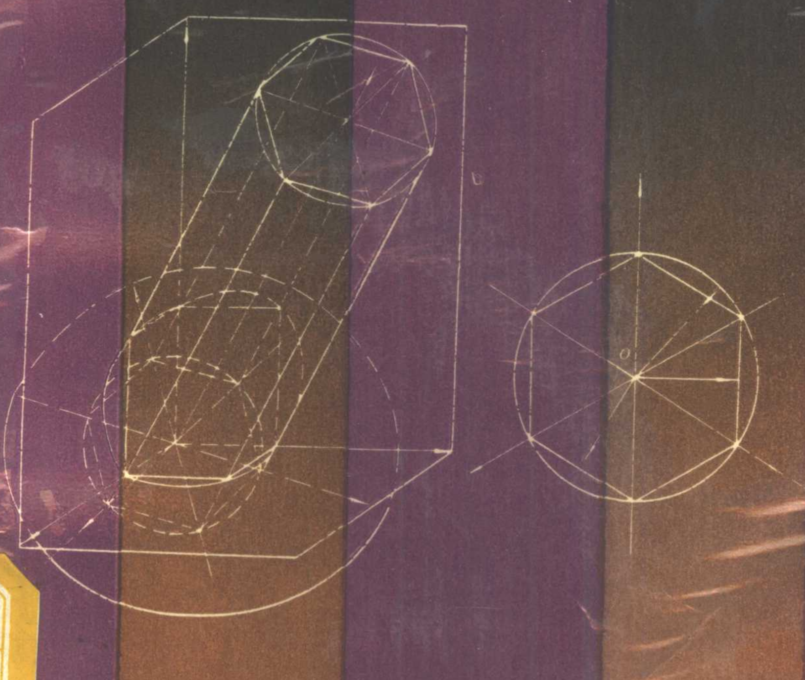
SUXING LIXUE

塑性力学

夏志皋　编著



同济大学出版社

塑 性 力 学

夏志皋 编著

同济大学出版社

内 容 简 介

本书是作者集多年的教学经验，在收集和汲取国内外大量资料的基础上编写的一本教材。内容着重介绍塑性力学的基本理论和进一步学习、研究各种塑性力学问题的基本方法，并提出一些深入讨论的内容。每章之后都附有一些合适的习题，以利学生加深对本书内容的理解和训练学生实际的运算能力。

本书由浅入深、先易后难，曾经同济大学、复旦大学和上海工业大学等八所院校试用过数年，均获好评，1988 年曾被评为同济大学优秀教材。本书可作为大专院校工程力学专业高年级学生和研究生的教材，教师可根据教学大纲和学时的要求加以取舍而不影响课程的完整性和连续性。本书也可供工科院校有关专业高年级学生选修或工程技术人员自学参考用的教材。

责任编辑　莫惠林
封面设计　王肖生

塑 性 力 学
夏志皋　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张 8.75　字数：259 千字
1991 年 7 月第 1 版　　1991 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—2300　　定价：2.95 元
ISBN 7-5608-0797-6/O·79

前　　言

1977年秋，作者为了给本校工程力学专业高年级学生和工科有关专业的研究生讲授塑性力学，考虑到当时没有合适的塑性力学教材，曾经陆续编印了一部分讲义，由同济大学教务处教材科先后出了油印本和铅印本，除了供本校的教学需要外，还曾供应部分兄弟院校试用。现在这本书，就是在这些工作的经验和有关资料的基础上加以整理和补充而成的。近年来国内出版了许多出色的塑性力学教材和专著，本书也汲取了其中许多好的素材。

由于本书是以工程力学专业高年级学生和有关专业的研究生为对象的，根据教学的不同要求和考虑到学时的限制，在内容的安排上主要是着重介绍塑性力学的基本理论和基本方法。而对一些专门问题，如结构极限分析，弹塑性稳定问题，金属成型理论和弹塑性动力学等则涉及得很少，甚至没作介绍，但是读者可以通过一些选修课程，或者阅读有关专著来学习。这里给出的正是进一步学习和研究各种塑性力学问题的基础。

为了兼顾工程力学专业高年级学生和工科研究生这两种不同对象的需要，本书在结构上采取由浅入深，先易后难的原则，将一些要加以深入讨论的内容放在每章的后面或另列一章加以介绍。这样，可以根据教学大纲和学时的要求加以取舍而不影响到课程的完整性和连续性。所以，本书也可作为工科有关专业高年级学生的选修课或工程技术人员的自学参考用书。

