相关函数减小速率变小; 这说明了几乎所有的能量都集中在低频范围。通过大量测量, 多数图像的自相关函数可以近似表示为如下形式的函数:

$$\exp(-k_1|\Delta x| - k_2|\Delta y|)$$

或

$$\exp\{-(k_1\Delta x^2 - k_2\Delta y^2)^{1/2}\}$$

式中 Δx 和 Δy 为空间位移, 而 k_1 和 k_2 为与图像有关的正的常数。一般说来, 很多情况下第二种形式可能更符合于测量数据, 但第一种形式在保持正确的趋势下更便于计算。

1.1.2 图像的自回归模型

这种图像模型把一幅 $N \times N$ 的离散图像 $f(x, y)$ 看成是由如下的二维自回归过程所产生的：

$$f(x, y) = a(x, y) * f(x, y) + v(x, y) \\ = \sum_{k=-1}^N \sum_{l=-1}^N a(k, l) f(x-k, y-l) + v(x, y) \quad (1.1.12)$$

式中 $v(x, y)$ 为一个零均值的高斯分布的白噪声，可以看成更新过程，也可以看成用在邻域 S_a 中各点线性组合来近似 $f(x, y)$ 所导致的误差。选取不同的邻域 S_a 也导致不同的模型，一些常用的选择是：

i) 非对称半平面因果模型：

$$S_a = \left\{ (p, q) : (p \geq 0, q < 0) \cup (p > 0, q \geq 0) \right\} \quad (1.1.13a)$$

ii) 半因果模型：

$$S_a = \left\{ (p, q) : (p > 0, \forall q) \cup (p = 0, q \neq 0) \right\} \quad (1.1.13b)$$

iii) 非因果模型：

$$S_a = \left\{ (p, q) : (p, q) \neq (0, 0) \right\} \quad (1.1.13c)$$

图 1.1 表示了这三种邻域。一则为了简单，二则也符合大多数情况，在计算时总是限定模型参数 $\{a(p, q)\}$ 的非零值局限在一个称作预测窗口 S 的范围之内，一般总有 $S \subset S_a$ 。

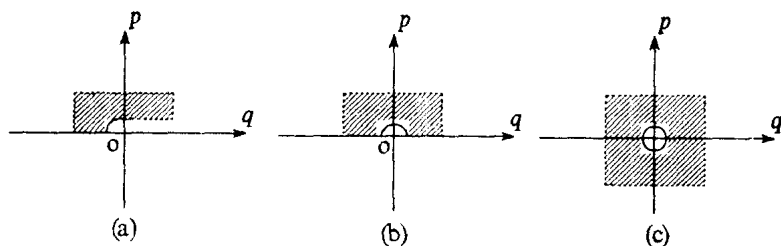


图 1.1 三种不同的邻域

(a) 非对称半平面因果模型；(b) 半因果模型；(c) 非因果模型

用矢量形式来表示上面模型

$$f = Af + v \quad (1.1.14)$$

式中 A 为 $N^2 \times N^2$ 的图像模型矩阵。如果式 (1.1.12) 中的卷积是循环的, 则矩阵 A 将是分块循环矩阵。图像 f 的概率密度函数将由式 (1.1.14) 模型和 v 的统计性质所决定

$$p(f; A, Q_v) = \sqrt{\frac{\det|I - A|^2}{2\pi^{N^2} \det|Q_v|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} f^T (I - A)^T Q_v^{-1} (I - A) f\right\} \quad (1.1.15)$$

式中已假定观测噪声 v 是零均值、高斯分布, 而协方差矩阵 $Q_v = \sigma_v^2 I$ 是一个 $N^2 \times N^2$ 的对角线矩阵。

高于二阶统计特性的研究开展得很少。一方面这些高阶特性随图像不同而变化很大, 另一方面利用高阶统计建模恐怕也是极为复杂的。

1.1.3 图像的非平稳模型

如上所述, 一幅图像可以看成是一个随机场的一个实现, 一般说来, 非平稳图像模型比起平稳的图像模型要更接近于实际情况, 其非平稳性不但表现在均值和方差上, 也表现在相关函数上。但是为了简单起见, 在考虑非平稳时, 一般只是考虑均值和方差的非平稳并假定象素间是不相关的。这样, 在式 (1.1.2) 的协方差矩阵就是一个对角线矩阵, 其对角线元素就是对应象素的方差。在这一模型下的图像可以表示为

$$f(x, y) = m(x, y) + \sigma(x, y) n(x, y) \quad (1.1.16)$$

式中, $m(x, y)$ 和 $\sigma(x, y)$ 是随机场 f 在 (x, y) 点的非平稳均值和非平稳方差, $n(x, y)$ 是一个零均值, 方差为 1 的白噪声信号激励源。在通常的情况下, 我们很少再进一步追究 n 的确切概率分布。

根据随机场的概念, 上面的 $m(x, y)$ 和 $\sigma(x, y)$ 是总体平均结果。但是一般为了简化起见总是利用小范围遍历的假定, 在

该点选取适当的窗口，利用空间局部平均值作为其估计值。如果窗口尺寸为 $(2m+1)(2n+1)$ ，则

$$\begin{aligned} m(x, y) &= \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n f(k, l) \sigma(x, y) \\ &= \frac{1}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n \left\{ f(k, l) \right. \\ &\quad \left. - m(x, y) \right\}^2 \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

1.1.4 其他的非平稳图像模型

由于图像信号一般说来是高度非平稳的，其局部统计特性随着不同的区域而变化，这给处理带来了很大的困难。上面所介绍的非平稳图像模型在一定程度上能较好的描述图像。但是实际图像是千差万别的，为了更好的描述图像也发展了一些其他的非平稳图像模型。

在一些情况下可以将一幅图像信号看成多个具有不同统计性质的消息源的综合结果。例如，严(Yan)和赛克利森(Sakrison)将图像分解成两个分量的模型，其中一个分量是图像的垂直边缘，或高频分量；另一个分量则是其纹理细节。实验表明，第二个分量很接近于高斯分布。利用这一模型对图像的两个分量分别进行编码得到了很好的结果。

阿布拉马提克(Abramatic)和希尔威曼(Silverman)也曾提出过另一个类似的图像非平稳模型。这一模型也是把一幅图像分成一个平稳的低通分量和一个非平稳高通分量。实验表明，这个图像模型也是很有效的。

马克西乔克(Maxemchuk)和斯达勒(Stuller)提出一种模型。根据这种模型，图像可以作为一共由若干个相互独立的准平稳子场组成的随机场。每个子场实际上是六个自回归消息源中的一个，而究竟是六个中的哪一个，则是由对观察者来说未知的一个空间变的概率分布函数所控制的。在这个模型中还包含了一