高中数学专题性问题

——综述·范例·研究·展望

GAOZHONG SHUXUE ZHUANTIXING WENTI

主编／吴长江

编著／沈子兴 任升录 邬炎锴

高中数学拓展性研究性学习丛书

GAOZHONG SHUXUE TUOZHANXING YANJIUXING XUEXI CONGSHU

◆高考热点专题性解决

◆一个高分冲刺的方案

上海大学出版社

高中数学拓展性研究性学习丛书

高中数学专题性问题

——综述·范例·研究·展望

主编　吴长江
编著　沈子兴　任升录　邬炎锆

上海大学出版社
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题性问题/沈子兴,任升录,邬炎错编著. 上海:上海大学出版社,2002.5 (2002.9 重印)
(高中数学拓展性研究性学习丛书. 综述·范例·研究·展望/吴长江主编)
ISBN 7-81058-472-3

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①沈... ②任... ③邬... Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 021102 号

高中数学专题性问题——综述·范例·研究·展望

主　　编	吴长江
编　　著	沈子兴　任升录　邬炎错
策　　划	王悦生
责任编辑	王悦生　曾　卓
责任校对	张　懿
技术编辑	冯谷兰
封面设计	王春杰
出版发行	上海大学出版社 上海市延长路 149 号　200072(邮编) 86-21-56331806(发行部)　86-21-56332131(编辑部)
经　　销	新华书店上海发行所
印　　刷	江苏句容排印厂
开　　本	890×1240　1/32
印　　张	9.75
字　　数	338 千
版　　次	2002 年 5 月第 1 版　2002 年 9 月第 2 次印刷
定　　价	16.00 元

内容提要

本书是“高中数学拓展性研究性学习丛书”之一，以数学多知识点、多方法的交汇结点（也是高考的热点和亮点）为专题，分九个专题：函数与方程问题，函数最值问题，参变量取值范围问题，复数与三角问题，复数与几何问题，向量与空间角问题，直线与曲线、曲线与曲线的关系问题，点的轨迹问题，数列—函数—不等式问题，构筑了一个旨在进一步提升学生处理信息的能力、综合分析和解决问题的能力的方案.

书中每个专题分“问题综述”、“典型问题分析”、“高考预测”三个部分，“问题综述”对所述专题在高考中的地位、比例以及演变作了概括性的分析；“典型问题分析”从“题海”中整合了具有时代性、典型性和统领性的典例进行分析研究；在此基础上，“高考预测”针对数学教学改革的新变化对高考趋势作了展望. 此外，每个专题后配备了相应的“自我检测”及其参考答案.

本书既可作为高三学生和三校生的高考第二、第三轮复习用书，更可作为高一、高二学生的拓展性学习用书，也可作为相关教师以及广大数学爱好者的参考书.

前 言

为提高整个中华民族的文化素质，中学教育必须进行重大改革已为世人共识. 教育部在《基础教育课程改革纲要（试行）》中明确提出："改变课程内容'难、繁、偏、旧'和过于注重书本知识的现状，加强课程内容与学生生活以及现代社会和科技发展的联系，关注学生的学习兴趣和经验，精选终身学习必备的基础知识和技能. 改变课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状，倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力."同时，教育部还倡导推行研究性学习，并在《普通高中"研究性学习"实施指南（试行）》中将目标定位于：（学生）获得亲自参与研究探索的积极体验；提高发现问题和解决问题的能力；学会分享与合作；培养科学态度和科学道德；培养对社会的责任心和使命感；激活各科学习中的知识储存，尝试相关知识的综合运用. 上海市则在推行研究性学习的同时，积极倡导拓展性学习. 我们认为，拓展性学习是研究性学习的先导，研究性学习是拓展性学习的更高形式. 因而如何开展拓展性研究性学习，成为中学教育界共同关注的问题. 作为一个尝试，我们编写了"高中数学拓展性研究性学习丛书".

