高等代数

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

高 等 代 数

（試用本）

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系数学专业革新教材之一，內容包括高等代数与綫性代数的一部分。本书可作綜合大学数学专业高等代数課程的教材，講授64学时，亦可作高等院校有关专业的参考书。

高 等 代 数
(試 用 本)
复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业许可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
上海大众文化印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 6 6/32 字数 146,000
1960年6月第1版 1960年9月第2次印刷
印数 4,001—18,000

統一书号：13119·372
定 价：(十)0.74元

編輯說明

我們受到全国持續跃进的大好形势的鼓舞和推动，积极响应了党的号召，在两年来教育大革命已經取得偉大成績的基础上，掀起了一个声势浩大的教学改革的群众运动。通过这个运动，我們揭露了現在教学体系、教学內容和教学方法上陈旧落后的状况，抓住訂方案、編大綱、写教材、搞試驗等重要环节，試图建立一套以馬克思列宁主义、毛澤东思想为指导的、反映現代科学发展水平的、理論联系实际的新的教学体系和內容，以及与之相适应的教学方法，使培养人才的工作更好地貫彻党的社会主义建設总路綫的精神。

作为这种新的探索和尝試，我們在教学改革运动中，师生結合，提供了"关于綜合大学数学专业課程革新的建議"，編写了一套可供綜合大学数学专业試用的基础課程教材。全套教材包括数学分析（一）、数学分析（二）、泛函分析、高等代数、綫性規划和計算实习、計算数学、数理邏輯与控制論、常微分方程、数学物理方程、一般力学、連續介質力学、統計数学（包括信息論）等十二种，尙有物理学一种，因力量所限，未能及时編出。

根据"关于綜合大学数学专业課程革新的建議"的精神，我們力图使这套教材具有以下几个特点：

一、在选材上，注意克服資产阶級教育思想的影响，体現为社会主义建設服务和反映現代科学发展的要求。中国数学会提出的"数学发展的方向必須以解决尖端技术和重大工程、現代物理、自动化、国民經济和大量計算任务中的数学問題为綱"，具体地說明了社会主义建設和現代科学发展对数学的要求，我們即以此作为选材的主要标准，同时，也考虑到基础課的某些特殊要求，适当注

意了根据理論与实踐之間的直接联系与間接联系，当前需要与长远需要等关系，来确定材料的取舍和不同材料的主次安排。根据这个精神，我們精簡了原来基础課內容中一部分不必要的古典內容，添加了一部分現代材料，还增加了一些新課程。

二、在材料处理上，注意克服过去課程設置各自为政、互不联系的缺点，体現科学知識的綜合与分类的辯証統一的关系。特别是近年来，边緣学科大量出現，科学发展在原有基础上愈来愈明显地趋向新的更高級的綜合，我們想力求使这套教材适应这个趋势。

具体說来，对那些条件已經成熟的、可以綜合处理的內容，即加以統一处理，例如将泛函分析与实变函数、积分方程以及綫性代数中的部分內容統一处理，在泛函分析中加以綜合；对那些綜合趋势已經比較明显，但独立設課条件尙不成熟的，也分别情况，注意在有关課程間建立密切的有机联系，若干材料还重新另行配置，例如原来理論力学中振动理論的一部分內容，这次就移到常微分方程中去了。

三、在材料的处理与闡述上，以辯証唯物主义观点为武器，破除形而上学和唯心主义对数学教学的影响。数学的研究对象是客观世界的量的側面，所以它具有較多的抽象性，在研究方法上也較多地运用邏輯上的演繹推証。这些特点，本来应該有利于深刻地闡明問題的本質，但唯心主义者却总是加以歪曲，企图在引出抽象概念时，掩盖其实踐来源，在形式論証中，避免闡述問題的本質。在这套教材中，我們力求消除这些唯心主义观点的影响。具体說来，对某些与生产实踐有着更加直接联系的課程（如数学物理方程），既吸收已經严格建立数学理論的材料，也采用在实踐中有广泛应用而理論上尙未成熟的材料，重新加以組織，恢复这門課程本来的生动活潑的面貌。各門課程中，对重要数学概念与問題的引进，都尽量闡明它們的直接和間接的实踐来源；闡述論証过程中，

