国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

地球科学系列

多孔介质中水分及溶质运移的随机理论

杨金忠　蔡树英　黄冠华　叶自桐 著

Earth

科学出版社

国家自然科学基金研究专著

NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

多孔介质中水分及溶质运移的随机理论

杨金忠　蔡树英　黄冠华　叶自桐 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是研究和探索地下水及溶质在多孔介质中运动的随机理论的一部专著，是作者对所承担的多项国家自然科学基金项目在这一领域的研究工作总结。本书共分六章：第一章概率论与随机场基础，第二章多孔介质非均匀性的随机描述，第三章饱和水流运动的随机分析，第四章非饱和水流运动的随机理论，第五章通过区域非均匀介质的溶质运动理论，第六章地下水运动及溶质运移的随机模拟。

本书对研究地下水和保护水资源具有一定意义，可供从事地下水研究的科技人员及有关大专院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

多孔介质中水分及溶质运移的随机理论/杨金忠等著. -北京:科学出版社,2000

ISBN 7-03-007763-6

Ⅰ.多… Ⅱ.杨… Ⅲ.多孔介质-地下水运动-研究 Ⅳ.P641.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 30852 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2000年9月第一次印刷 印张:19 1/4

印数:1—1 000 字数:442 000

定价:39.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

我国是一个水资源相对紧缺的国家，人均水资源占有量仅为世界人均占有量的四分之一。随着我国国民经济的迅速发展和人民生活水平的不断提高，数量巨大的污水、废液和种类繁多的固态和液态可溶性物质不断地污染地表水和地下水资源。农业生产中化肥流失、化学药剂的残存物，对农业生态环境构成日益严重的威胁。乡镇工业的发展和广大中小城镇的兴起，使不少中小河流和水系受到不同程度的污染。我国近半数的城市和乡镇供水不足，特别是北方地区，水资源利用率已达到极限，地下水过量开采，采补失衡，区域地下水位下降，地面沉降，海水入侵，致使生态环境严重恶化。我国南方地区水资源比较丰富，但不合理开采利用也会造成严重后果。上海市 1921～1986 年期间由于超采地下水，地下水位下降 35m，累计地面沉降量达 2.61m，通过减少开采量和地下水回灌等措施，地面沉降基本得到控制。江苏、无锡、常州三市由于长期开采承压地下水，1991 年已形成面积为 7 000km^2 的区域承压水位降落漏斗，地面沉降区面积连成一片，面积大约 3 000km^2。地面水－土壤水－地下水是生态环境链中一个十分活跃的动态开放系统，其生态稳定性十分脆弱。地面水的污染，必然导致地下水水质的恶化，地下水质恶化和水量均衡失调，又将导致严重的环境灾难。就目前我国水资源状况来看，如果不加强治理和保护，不但危及人们的身体健康，也将阻碍工农业生产的进一步发展。因此，对地下水资源的保护和合理开发利用，已成为刻不容缓的重要课题。

与地面水相比，对地下水污染的监测和治理要困难得多，主要体现在：(1)地下水覆盖于地面之下，监测困难；(2)水体运动于多孔介质中，而多孔介质空间结构的复杂性导致了地下水运动的复杂性；(3)水与介质之间的物理化学作用使地下水污染研究更加复杂化。在这样复杂过程中运动的地下水一旦遭受污染，则很难得到有效治理。因此，对地下水资源应将保护放在首位。而地下水的保护应以对地下水中污染物的监测和预测为基础。