本书是"高中数学拓展性研究性学习丛书"之一，针对教育改革的热点与亮点——加强一般能力（学习能力、探索能力、应用能力、创新能力）的培养，以数学知识点（包括方法）间的交汇结点为专题，构筑了一个旨在提升学生处理信息的能力、综合分析和解决问题的能力的方案. 本书是几位重点中学高三把关教师长期教学实践和教学研究的结晶. 具有以下鲜明特点：

1. 本书暂分九个专题，每个专题分"问题综述"、"典型问题分析"、"高考预测"三个部分，它们是多层面的. 其一，突出问题解决，对所述专

题在高考中的地位、比例及其演变等作了高屋建瓴的阐述；其二，针对所述专题综合性(包括知识点，思想方法，能力要求)强的特点，作了较系统的综合分析；其三，既有对高考考情的点拨，又有数学问题解决能力的拓展.

2. 本书从“题海”中整合了具有时代性、典型性、精练性和统领性的典型问题，并对问题的解决作了较为详尽的剖析.

3. 本书以认知规律为前提，对问题作进一步的研究与拓展.包括如何切入问题，怎样分析等思维方式训练，思想方法合理性的选择，新情境、新问题、新题型等的处理策略等.

4. 本书借助于针对性强、前瞻性和实效性好的每个专题后的“自我检测”来实现作者对高考的进一步展望.

本书既可作为高三学生和三校生的高考第二、第三轮的复习用书，更可作为高一、高二学生的拓展性学习用书，也可作为相关教师以及广大数学爱好者的参考书.

本书作为作者多年高考复习经验的浓缩与升华，我们希望莘莘学子能从中得到启发和帮助，越过“题海”，抵达成功的彼岸.当然书中尚有许多不足，随着教育改革的深入，其内容也将需要作进一步的补充和调整，需要更深入地动态地关注中学数学教育改革，关注高考，我们真诚地希望得到读者的意见和建议.

作　者

2002年4月18日

目 录

专题1 函数与方程问题

1.1 问题综述

用函数观点来研究方程问题，用方程思想来解决函数问题是历年高考的热点之一. 一般说来，方程 $F(x, y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$. 例如，由方程 $x+2y-1=0$ 可解得函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，由方程 $x^2-xy=1$ 可解得函数 $y=x+\frac{1}{x}$，等等. 有时，由方程 $F(x, y)=0$ 解得的显函数不唯一. 例如，由方程 $y^2=2px$ $(p>0)$ 可解出函数 $y=\sqrt{2px}$ 或 $y=-\sqrt{2px}$；由方程 $2x^2=3y^2$ 解得 $y=\frac{\sqrt{6}}{3}x$ 或 $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

反过来，方程 $f(x)=0$，它的解可以看作函数 $y=f(x)$ 的值为零时 x 的值. 例如，方程 $\frac{3}{5}x+6=0$ 的解可看作函数 $y=\frac{3}{5}x+6$ 在 $y=0$ 时 x 的值；方程 $2x^2+3x-1=0$ 的解，可看作函数 $y=2x^2+3x-1$ 在 $y=0$ 时 x 的值.

这样，对于给定的方程 $f(x)=0$，在转化成相应的函数 $y=f(x)$ 后，就可以用函数的观点来研究方程. 同样，对于给定的函数 $y=f(x)$，若可以较方便地找到方程 $F(x, y)=0$，使得满足 $\{(x, y)\mid y=f(x)\}\subseteq\{(x, y)\mid F(x, y)=0\}$，那么就可以用方程思想来研究函数问题. 例如函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$，就可以通过抛物线 $y^2=x$ 去研究.

1·2 典型问题分析

问题 1 m 为何值时，方程 $2x^2+(m-2)x+m-5=0$ 的一个根大于 2，另一个根小于 2？

【分析与解】 可利用函数观点去研究方程根的分布，关键是写出符合条件的与方程相应的二次函数.