插入若干必要的描述性材料；得到的結論，也闡明它在实踐中直接和間接的作用。本学期我系几門主要基础課程，都初步做到了减少学时、提高質量，据了解，主要是在教学过程中初步体現了这个精神。因此，根据我們一些不成熟的經驗，要徹底解决这个問題，除在教材內容上尽量克服这些唯心主义观点的影响以外，还要注意在教学方法中消除这些影响。

徹底实現教学改革，建立一套新的体系，是一个艰巨复杂的任务，也需要一个較为长期的时間来摸索。我們所作的一些尝試，仅仅是个开端，既受到思想水平和科学水平的限制，又缺乏較充分的实踐經驗，某些課程的教材，还是在师生結合、边学边写的情况下編出来的。因此不論在处理原則上或者在处理方法上都还不够成熟。有不少問題，例如如何在教材中反映我国社会主义建設实际中所提出的数学問題、如何在有关各課程間建立更密切的有机联系等等，在編写过程中，也还把握不定，处理不尽适当。我們恳切地希望同志們批評和指正。

上海科学技术出版社和商务印书館上海印刷厂对这套教材的迅速出版，給了极大的支持，我們在这里表示衷心的感謝。

复旦大学数学系

1960年5月

序

高等代数在理論上具有較高的概括性与抽象性，它的內容、观点和方法广泛地被应用到現代数学和物理学中去，因而它是一門重要的基础課。但是原来的高等代数教材存在以下主要缺点：

1. 整个教材的目的性不明确，沒有中心；各章的作用不突出，各个概念和定理的必要性沒有适当的交代，难以分别主次。

2. 按照古典方法处理的古典內容，在教材中占很多篇幅，而反映現代代数学中有广泛应用的重要內容却很少，显見陈旧而不切实际。

因此，它既未能符合各部門的需要，又要花費很多講授时間，必須加以革新。

我們認为，高等代数是作为学习其他課程及实际应用的一种重要知識，也是培养学生抽象思維的学科。根据这样的看法，我們在教材編写工作中力求做到：

1. 以陣的理論为綱，解决綫性方程組的求解、方陣的求典型陣和二次形式的求正規形式等問題，并且討論綫性空間和群的有关方面。这样，可使学生深刻地掌握陣的工具，为以后学习及应用打下牢固的基础。

2. 删去次要的古典理論，如多項式理論等，添加群論的內容，特别是介紹群的綫性表示大意，为学习現代数学和物理学作好准备。

經过这样的处理之后，高等代数的講授时間由原来的 114 学时縮短为 64 学时，这样就有可能騰出大量的时間使学生提早学习

其他基础課，迅速地接触到現代科学的成就。

我們相信这样做是正确的。但限于政治和业务水平，对本书内容的安排是否恰当，条理是否清楚，叙述是否簡明扼要等，一定还存在不少缺点，我們热烈地期待着大家的指正。

复旦大学数学系高等代数編写小組

1960年5月

目　录

第一章 行列式

行列式是数学上一个重要而有用的工具，它被广泛地运用到物理、力学、工程等各部門。它的理論是由研究綫性方程組的解法而产生的。本章由二阶、三阶行列式出发，引入一般的 n 阶行列式的概念。为了簡化 n 阶行列式的計算，引进了行列式的一些基本性質，并叙述按代数余子式的展开式，最后介紹一些行列式的計算方法，使讀者获得一些初步的技巧与方法。

本书各章除附录外都在复数全体或实数全体上討論。

§1 n 阶行列式

一、n 阶行列式概念的引进

在中学代数里，我們已遇到这样的二元一次联立方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

我們知道，只要二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0, \tag{1-2}$$

方程組 (1-1) 有解，且解为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1-3}$$

同理，对于三元一次联立方程組

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases} \tag{1-4}$$

只要三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3$$

$$-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3\neq 0, \tag{1-5}$$

则(1-4)的解为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{1-6}$$

我們发現，用行列式来解方程組(1-1)，(1-4)，特別对(1-4)是方便的。在我国社会主义建設中遇到很多这样实际問題，所需要解的方程組，其方程的个数常不止二、三个，未知元的个数也不止二、三个，而是有几十个、几百个。为了对一般的方程組进行討論，我們用 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 表示 n 个未知元，n 为任意的自然数。这样一来，类似于(1-1)，(1-4)我們可得一般的一次联立方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1-7}$$