在每章之后都附有一些合适的习题，以利学生加深对本书内容的理解和训练学生实际的运算能力。编写时参考、引用的一些主要专著和文献资料已经附在书后，这里不再一一列举。

在本书的编写和出版过程中，得到本校、系、教研室领导和同

事们，特别是张相庭教授、毕家驹教授、洪善桃教授和吴家龙教授的鼓励和大力支持，并得到兄弟院校的一些老师，特别是太原工业大学杨桂通教授和清华大学徐秉业教授的帮助，在此一并表示衷心的感谢！作者还要感谢同济大学教材基金会和同济大学教务处、同济大学出版社的支持，以及同济大学出版社总编辑洪建华教授和本书责任编辑莫惠林老师的帮助！

由于编者的学识和经验都很有限，缺点和错误在所难免，恳切希望读者提出宝贵意见，以便今后能加以改进和提高。

同济大学　夏志皋

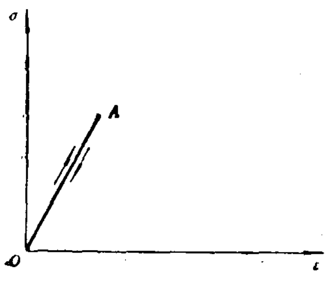
一九九〇年春于上海

目　录

绪　论

1．材料的塑性

物体由于受力而变形，如果将力去掉以后能立即恢复到原来的形状，这个变形就叫做**弹性变形**。在弹性变形的范围内，如图0-1(a)所示，其应力应变曲线往返的路径是一致的。但是当应力一超过某一个限度(通常把它称为弹性极限)以后，即使将力去掉也不能恢复原形，其中有一部分变形被保留下来，如图0-1(b)所示。在力去掉以后能立即消失的这部分变形 (CE) 是弹性变形，除此以外被保留下来的部分 (OC) 叫做**非弹性变形**。在非弹性变形当中，有一部分(DC)会随时间而慢慢消失。这种现象称为**弹性后效**。最后不能消失的部分 (OD) 叫**永久变形**。在一定的应力之下，永久变形随时间而徐缓增加的现象叫**蠕变**(弹性后效和蠕变现象是由于材料的粘性而引起的)。这种和时间有关的永久变形称为**流态变形**，而和时间无关，只和应力有关的永久变形就叫**塑性变形**。



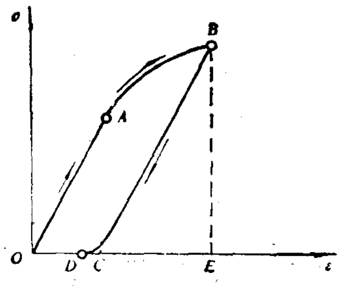


图 0-1

一般地，在常温的情况下，对硬金属来说，弹性后效和流态变形与塑性变形相比是非常小的，因此，就把非弹性变形作为塑性变形来理解（即认为图 0-1(b) 上 D 点和 C 点重合）。但对常温下的软金属以及高温下的金属，这种和时间有关的变形是不能忽略的。

材料产生这种永久变形的能力是它的另一个重要的力学性质，就是材料的塑性性质。

在本教程中将不考虑那些和应变过程的时间有关系的变形现象如蠕变、松弛、粘性等。

2．塑性力学的任务

塑性力学就是研究物体发生塑性变形时的应力和变形分布规律的学科。作为固体力学中的一个重要分支，和固体力学其它分支一样，它所研究的问题一般地大致可以分为两个方面：一是根据实验观察所得结果为出发点，建立塑性状态下变形的基本规律，即本构关系，以及有关的基本理论；另一是应用这些关系和理论求解具体问题，即求物体在荷载等外来因素作用下的应力和变形的分布，包括研究在加载过程中的每一时刻，物体内各处的应力及变形，以及确定物体内已进入塑性状态的范围（即确定弹性区和塑性区的界限）等。

塑性力学和弹性力学有密切的关系。弹性力学中的某些基本假设以及关于应力、应变的分析等这些和材料物性无关的基本概念都可以在塑性力学中得到应用。但是，塑性力学远比弹性力学来得复杂。首先，塑性力学中没有一个像广义 Hooke 定律那样的统一的本构关系。除了无硬化材料处于屈服状态的情形之外，本构关系至今尚未得到完满的解决。因为塑性变形是一个非常复杂的过程，它是随不同的材料和外界条件而改变的，所以，目前存在着多种理论，它们只是反映了实际情况的某些方面；其次，由于方程是非线性的，变形是和加载的历史有关的，因此在求解问题时，不可避免地存在数学上的困难；再次，在求解问题时，在物体中，弹