设 $f(x)=2x^2+(m-2)x+m-5$，其图象是开口向上的抛物线（图 1-1）. 一个根小于 2，另一个根大于 2 的充要条件是 $f(2)<0$，即 $8+2(m-2)+m-5<0$.

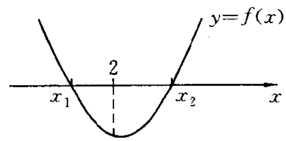

图 1-1

所以，$m<\dfrac{1}{3}$.

问题 2 已知 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 为实系数二次方程，而方程 $f(x)+t(x-k)=0$ 对于任何实数 t 都有实数根，试求 k 与方程 $f(x)=0$ 根的关系.

【分析与解】 由 $\left.\begin{array}{l} f(x)+t(x-k)=0 \\ f(x)=ax^2+bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow ax^2+(b+t)x+(c-kt)$

$$=0. \tag{Ⅰ}$$

因为方程（Ⅰ）有实根，所以 $\Delta \geqslant 0$，即

$$t^2+2(b+2ak)t+b^2-4ac \geqslant 0. \tag{Ⅱ}$$

设

$$p(t)=t^2+2(b+2ak)t+b^2-4ac, \tag{Ⅲ}$$

则 $p(t)$ 是 t 的二次函数，其图象是开口向上的抛物线.

由已知，对任何实数 t 方程（Ⅰ）都有实数根，即不等式（Ⅱ）对任何 t 都成立，所以二次函数 $p(t)\geqslant 0$. 图象或在 x 轴上方，或与 x 轴相切.

所以，$\Delta' = 4(b+2ak)^2 - 4(b^2-4ac) \leqslant 0$

$$\Rightarrow abk + a^2k^2 + ac \leqslant 0. \qquad (\text{IV})$$

当 $t=0$ 时，方程（Ⅰ）就是 $f(x)=0$，所以 $f(x)=0$ 必有两实根.

设两实根为 x_1、x_2，且 $x_1 \leqslant x_2$.

若 $a>0$，由（Ⅳ）得 $ak^2+bk+c \leqslant 0$，所以

$$x_1 \leqslant k \leqslant x_2;$$

若 $a<0$，由（Ⅳ）得 $ak^2+bk+c \geqslant 0$，所以

$$k \leqslant x_1 \text{ 或 } k \geqslant x_2.$$

问题 3 求函数 $y=x+\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 的最小值.

【分析与解】 本题有多种解法，若用方程思想来解，关键是把函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 转化为方程 $x^2-yx+1=0$，再利用判别式使问题得解.

$$y=x+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2-yx+1=0, \qquad (*)$$

方程（*）是关于 x 的二次方程，有实根.

所以，$\Delta \geqslant 0$，即 $y^2-4 \geqslant 0$.

所以，$y \leqslant -2$ 或 $y \geqslant 2$.

因此，$y=-2$ 时，$x=-1$；$y=2$ 时，$x=1$.

又因为 $x>0$，所以当 $x=1$ 时，函数 y 取最小值 2.

问题 4 已知函数 $f(x)=3^x$，$f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$，$f^{-1}(18)=a+2$，函数 $g(x)=3^{ax}-4^x$，求 $g(x)$ 的解析式.

【分析与解】 已知函数 $y=f(x)$ 求 $f^{-1}(a)$. 一般是先求出反函数 $f^{-1}(x)$，再令 $x=a$ 求出函数值. 其实这类问题可根据反函数性质把求 $f^{-1}(x)$ 的过程省掉，只要由 $f(x)=a$ 解出方程的解 x，则得 $f^{-1}(a)=x$.

因为 $f^{-1}(18)=a+2$，所以 $f(a+2)=18$.

又因为 $f(x)=3^x$，所以 $3^{a+2}=18$，所以 $a=\log_3 2$.

所以 $g(x)=2^x-4^x$.

问题 5 函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$ (a、b、c 为常数，且均不为零，$a^2-b^2\neq 0$). 求函数 $f(x)$ 的表达式.