在这方程組中，a_{11} 的右下角有两个下标，第一个下标"1"表示 a_{11} 位置在(1-7)的第一个方程中；第二个下标"1"表示 a_{11} 位置在

未知元 x_1 的前面。一般地，記号 a_{ij} 表示它的位置在第 i 个方程中第 j 个未知元 x_j 的前面 $(i, j=1, 2, \cdots, n)$。我們称 a_{ij} 为第 i 个方程中 x_j 的系数，称方程組 (1-7) 为 n 个元(未知元) n 个方程的綫性方程組。

在国民經济中所遇到的某些数学問題以及在物理、力学中求綫性方程組(1-7)的解是十分重要的。我們已經看到方程組(1-1)和(1-4)的解(1-3)与(1-6)可以通过二阶、三阶行列式得出，那么自然会引起这样的联想，是否綫性方程組 (1-7) 亦可得出类似于(1-3)和(1-6)的解呢？回答是肯定的。这就必須引进所謂 n 阶行列式的概念，而这一概念不仅可以应用来解綫性方程組 (1-7)，并且已成为数学和其他科学部門的有力工具，得到了广泛的应用，关于这一概念我們将在下面介紹。

按照 (1-7)的写法，我們把 (1-1)，(1-4) 改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1-8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1-9}$$

相应的二阶行列式(1-2)及三阶行列式(1-5)可以改写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-10}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1-11}$$

如果我們仔細考察(1-10)与(1-11)就可发現下列現象：

1. 二阶行列式的展开式(即等式右端)有 $2!=2$ 項，且带正号

的項与带負号的項各占一半；三阶行列式有 $3!=6$ 項，且正項、負項也各占一半。

2. 二阶行列式的任一項是两个数的乘积，三阶行列式的每一項是三个数的乘积，并且各个数分别取自行列式中每一行与每一列上。

3. 行列式的展开式中，每一項的各个因子的第一个下标均按自然顺序排列，第二个下标組成的排列与項的正負号有下面的对应关系：对于二阶行列式，与排列 12 对应的項取正号，与排列 21 对应的項取負号；对于三阶行列式，与排列 1 2 3, 2 3 1 和 3 1 2 对应的項取正号，而与排列 3 2 1, 1 3 2 和 213 对应的項則取負号。这样的对应关系究竟有什么特点呢？在一个排列中，如果有一个大的自然数在小的自然数前面(例如排列 21 中的 2 在 1 前面)，为叙述方便起見，則称此排列有一个逆序。我們看到，二阶行列式中項 $a_{12}a_{21}$ 取負号，其对应的第二个下标所成排列 21 有一个逆序。在三阶行列式中，若以 1 2 3 自然顺序为标准，則 2 3 1 中有 2 与 1, 3 与 1 的两个逆序 (2 与 3 是顺序的)；同样 3 1 2 中亦有两个逆序，与它們对应的項都取正号。但对于 3 2 1 有 3 与 2, 3 与 1, 2 与 1 三个逆序，而 1 3 2 有 3 与 2 一个逆序，2 1 3 也有 2 与 1 一个逆序，与它們对应的項都是負的。

从上面的事实看出：正項所对应的排列的逆序数是偶数，我們称具有偶数个逆序的排列为偶排列；負項所对应的排列的逆序数是奇数，我們称具有奇数个逆序的排列为奇排列。

由上面的一些特点，我們可以很方便地引进 n 阶行列式的概念。把(1-7)的 n^2 个数排列成一个正方形

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{matrix} \tag{1-12}$$

式中横的称为行，竖的称为列。在这正方形的每一行每一列中，各取一个，且只取一个数，这些数的乘积可写成 [illegible]

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}, \tag{1-13}$$

这里 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$ 为自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的一个排列（在中学里我們已学过 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的所有可能的排列有 $n!$ 种），对应于排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 的逆序数用記号 $N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 来記。例如 321 有三个逆序，故 $N(321)=3$。由 (1-13) 作出

$$(-1)^{N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}. \tag{1-14}$$

任取某一排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，可得到相应的一項 (1-14)，由于 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 可以有 $n!$ 种不同的排列，故对应的項 (1-14) 也有 $n!$ 个。把这 $n!$ 个項加起来，就称为这 n^2 个数所成的 n 阶行列式。总結起来，我們可以說：

在 n^2 个数 (1-12) 的每一行每一列中各取一个，且只取一个数，作 $n!$ 个可能的乘积 (1-14)，把它們加起来就称为这 n^2 个数所組成的 n 阶行列式。記为　　(顺序任取)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-15}$$