性区和塑性区往往是共存的，需要决定这两个区域的交界面，并满足这里的力的和变形的连续条件，这些都大大增加了解题的困难。

3．塑性力学对工程实践的意义

塑性力学是一门在生产中发展起来的学科，它又直接为生产服务的，因此，它对工程实践有很大的意义。为了说明这个问题，让我们先来看一个简单的三杆桁架的极限设计问题。图 0-2 为一简单的三杆对称桁架，各杆具有相同的截面积，由软钢制成，材料的屈服极限 $\sigma_s = 265$ MPa，桁架的工作荷载为 100000 N，如安全系数取 3，试确定杆的截面积 A。

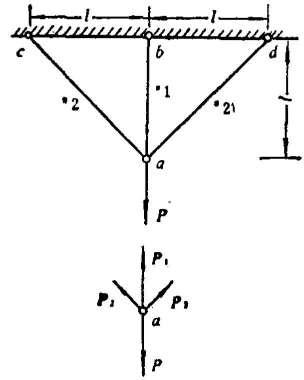


图 0-2

这是一个具有一次超静定的桁架，在各杆都保持弹性的情况下，不难证明，各杆的内力为

$$P_1 = \frac{2P}{2+\sqrt{2}}$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2+\sqrt{2}}$$

桁架的工作荷载为 100000 N，安全系数为 3，则设计荷载 $P=$ 300000 N，所以

$$P_1 = \frac{2\times 300000}{2+\sqrt{2}} = 175700 \text{ N}$$

$$P_2 = 87900 \text{ N}$$

若按弹性状态设计，以桁架最大受力部分的应力达到屈服极限时为桁架的破坏，即当 $P_1 = A\sigma_s$ 时为桁架的破坏，则杆截面积应取

$$A_e = \frac{P_1}{\sigma_s} = \frac{175700 \text{ N}}{265 \text{ MPa}} = 663 \text{ mm}^2$$

事实上，这时两根 #2 杆的应力才达到屈服应力的一半。而软

钢是一种延性材料，它能发生相当大的变形而不丧失其强度。所以，在 #1 杆可继续发生相当大的变形而不丧失其强度的情况下，#2 杆可继续承受较大的荷载，从而可进一步提高桁架的承载能力。只有当 #2 杆也达到屈服极限时，桁架的承载力才达到极限值(假定不计硬化作用，认为材料是理想塑性的。关于理想塑性体，见 § 2-1 的说明)。这时，$P_1 = P_2 = A\sigma_s$。根据节点 a 的平衡条件应有

$$P_1 + \sqrt{2}\,P_2 = P$$

即

$$A\sigma_s(1 + \sqrt{2}) = P$$

若按塑性极限状态设计，杆的截面积应取

$$A_p = \frac{P}{\sigma_s\,(1 + \sqrt{2})} = \frac{300000\ \mathrm{N}}{265(1 + \sqrt{2})\,\mathrm{MPa}} = 469\ \mathrm{mm}^2$$

由此可见，如果采用塑性设计，就可节省截面积几乎达 30%，即材料可节省近 30%。

这是一个极限设计的问题。从这个普通的例子就可以看出，如果在工程设计中，广泛应用塑性力学，可以充分发挥材料的性能，带来很好的经济效果。塑性极限设计，只是塑性力学在工程实践中应用的一个方面。事实上，塑性力学在工程中的应用是多方面的。除了这种以塑性力学为依据来解决零件或结构的许多强度和稳定等问题以外，金属的压力加工其本身就是利用金属的塑性变形达到加工的目的的。在加工过程中，如何使用最小的力和消耗最小的能量，达到加工的要求，并且使物体内部的变形均匀些，不致产生破坏或缺陷，这些当然是塑性力学应用的一个重要方面。此外，应用塑性力学解决土力学、岩石力学及地质力学等问题也取得了不少有意义的成果。特别是现代电子计算技术的运用，不仅为塑性力学本身的发展，而且为其在工程实践中的应用带来了广阔的前景。