【分析与解】 利用 f 下的变量间存在着互为倒数的关系，进行代换，构造方程组来求得函数解析式.

因为 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$，

上式中用 $\frac{1}{x}$ 代换 x 得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}$，

所以得方程组 $\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx, \\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x}. \end{cases}$

解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(acx-\frac{bc}{x}\right)$.

问题 6 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x$，其中 m、n 为常数，且 $|m|\neq|n|$，求 $f(x)$.

【分析与解】 解题关键是利用 f 下的变量间存在着互为相反数的关系，进行代换，构造方程组来求得函数解析式.

设 $u=2x-3$，则 $-u=3-2x$.

$mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x\Rightarrow mf(u)+nf(-u)=u+3$. (Ⅰ)

方程(Ⅰ)中用 $-u$ 代换 u，得 $mf(-u)+nf(u)=-u+3$. (Ⅱ)

$m\times$(Ⅰ)$-n\times$(Ⅱ) 得 $m^2f(u)-n^2f(u)=u(m+n)+3(m-n)$.

所以 $(m^2-n^2)f(u)=u(m+n)+3(m-n)$.

因为 $|m|\neq|n|$，所以 $f(u)=\frac{u}{m-n}+\frac{3}{m+n}$.

所以，$f(x)=\dfrac{x}{m-n}+\dfrac{3}{m+n}$.

问题 7 设 $f(x)$是 x 的二次函数，$g(x)=2^x\cdot f(x)$，且 $g(x+1)-g(x)=2^{x+1}x^2$，求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式.

【分析与解】 可利用待定系数法，建立方程组求得 $f(x)$和 $g(x)$的表达式.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则 $g(x)=2^x(ax^2+bx+c)$.

又因为 $g(x+1)-g(x)=2^{x+1}x^2$，

所以 $2^{x+1}[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-2^x(ax^2+bx+c)=2^{x+1}\cdot x^2$，

即 $ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c)=2x^2$.

所以 $\begin{cases}a=2\\4a+b=0\\2a+2b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\b=-8,\\c=12.\end{cases}$

所以 $f(x)=2x^2-8x+12$，$g(x)=2^{x+1}(x^2-4x+6)$.

问题 8 求函数 $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ 的值域.

【分析与解】 一般求分式函数或无理函数的值域时，可把函数化为方程后求解，即函数 $y=f(x)$ 可化为

$$p_1(y)x^2+p_2(y)x+p_3(y)=0 \qquad (*)$$

的形式，因为 x 是实数，所以可由方程(*)在函数定义域内至少存在一实根的条件，列出关于 y 的不等式(组)，从而求出函数的值域.

当 $x\neq 1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ 变形得

$$x^2+(2-y)x+y-1=0.$$

因为 x 是实数，所以 $\Delta\geqslant 0$，即

$$(2-y)^2-4(y-1)=y^2-8y+8\geqslant 0.$$

所以 $\qquad y \leqslant 4-2\sqrt{2}$ 或 $y \geqslant 4+2\sqrt{2}$,

当且仅当$x=1+\sqrt{2}$时,$y=4+2\sqrt{2}$;

$x=1-\sqrt{2}$时,$y=4-2\sqrt{2}$.

所以,函数的值域为$(-\infty, 4-2\sqrt{2}] \cup [4+2\sqrt{2}, +\infty)$.

问题 9 求函数 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 的值域.

【分析与解】 因为 $y=x+\sqrt{1-x^2}$,所以函数定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

又 $y=x+\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-x)^2=1-x^2, \\ y-x \geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x^2-2yx+y^2-1=0, \\ y \geqslant x.\end{cases}$

其中方程有实根的条件是 $\Delta \geqslant 0$.

所以,$4y^2-8(y^2-1)=4(2-y)^2 \geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$.

又因为 $y \geqslant x \geqslant -1$,所以 $-1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}$.