或称这些項的和为行列式 (1-15) 的展开式。称 a_{ij} 为行列式的元素。(1-15) 中横的称为行，竖的称为列。(1-13) 称为 n 阶行列式的一般項。

显然，$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$ 前面的符号完全由 $N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 所决定：如果 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为偶排列，则 $N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 为偶数，故取正号；如果 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为奇排列，则 $N(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 为奇数，故取負号。

現在我們要問：这样定义的行列式是否具有在特殊情况 $n=2, 3$ 时的三个特点呢？

由 n 阶行列式的定义，显见它具有 2，3 两个特点，問題在于是否也具有特点 1，即 n 阶行列式的 $n!$ 项中正項与負項是否各占一半？由于正負号完全由排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 的奇偶性所决定，因此我們把問題归結为在 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列是否各占一半？回答是肯定的。为了証明它，我們先引入对换的概念。如果把排列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 中某两个数进行对調，則称在 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 中經过了一个**对换**。

引理 1 任意一个排列經过一个对换后，得出的新排列与原排列有不同的奇偶性。

証 首先就对調排列中两个相邻数字来考虑。設給定的排列 $AijB$，这里 i 与 j 是要进行对换的数字，A 与 B 是这排列的其余部分。經对换后得到的新排列为 $AjiB$。因为 A 与 B 自身中的逆序数、A 对于 B 的逆序数、A 与 B 对于 i 与 j 两个数字的逆序数都沒有改变。但在 i，j 两个数字間，如果原来是順序的，經过对换就产生一个逆序；如果原来是逆序的，經过对换就变为順序而减少一个逆序。总之新排列的逆序个数比原来排列的逆序个数多一个或是少一个。因此若原排列是偶的，經过对换后就变为奇的；若原排列是奇的，就变为偶的。即改变了排列的奇偶性。

其次考虑对换排列中不相邻两个数字的情形。設給定的排列是 $Ail_1\cdots l_mjB$，这里 i 与 j 是要进行对换的数字，中間隔着 m 个数字 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，而 A 与 B 是排列中其余部分。經过对换后，得到新排列为 $Ajl_1\cdots l_miB$，这个排列可由原来的排列出发，把 i 与 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 作 m 次对换，再与 j 对换，然后把 j 与 $l_m, l_{m-1}, \cdots, l_1$ 作 m 次对换而得到，即总共經过 $2m+1$ 次相邻数字的对换而得到。因为每次作相邻两数的对换都改变排列的奇偶性，現在共經过了 $2m+1$ 次改变奇偶性而得出新排列，所以新排列必然与原来的排列有不同的奇偶性。

引理 2 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列的个数各占一半。

証 設在 $n!$ 个排列中，奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q. 对于所有这些排列，将其为首两个数字施行对换，这样就使 p 个奇排列变成 p 个偶排列，而 q 个偶排列变成了 q 个奇排列。但是我們知道，偶排列的个数最多只有 q 个，因此經过对换得出的偶排列的个数 p 不能超过 q，因此 $p \leqslant q$. 同样，奇排列的个数最多只有 p 个，故經过对换得出的奇排列的个数 q 不能超过 p，因此 $q \leqslant p$. 要 $q \leqslant p$ 与 $p \leqslant q$ 同时成立，只好 $p=q$.

利用引理 2 就可以回答我們上面的問題。就是說：

定理 1 n 阶行列式的展开式中正項与負項的个数各有 $\frac{n!}{2}$ 項。

[例] 計算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

与 (1-11) 比較得：

$$\begin{aligned}&a_{11}=1, \quad &a_{12}=0, \quad &a_{13}=1,\\ &a_{21}=2, \quad &a_{22}=-1, \quad &a_{23}=0,\\ &a_{31}=1, \quad &a_{32}=0, \quad &a_{33}=1;\end{aligned}$$

代入 (1-11) 得

$$\begin{aligned}\Delta &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=1\cdot(-1)\cdot 1+0\cdot 0\cdot 1+1\cdot 2\cdot 0\\ &\quad -1\cdot 0\cdot 0-0\cdot 2\cdot 1-1\cdot(-1)\cdot 1=0.\end{aligned}$$

从上面的例子可見，我們可以按照定义来計算行列式。但是这样的方法計算高阶行列式时非常煩复，因此在下一段中，我們进一步討論行列式的性質，以达到簡化計算的目的。

二、n 阶行列式的性質