以往描述地下水运动的传统方法，是根据质量守恒定律来建立地下水运动的守恒方程，方程中包含有代表含水层导水特性的参数，而这些参数在空间上的分布变化是极其复杂的。由于天然土壤和含水层沉积过程的随机性，含水层的水文地质特征以及土壤的结构、构造和土壤各种矿物的组成等土壤特性具有明显的空间变异性。天然地质体的非均匀性可在各种不同尺度上反映出来。在采取的土样中，可以观测到土粒孔隙大小及团粒结构的差异；在大的区域含水层系统中，可以观测到不同含水层间以及同一含水层的不同地域间的变异性。对某一特定的含水层而言，其空间任一点含水层性质是确定的，如果我们可以得到空间上每一点的测量数据，那么含水层性质的空间分布是完全确定的。但在实际中，我们不可能得到空间每一点的资料，所得到的仅是其中一个样本。在孔隙介质空间变异性的影响下，地下水运动也具有相应的不确定性和空间分布不规则的特性。可见，

应用确定性方法处理非确定的地下水运动问题具有很大的局限，必须探讨新的理论和方法来研究此问题。

溶质在多孔介质中运移理论研究已有多年的历史（黄康乐，1987；杨金忠，1993，1986；Bear，1969，1972；Fried，1975）。但这些研究主要涉及溶质在小尺度范围内（如在实验室土柱中）运动所遵循的规律和基本方程。描述溶质分散的基本理论为水动力弥散理论，在该理论中，孔隙流速的不均匀性和分子的扩散作用导致溶质在多孔介质运动过程中的分散，即水动力弥散。溶质运动所遵循的基本方程为对流－弥散方程，溶质与介质间的其他物理化学作用而引起溶质质量的变化作为源汇项加在基本方程中（冯绍元等，1995；黄康乐，1987；杨金忠，1993）。室内试验表明，水动力弥散理论可以较好地描述小尺度范围的溶质运动，所测得的弥散度值在 $10^{-4} \sim 10^{-2}$ m 量级范围内（Klotz et al.，1980）。但是将此理论用于实际区域污染物运移过程时，则出现许多问题。首先是实际区域内各点弥散度难以得到，其次，当用数值方法求解对流－弥散方程时，由于弥散度值过小（或 Peclet 值过大）而出现数值困难，使大区域溶质运移的预测分析难以实现。特别是近年来国内外在这一领域的研究成果表明，溶质在小尺度范围运移所确定的方程和弥散系数不能描述溶质在大区域范围内的运动特征和规律。在野外大区域所求得的弥散度值在 $10^{-1} \sim 10^{3}$ m 量级范围内（杨金忠等，1993；Gelhar et al.，1992），弥散度随着区域尺度的增大而增加。其原因是控制大区域溶质运移的机理是宏观地下水流速的不均匀性（杨金忠和叶自桐，1994），而地下水流速度的不均匀性主要起源于储水介质沉积特征和水力特征的空间变异性，这些影响区域溶质运移的基本特征在室内实验中是反映不出来的。正如研究水动力弥散时分子扩散可以忽略一样，小范围测得的弥散度对大区域溶质的分散过程可以忽略不计。因而，微观的水动力弥散理论不能用于宏观的研究。

真正对地下水污染监测治理有实际意义的恰恰是大空间范围的宏观水动力弥散特征。于是人们的注意力开始由微观转向宏观，大尺度范围内溶质运移理论成为目前国内外力图攻克的基础理论课题。为了获得宏观范围内介质的非确定性特征，随机理论开始成为地下水质研究中的重要工具。统计近几年国际上有关水科学研究的著名杂志（如 *Water Resources Research*，J. Hydrology 等）所发表的论文可以看出，大部分有关地下水污染的理论研究都涉及随机模型，这在一定程度上也反映出要解决实际地下水污染管理问题，必须由确定模型转为随机模型来描述多孔介质空间变异性这个影响污染物浓度分布的重要因素。大尺度范围内溶质运移理论研究的最主要内容是：大尺度范围内影响溶质运移的主要因素；控制大尺度范围内溶质运移的基本方程以及弥散系数的基本结构。由于不可能测得含水层每一点的介质特征和水力特征，引入含水层空间随机场的概念，将实际含水层视为随机场的一个实现。Dagan（1982，1984，1987）、Gelhar 等（1983）、Neuman 和 Zhang（1990）、Yang 等（1996）研究了大区域范围内溶质运移的随机理论，将溶质的浓度分布视为随机函数，推导出大范围内污染物的平均浓度所遵循的基本方程。该方程也具有对流－弥散方程的形式，但它所代表的物理意义和其中参数的形式不同于微观方程。出现在方程中的流速为由于介质空间变异而引起的流速随机场的平均值，宏观弥散系数为多孔介质中统计参数的函数，这表明大区域内溶质的分散是由于含水层的空间变异性所致。在理论上将污染物的宏观弥散与介质的统计特征相联系，也克服和解决了宏观弥散系数的求解问题。方程中的浓度代表了浓度随机场的平均值，可为地下水水质管理提供