所以,函数的值域为$[-1, \sqrt{2}]$.

问题 10 解方程:$3^x+4^x=5^x$.

【分析与解】 可根据指数函数的单调性,判别方程有唯一解.一般地,如果函数 $f(x)$是单调递增(或递减),那么方程 $f(x)=0$ 至多有一个实数解.

因为 $3^x+4^x=5^x$,

显然当 $x=2$ 时,上式符合勾股定理.所以 $x=2$ 是方程的一个解.

又原方程 $3^x+4^x=5^x$ 变形得 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$.

设 $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$,则 $f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的递减

函数.

若 $x>2$,则 $f(x)<f(2)=0$,即$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1<0$.

所以方程没有比 2 大的解.

同理可得, $x<2$ 时, $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1>0$, 方程没有比 2 小的解.

所以原方程只有唯一的实数解 $x=2$.

问题 11 当 a 为何值时,方程 $\lg(x+1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$ $(a\in\mathbf{R})$ 有不同两根? 仅有一根? 无根?

【分析与解】 可把方程转化为二次函数,然后根据二次函数图象与 x 轴相交的情况来解决问题.

因为方程 $\lg(x+1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$,

所以 $(x+1)(4-x)=a-x\Rightarrow -x^2+4x+4-a=0\quad(-1<x<4)$.

令 $f(x)=-x^2+4x+4-a\quad(-1<x<4)$.

若方程在区间$(-1,\ 4)$中有两根时,则

$$\begin{cases}\Delta=16+16-4a>0\\ f(4)=4-a<0\\ f(-1)=-1-a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<8\\ a>4\\ a>-1\end{cases}\Rightarrow 4<a<8,$$

若方程在区间$(-1,\ 4)$中仅有一根,则

$$f(4)\cdot f(-1)=(4-a)(-1-a)<0\Rightarrow -1<a<4.$$

经检验,当 $a=8$ 时, $x=2$;当 $a=4$ 时, $x_1=0$, $x_2=4$;当 $a=-1$ 时, $x_1=-1$, $x_2=5$.

综上所述,当 $4<a<8$ 时,方程有两根;当 $-1<a\leqslant 4$ 或 $a=8$

时，方程有一根；当 $a \leqslant -1$ 或 $a > 8$ 时，方程无根.

问题 12 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的顶点 $B'(0,-b)$ 引一条弦 $B'P$，求 $|B'P|$ 的最大值.

【分析与解】 可将椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 转化为关于 y 的二次函数，然后再分类讨论.

设 P 点坐标为 (x, y)，则

$$|B'P|^2 = x^2+(y+b)^2 = x^2+y^2+2by+b^2.$$

因为 P 点在椭圆上，所以 $x^2 = a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$.

令 $f(y)=|B'P|^2=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+a^2+b^2\quad(-b\leqslant y\leqslant b)$.

$f(y)$ 是关于 y 的二次函数，顶点坐标为 $\left(\frac{b^3}{a^2-b^2}, \frac{a^4}{a^2-b^2}\right)$.

若 $\left|\frac{b^3}{a^2-b^2}\right|\leqslant b$，即 $a\geqslant\sqrt{2}b$ 时，函数 $f(y)$ 在顶点处取最大值，$|B'P|$ 也取最大值，最大值为 $\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}}=\frac{a^2}{c}$（其中 c 为半焦距）.

若 $\left|\frac{b^3}{a^2-b^2}\right|>b$，即 $b<a<\sqrt{2}b$ 时，函数 $f(y)$ 在端点处取最大值，$f(-b)=0$，$f(b)=4b^2$，于是 $|B'P|$ 也在 $y=b$ 处取最大值 $2b$.

问题 13 问方程 $\log_2(x+4)=3^x$ 的实数解的个数是几个？

【分析与解】 求出方程的解，再数其方程的解的个数的方法这里是行不通的，应该把方程转化为函数，再利用数形结合的思想解决问题.