4. 发展简史

塑性力学作为连续介质力学的一个重要分支，其历史还比较

短。关于塑性力学方面最早的一批著作发表于上一个世纪的70年代。1864 年 H. Tresca 公布了关于金属冲压和挤压的初步实验报告*，根据这些实验，他提出了金属在最大剪应力达到某一临界值时就发生塑性屈服这一著名论断，这就是后来所称的 Tresca 条件。这个条件实际上是土壤压力理论中的 Coulomb条件(1773)的一个特例。此后，St.Venant 用 Tresca 条件计算了理想塑性圆柱体中因扭转或弯曲而出现部分塑性时的应力 (1870)，以及受内压作用而完全塑性的圆管中的应力 (1872)。并且 St. Venant 研究了平面应变方程式。1871 年，Lévy 根据 St. Venant 的观点建立了三维情况下的方程，还提出了平面问题方程的线性化方法。

在塑性力学迈出了这重要的第一步以后，其发展是很缓慢的，出现了约 40 年的停滞期。直到本世纪初，Haar 和 T. von Kármán(1909) 以及 R. von Mises(1913) 的工作才使塑性力学又获得一些进展。Haar 和 Kármán 想从某些变分原理出发以得到塑性力学的方程。Mises 明确地提出了新的屈服条件——应力强度不变条件，即后来被称之为 Mises 条件。几年以后，H. Henck y把这个条件解释为当单位体积的弹性形状变形能达到某一临界值时发生屈服。Mises 并且独立提出了类似于 Lévy 的方程，后来就称为 Lévy-Mises 方程。1926 年，Lode 证实了它在一级近似下是准确的。

从本世纪 20 年代开始，直到 50 年代初，塑性力学获得了巨大的发展。这首先是在德国开始的，后来在苏联，而后又在英国和美国，塑性力学和空气动力学一起，同时成为连续介质力学中发展得最为蓬勃的部分。无论在理论和实验方面都取得了重大成果，已经形成一个能反映在常温下各向同性金属材料的主要弹性和塑性性质的理论，并且相当大程度上与观察结果一致。其中有：1924

* Tresca, H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis á des fortes pressions, Comptes rendus de l' Académis des Sciensis. vol.59. (1864), P. 754

年，Prandtl 将 Lévy-Mises 理论推广应用到平面应变问题，既考虑了塑性变形又考虑了弹性变形。1930 年，Reuss 又把 Prandtl 的工作推广到三维问题，从而建立了 Prandtl-Reuss 增量型塑性理论。1924 年，Heneky 采用 Mises 条件提出了另一个理论，建立了全量应变和应力关系。1943 年，Ильюшин 把这个理论加以系统化，这就是所谓全量型塑性理论。1937 年，Nadai 考虑了材料的硬化，建立了大变形情况下的应力应变关系，也是一种全量型理论。关于应力和应变关系中如何看待全量和增量关系的问题较长时间地进行过争论。后来的研究指明在各应力分量按同一比例增大的简单加载情况下，全量理论是可用的。但在 1948 年发现，在平板的塑性失稳过程中，各应力分量的比例有很大变化，显然不是简单加载，而实验结果证明和用全量理论计算的结果比较符合，而和用等向硬化模型的增量理论计算的结果相差很多，这个矛盾促使人们从根本上去重新认识塑性的本构关系问题。为此，在 1948 年，Batdorf 和 Budiansky 又从晶粒滑移的物理概念出发提出了一个塑性滑移理论。他提出的这种理论假定在屈服面上需要发展一个尖角。但这一点至今并没有得到实验证实。1948 年，W. Prager 和 P. G. Hodge 以及 H. J. Green berg (1949) 建立了塑性增量理论的极限原理。后来 R. Hill(1951) 和 Ямамото (1953) 又对它加以不同程度的推广。

50 年代初，曾用塑性势理论，讨论了与满足 Drucker 公设的屈服条件相关连的一般本构关系。开始是以 Mises 条件作为塑性势函数，1953 年又由 Koiter 和 Prager 提出了与 Tresca 条件相关连的流动法则。总之，进入 50 年代以来，塑性力学在理论上、方法上以及实际应用上，无论在深度上或广度上都得到了迅速的发展。在基本理论研究方面，塑性变形的基本规律的研究仍是工作的主要方向。主要是要弄清应变路径的急剧变化、材料的各向异性、应力张量的第一、第三不变量等等因素对塑性变形、屈服和硬化的影响，以便建立更一般、更完善的塑性阶段的本构关系。近年来日本学者在这方面做了不少的实验和理论研究工作，发表了不