一个宏观指标，而实际的浓度分布应由该浓度偏离均值的其他指标来表示。Vomvoris 和 Gelhar(1990)、Kapoor 和 Gelhar(1994)研究了浓度方差的分布特征和所遵循的基本方程。方差方程也同样具有对流－弥散方程的形式，只是增加了表示方差耗散和产生的附加项。通过方差方程的求解，可得到实际浓度相对于平均浓度的偏差指标。野外溶质运移试验表明（Boggs et al.，1992；Mackay et al.，1986），溶质运移的随机理论可以较好地描述区域溶质运动。

对非吸附溶质在非均匀土体中运动的研究，为天然孔隙介质中的溶质运移提供了有价值的理论。在自然界中非吸附溶质并不多见，尤其对于地下水污染的管理和治理，人们所关注的是吸附性污染物在地下水中的运动特征。室内外试验表明，溶质的吸附作用也具有空间变异性，目前对于与储水介质发生物理化学作用（如吸附和解吸）和自身具有的物理化学作用（如沉淀和蜕变），对这些作用在空间上具有随机分布的溶质的研究在我国尚是空白，在国外的研究中也很少见。Dagan 等的随机理论研究成果是在稳定流场的情况，介质的分布为空间平稳并满足遍历性条件下求得的，这些条件限制了模型的广泛应用。在很多情况下，污染物是通过非饱和带进入地下水的，非饱和带土壤对污染物有过滤和缓冲作用，而在已有的研究中很少涉及非饱和带作用条件下的溶质运移理论问题。

随机理论的基本出发点是将含水层水力参数视为随机场，随机场的空间结构通常是通过含水层部分试验结果而估计的，即随机场的分布是条件分布，将随机场限制在某些观测点上来描述水力参数的空间分布能吸收确定性方法和随机方法的优点。由随机场的条件分布得到的浓度预测结果的变异性将随测量点的增加而减少。可以直观地推论，如果观测点无限多，介质的特征将是确定的，则预测结果就没有随机性。若将随机场的条件分布结合到溶质运移的随机理论中将是减少预报误差的一个重要研究课题。

由任何理论推导的水流运动和溶质运移方程，其中都包含有描述介质水力特征和弥散特征的参数（如渗透系数、宏观弥散系数等），在进行污染物运移计算分析时，边界条件、入渗条件以及影响污染物运移的各因素都不能完全确定地给出，这样，地下水污染的预测预报结果将带有很大的不确定性，如何评价预测结果的可信度和污染物浓度超标的可能性，是地下水水质管理中面临的新课题。可靠性分析（或风险分析）方法提供了一个新的理论工具。在地下水污染管理中，可靠性分析是在系统输入具有不确定因素条件下研究地下水浓度在区域某一范围内或某一时间段内超过某一浓度值的可能性。可靠性模型可确定出在指定观测范围内的浓度值不超过给定环境标准的概率，这将为水质管理和治理的决策提供重要的指标。由于对地下水水质状况的描述不仅仅是个过程，更重要的是污染物浓度的空间分布，那么用现有的风险分析方法研究地下水污染将会遇到方程中随机量过多的问题。

地下水资源保护技术涉及多孔介质流体动力学、溶质运移理论、计算机数字模拟技术等基础理论和应用技术。污染物运移的空间分布和积聚状态主要决定于含水层的空间变异性和污染物运移的随机特征，污染物运移过程的研究和预测模型的开发，必须以随机空间函数和随机模拟理论等近代数学理论为基础。在加强地下水资源保护方面的基础技术理论研究的同时，应及时开发出适于我国污染物组成情况和各类含水层特征的污染物运移预测预报模型和实用污染运移分析和控制软件系统。

为研究和探索地下水及溶质在多孔介质中运动的随机理论，本书作者先后承担和参

加了国家自然科学基金项目“水盐运动随机模型的研究”“污染物通过区域饱和－非饱和土体的运动理论”和国家自然科学基金重点项目“水资源保护的应用基础研究”等。在国家自然科学基金委员会的大力支持下，开展了一系列基础性研究工作，取得了一些初步的研究成果。本书的主要内容是近年来作者在本领域研究工作的总结。目前国内尚无在此领域的论著公开出版，国内外的一些研究成果也多是零散出现在学术期刊和会议录中，这为刚涉足本学科领域的研究人员和应用本领域科技成果的科技人员带来一定困难。因此，本书在介绍本领域最新研究成果的同时，还比较系统地叙述了地下水运动随机理论的基本方法和数学工具。本书可以供从事地下水研究的工程师、研究人员、博士生和硕士生参考。

全书共分六章，各章节的编写分工如下：第一章杨金忠；第二章 2.1 节蔡树英；第二章 2.2、2.3、2.4 节叶自桐；第三章、第四章黄冠华；第五章杨金忠；第六章 6.1、6.2、6.3 节蔡树英；第六章 6.4 节叶自桐。杨金忠负责全书的统稿工作。

限于作者水平，本书定有许多不完善和欠妥之处，敬请各位专家批评指正。

本书的出版得到国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金和武汉水利电力大学“211 工程”建设经费的资助。

杨金忠

1999 年 2 月 24 日

目　录

第一章　概率论与随机场基础

1.1　随机变量和统计动量

在同一条件下进行一系列试验，用一个实数来表示每一次试验的结果，在试验之前只知道这个试验结果的取值范围，但不能预知其将取可能数值中的哪一个，此实数为随试验结果而变化的变量，称为随机变量。如抛硬币试验，它有两个可能结果，分别为正面或反面，若用实数 X 表示试验结果，其取值为 0 和 1 时分别表示正面和反面，X 随着试验的不同结果而取不同的值，X 为随机变量。

由于含水层岩性分布和地下水补给条件的随机性，某一固定空间点不同时刻地下水位，在水位测量之前，我们无法确定其具体取值，但对其可能的取值范围预先可以知道，地下水位也是一个随机变量。全部可能的数值事先可以列举出来的随机变量称为离散型随机变量；如果随机变量的全部可能取值充满数轴的某一区间，这类随机变量称为连续型随机变量。为描述随机变量的统计规律，还必须知道随机变量取某一确定的值或随机变量的取值落入某一区间的概率。对于连续型随机变量，可用分布函数 $F(x)$表示随机变量 $X \leqslant x$ 的概率，即：

$$F(x) = P[X \leqslant x] \tag{1.1.1}$$

式中：大写字母 X 表示随机变量，小写字母 x 表示任意实数。(1.1.1)式右边表示事件 $X \leqslant x$ 发生的概率。分布函数 $F(x)$为一普通函数，这样就可以应用数学分析的方法研究随机变量。如果给出分布函数 $F(x)$，则随机变量就认为是已知的了。

$F(x)$具有以下基本特性

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \tag{1.1.2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{1.1.3}$$

概率分布函数为一单调递增函数。随机变量位于$[a, b]$区间的概率为：

$$P[a \leqslant x < b] = F(b) - F(a)$$

对于一连续随机变量，概率密度函数 $f(x)$定义为：

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{1.1.4}$$

由上式可知，略去 Δx 的高阶无穷小，有：

$$f(x)\Delta x = F(x + \Delta x) - F(x) = P[x < X \leqslant x + \Delta x]$$

表示 X 落入区间$[x, x+\Delta x]$的概率为$f(x)\Delta x$。对(1.1.4)式积分可得到：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

实践中最常遇到的随机变量，其概率密度函数具有以下形式：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1.1.5}$$

服从以上分布的随机变量称为正态随机变量(或高斯随机变量)。(1.1.5)式也称为正态概率密度函数。在自然现象中，被研究的问题往往是由一系列随机因素综合作用的结果，同时，数值上表征这一过程的随机变量则是这一系列随机变量的总和，如果这些随机因素互不依赖，那么不管它们各自的分布规律如何，它们之和的分布率总是服从正态分布的。因而正态分布在实际中得到广泛应用。

对数正态随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \tag{1.1.6}$$

这时，随机变量 $Y=\ln X$ 服从正态分布，在地下水水文学中，一些水文地质参数，如渗透系数、导水系数等常服从对数正态分布。

随机变量的均值(或数学期望值)定义为：

$$\langle X\rangle = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.7}$$

$\langle X\rangle$也称为集平均。由 (1.1.7)式可知，随机变量的均值是对于随机变量所有的可能取值以其概率密度函数作为权函数的加权平均。X 的 n 阶原点矩定义为：

$$\langle X^n\rangle = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.8}$$

随机变量 X 相对于其均值的偏差称为中心化随机变量(或脉动，扰动，残差)，用 X' 表示，即：

$$X' = X - \langle X\rangle \tag{1.1.9}$$

X'的 n 阶原点矩称为 X 的 n 阶中心矩，

$$\langle X'^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\langle X\rangle)^n f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.10}$$

二阶中心矩称为随机变量的方差，记为 σ^2，

$$\sigma^2 = \langle X'^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\langle X\rangle)^2 f(x)\mathrm{d}x = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 \tag{1.1.11}$$

方差表示随机变量在其均值附近的分散程度，具有随机变量二次方的量纲。σ 称为 X 的

均方差。

对于正态随机变量 X,其均值为 μ、方差为 σ^2(见(1.1.5)式)。对于对数正态随机变量 X($Y=\ln X$ 为正态分布),其 n 阶原点矩为:

$$\langle X^n \rangle = \exp\left[n\langle Y \rangle + \frac{n^2}{2}\sigma_y^2 \right]$$

其中$\langle Y \rangle$、σ_y^2 为随机变量 Y 的均值和方差。X 的均值μ_x 和方差σ_x^2 分别为:

$$\mu_x = \exp\left[\langle Y \rangle + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \right]$$

$$\sigma_x^2 = \exp[2\langle Y \rangle + \sigma_y^2][\exp(\sigma_y^2) - 1]$$

由以上两式可以得到 X 的变差系数为:

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\langle X \rangle} = \sqrt{e^{\sigma_y^2} - 1}$$

由(1.1.7)式所定义的均值为算术平均,记为 μ_A,即$\langle X \rangle$在一定的条件下可定义为:

$$\langle X \rangle = \mu_A = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

类似地,可以定义几何平均 $\mu_G = \left(\prod_{i=1}^{\infty} u_i \right)^{\frac{1}{n}}, n \to \infty$,和调合平均 $\mu_H = \langle X^{-1} \rangle^{-1}$。若 X 为对数正态分布,即 $Y=\ln X$ 为正态分布,则 X 的各种不同的均值与 Y 的均值μ_y 和方差$\sigma_y{}^2$ 的关系为:

$$\mu_A = \exp(\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2); \quad \mu_G = \exp(\mu_Y); \quad \mu_H = \exp(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2) \tag{1.1.12}$$

随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$也是一个随机变量,其中 $g(\cdot)$表示一确定的函数关系,若已知 X 的概率密度函数$f_X(x)$,则 Y 的概率密度函数可由下式确定:

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f_X(x), \quad x = g^{-1}(y) \tag{1.1.13}$$

在地下水研究中,我们会遇到一系列相关的随机变量,如考虑空间 n 个点上的渗透系数 $K_1, K_2, \cdots, K_n$,渗透系数值在各点并不相互独立,它们按照一定相关关系互相制约。另外,我们也会研究在同一空间点的各种随机物理量,如孔隙度,导水系数,水头和流速等。

对于由 n 个随机变量组成的随机变量系$\{X_i\}$称为随机向量。随机向量$\{X_i\}$的联合分布函数定义为:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P[X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n] \tag{1.1.14}$$

联合概率密度函数为:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F[x_1, x_2, \cdots, x_n]}{\partial x_1 \partial x_2, \cdots \partial x_n} \tag{1.1.15}$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 表示$\{X_i\}$位于区间$(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2+\mathrm{d}x_2,\cdots,x_n+\mathrm{d}x_n)$的概率。随机向量$\{X_i\}$的分布函数通过概率密度函数可表示为：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (1.1.16)$$

随机点 $N(x_1,x_2,\cdots,x_n)$落入 n 维区域D 的概率由下式决定：

$$P[N\in D]=\iiint_D\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (1.1.17)$$

对于 n 元随机向量$\{X_i\}$,分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 n 元函数,它定义了随机变量 X_i 落入$(-\infty,x_i)(i=1,2,\cdots,n)$的概率。任意保留 $k(1\leqslant k<n)$个 x_i,例如 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,而令其余 $x_j(j=k+1,\cdots,n)$都趋向∞,即：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_k,\infty,\infty,\cdots,\infty)=\lim_{\substack{x_{k+1}\to\infty\\ \cdots\cdots\\ x_n\to\infty}}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

上式左端为 k 元函数,称为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的 k 元边际分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_k)$。在 k 维边际分布中,并没有提供关于随机变量$(X_{k+1},X_{k+2},\cdots,X_n)$的任何信息。

边际联合概率密度函数定义为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{k+1}\mathrm{d}x_{k+2}\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (1.1.18)$$

随机向量$\{X_i\}$的函数 $Y=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的均值定义为：

$$\langle Y\rangle=\langle g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \qquad (1.1.19)$$

因此,可得到随机变量 X_1 的均值为：

$$\langle X_1\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f(x_1)\mathrm{d}x_1 \qquad (1.1.20)$$

其中 $f(x_1)$为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于随机变量 X_1 的一维边际联合概率密度函数。

随机向量$\{X_i\}$中任何两分量 X_i, X_j 的协方差定义为：

$$\sigma_{ij}=\langle(X_i-\langle X_i\rangle)(X_j-\langle X_j\rangle)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\langle X_i\rangle)(x_j-\langle X_j\rangle)f(x_i,x_j)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \qquad (1.1.21)$$

当 $i=j$ 时，
$$\sigma_{ij}=\sigma_i^2=\sigma_{x_i}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\langle X_i\rangle)^2f(x_i)\mathrm{d}x_i \qquad (1.1.22)$$

称 $r_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$为随机变量 X_i 与 X_j 的相关系数。若 $r_{ij}=0$ 则称 X_i 与 X_j 不相关。当 X_i 与 X_j 不相关时,可推出$\langle X_iX_j\rangle=\langle X_i\rangle\langle X_j\rangle$。

如果联合概率密度函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可表示为:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

则称随机变量$(X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n)$相互独立。由随机变量的独立性可以推出不相关性,但是反过来是不成立的。不过,对于正态分布的随机向量,独立性与不相关性是一致的(复旦大学,1979)。

对于二维随机向量$\{X_1,\ X_2\}$,条件概率 $f(x_1\mid x_2)\mathrm{d}x_1$ 表示对于 X_2 取值为 x_2,而 X_1 落入$(x_1,\ x_1+\mathrm{d}x_1)$的概率,条件概率密度可表示为:

$$f(x_1\mid x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{f(x_2)} \tag{1.1.23}$$

在地下水文学中应用最多的随机向量为 n 维正态随机向量,其概率密度函数为:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{|B|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)\Big] \tag{1.1.24}$$

上式可进一步简写为:

$$f(\boldsymbol{X})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\sigma|^{1/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\mu)\sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\mu)^T\Big]$$

记为 $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$,其中 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定对称矩阵,$|\boldsymbol{B}|$为 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的值,$(b_{ij})=\boldsymbol{B}$,$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$,$\sigma=(\sigma_{ij})$。随机变量 X_i, X_j 的协方差σ_{ij}由(1.1.21)式确定。可以证明,矩阵(b_{ij})为协方差矩阵的逆矩阵。由(1.1.21)式可知,协方差矩阵具有对称性,即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$,另外,对任意数 λ_i 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-\mu_i)\Big]^2 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\geqslant 0$$

即:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\geqslant 0$$

协方差矩阵具有非负定性。

由(1.1.24)式可以看出,正态随机向量的分布完全由随机变量的均值 μ_i 和协方差矩阵σ_{ij}唯一确定。正态随机向量$\{X_i\}$的任何一个子向量 $\tilde{\boldsymbol{X}}=(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_m})$, $(m\leqslant n)$,也服从正态分布,其概率密度函数为:

$$f(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_m})=\frac{1}{2^{m/2}|\tilde{\sigma}|^{1/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{x}}-\tilde{\mu})\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}-\tilde{\mu})^T\Big] \tag{1.1.25}$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 为保留σ 中$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 行和列的 m 阶矩阵。上式说明,多元正态分布的边际分布仍为正态分布,特别有 X_i 的正态分布为:

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

常将以上正态分布记为 $N(\mu_1,\sigma_1)$。

若正态随机向量$\{X_i\}$服从 $N(\mu,\sigma)$,对任意 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}_{ij}\}$ $(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n,1\leqslant m\leqslant n)$,则随机向量$\{Y_i\}$,$Y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}C_{ij}X_j$ 服从于 m 维正态分布 $N(\boldsymbol{C}_\mu,\boldsymbol{C}_\sigma\boldsymbol{C}^T)$。当 $m=1$ 时,$\boldsymbol{C}$ 为 n 维行向量$(C_1,C_2,\cdots,C_n)$,则 $Y=\sum\limits_{j=1}^{n}C_jX_j$ 服从正态分布 $N\left(\sum\limits_{j=1}^{n}C_j\mu_j,\sum\limits_{i,j=1}^{n}C_iC_j\sigma_{ij}\right)$。对于满秩的实对称矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 存在一正交矩阵 $\boldsymbol{U}$,可将 $\boldsymbol{\sigma}$ 变换为对角阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U\sigma U}^T$,其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & & 0 & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}\end{bmatrix}$$

取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$,则随机向量 $Y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}C_{ij}X_j$ 满足 $N(\boldsymbol{CU},\boldsymbol{D})$,即$\{Y_i\}$为具有独立正态分布分量的随机向量。

随机向量$\{X_i\}$的特征函数定义为:

$$M_x(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\left\langle\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}t_jx_j\right)\right\rangle \tag{1.1.26}$$

特征函数完全刻划了分布函数,并且具有良好的分析性质。如$\{X_i\}$的 $K=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$ 阶矩为:

$$\langle x_1^{k_1},x_2^{k_2},\cdots,x_n^{k_n}\rangle = i^{-k}\left.\frac{\partial^k M_x(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial^{k_1}t_1\partial^{k_2}t_2\cdots\partial^{k_n}t_n}\right|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

特征函数具有以下性质(潘契夫,1976):

1. $M_x(t_1,t_2,\cdots,t_n)$在全空间 $-\infty<t_i<\infty$ 上一致连续,且满足:

$$|M_x(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leqslant M_x(0,0,\cdots,0)=1$$

$$|M_x(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)|\leqslant M_x^*(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

式中 $\boldsymbol{M}^*$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 的共轭。

2. 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的特征函数为 $M_x(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,则 $k(k<n)$维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_k)$的特征函数为:

$$M(t_1,t_2,\cdots,t_k)=M(t_1,t_2,\cdots,t_k,0,\cdots,0)$$

3. 若随机向量$\{X_i\}$的特征函数为$M(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，则随机向量$\{Y=a_ix_i+b_i\}$的特征函数为：

$$M_Y(t_1,t_2,\cdots,t_n)=M_X(a_1t_1,a_2t_2,\cdots,a_nt_n)e^{i\sum_{j=1}^{n}b_jt_j}$$

4. 随机变量 $\eta=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j$ 的特征函数为：

$$M_\eta(t_1,t_2,\cdots,t_n)=M_X(C_1t_1,C_2t_2,\cdots,C_nt_n)$$

5. 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的各随机变量 X_j 相互独立，则有

$$M_X(t_1,t_2,\cdots,t_n)=M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)\cdots M_{X_n}(t_n)$$

6. 公式(1.1.26)表明特征函数为概率密度函数 $f_X(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的 n 维傅里叶变换，因此，特征函数唯一地决定了概率密度函数，后者由逆变换导出

$$f_X(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}M_X(t_1,t_2,\cdots,t_n)e^{-i\sum_{j=1}^{n}t_jX_j}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

对于 n 维正态分布，其特征函数为：

$$M_X(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}\langle X_j\rangle t_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}t_jt_k\right]\tag{1.1.27}$$

1.2 随机过程和时间序列分析

1.1 节所讨论的随机现象，可用一个随机变量或随机向量(有限维)描述其统计规律性，对任一确定的随机试验，可以用一确定的数值或向量值来描述本次随机试验的结果。在许多具体问题中，随机试验的结果是依赖于某个参数的函数。如测量某段时间水井的地下水位 $H(t)$，对每一次测量，地下水位是时间的函数，在任一确定时刻 t，地下水位值为一随机变量。又如在湍流大气中一指定点的风速 $\boldsymbol{U}(t)$具有三个分量 $\boldsymbol{U}_x(t)$，$\boldsymbol{U}_Y(t)$，$\boldsymbol{U}_Z(t)$，每一个分量都是以时间为参数的随机变量。对每一次具体的随机试验，实验结果为一个确定的时间函数，通常把这样的函数称为样本函数。随机试验中所有可能的试验结果，可构成一组时间函数$\{\boldsymbol{U}(t),t\in T\}$，称之为随机过程。图 1.2.1 表示随机过程 $\boldsymbol{U}(t)$的不同实现 $\boldsymbol{U}^{(1)}(t)$，$\boldsymbol{U}^{(2)}(t)$，$\boldsymbol{U}^{(3)}(t)$。对于参数取固定值 t_0，随机过程 $\boldsymbol{U}(t_0)$便是一个随机向量。

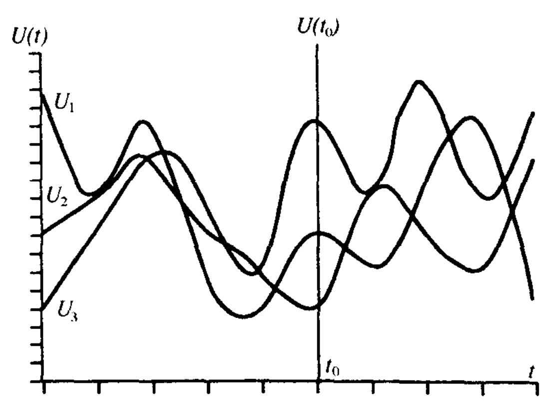

图 1.2.1 随机过程的各种实现