# 随机介质中光的传播与成像

张逸新 编著

国防工业出版社

·北京·

**图书在版编目(CIP)数据**

随机介质中光的传播与成像/张逸新编著．－北京：国防工业出版社，2002.2

ISBN 7-118-02641-7

Ⅰ．随… Ⅱ．张… Ⅲ．①随机－介质－光－传播－研究 ②随机－介质－光－成像原理 Ⅳ．O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063278 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

三河市新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 13¼ 347 千字

2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月北京第 1 次印刷

印数：1－2000 册 定价：25.00 元

本书出版受

“华夏英才基金”支持

并得到

“高等学校骨干教师资助计划”资助

# 前　言

光波通过随机介质传播和成像是诸如激光通信、航空测绘、卫星遥感等领域湍流大气环境中运行的光学系统的设计和使用中必然要考虑到的问题,同时也是激光医学、生物工程等领域中运用光学工具进行病情诊断与治疗、生物特性测量和研究的科技和医疗人员必然要遇到的问题。

工作在大气中的光学系统常会遇到因大气湍流的干扰而产生的种种“湍流效应”,例如:大气闪烁、源像抖动、相位间歇性、成像分辨率降低、通过同一随机介质折叠路径传输的闪烁增强等。不同的湍流效应对不同的光学系统产生的影响各不同,有些效应严重影响光学系统正常设计性能的发挥。例如,光学系统的角分辨率一般由其入瞳的衍射极限限制,然而,各种大气成像系统的角分辨率则通常由小于光学系统入瞳的大气湍流相干长度决定。光波在生物介质中传播则会导致光的吸收、散射和生物荧光的产生。生物医学光学工作者就是利用光波在生物组织和其他生物介质中传播所产生的光吸收、散射和生物荧光等信息诊断病灶、研究血液循环和生物结构,因此,随着激光技术和其他光学仪器研制的进展,光波在随机介质中的传播和成像规律受到越来越广泛的注重,近年来人们已在该领域做了大量的研究工作,建立了不少有价值的理论模型。作者曾在拙著《光波在大气中的传输与成像》中论述了光波在大气湍流中传播时因大气折射、大气湍流所产生的一系列现象与国内外的研究成果,遗憾的是《光波在大气中的传输与成像》一书没有把光波在生物介质中传播时所产生的现象与规律包括进去,并且书中缺乏研究光波在随机介质传播问题时所必需的

数学基础理论——随机场理论详细描述,给读者带来阅读上的麻烦,本书试图弥补这些不足并介绍国内外在该领域的最新研究成果。

本书重点介绍了光波在湍流大气和生物组织中传播时所产生的现象与规律。书中较详细地介绍了随机介质中光波传播的数学基础,重点论述了近10年来国内外学者和作者在该领域的最新研究成果。全书共分8章。第一章介绍了随机场的基本概念,其中包括随机场的协方差函数、随机场的空间频谱和特征函数表示。第二章叙述了随机场通过简单光学系统的衍射和平面波通过随机衍射屏的衍射。第三章介绍了研究光波在弱散射生物介质传播时常遇到的单次散射理论。第四章介绍了光波在连续介质中传播时的理论基础,其中包括抛物方程近似、微扰理论、马尔柯夫近似、平均场和二阶相干函数、四阶相干函数和强度起伏等。第五章介绍了研究光波在强散射生物介质中传播时所涉及到的传输方程和漫射理论。第六章论述了光波在湍流大气中传播时产生的湍流效应近期研究新成果,例如,大气闪烁、到达角起伏、孔径平滑Andrews理论、相位间歇性和湍流后向散射增强等。第七章在简述长期与短期曝光成像规律的基础上,从光波二次通过同一湍流介质传播时相干特性变化的角度论述了湍流大气中二次成像规律。第八章从生物介质的光散射、光子迁移和光子吸收等方面论述了光波在生物介质中的传播与成像规律。

本书是在华夏英才基金的资助下完成的,并得到江苏省自然科学基金和863计划大气光学重点实验室基金资助,在此表示感谢。另外特别感谢江苏省、无锡市和无锡轻工大学各级统战部领导的支持和帮助,他们促进了本书的完成。同时也感谢我的导师龚知本研究员的关心和鼓励。在本书的形成过程中得到了朱拓教授、李儒荀教授的帮助,在此表示感谢。

由于作者学识有限,加之本书涉及到的面又很广,书中难免有不足之处,衷心希望广大读者提出宝贵的批评。

张逸新

2000年12月

# 目　录

# 第一章　随机场的基本概念

本章重点介绍后面各章中要用到随机场的协方差概念、随机场的谱表示、局地均匀随机场及随机场的特征函数表示等问题。

## 1.1　基 本 定 义

具有空间分布的物理量，其在空间各点的取值为随机量时，则形成空间上的随机场。而就光波在随机介质中的传播问题来说，涉及到的随机场通常又是时间的随机函数，例如大气温度场 $T(x,y,z,t)$。为此，根据实际讨论的需要，下面主要研究以时间 $t$ 和空间某点坐标 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 为变量的四维随机场。从数学上来说，随机场也可用 $N$ 个函数（或元）$\xi^{(i)}(t,\boldsymbol{r})(i=1,2,\cdots,N)$ 来描述，这种用 $N$ 个函数 $\xi^{(i)}(t,\boldsymbol{r})$ 表示的随机场称作为 $N$ 元随机场。在只有单变量的情况下，例如，$\xi^{(i)}(t)$，我们称其为变量 $t$ 的随机过程或随机函数。不过，应该注意区分自变量 $t,x,y,z$ 的数值与随机场元数的差别。数学上，$\xi^{(i)}(t,\boldsymbol{r})$ 的元素可以是任意的，同时可以有不同的维数。例如，液体的密度起伏 $\rho$，压力 $p$，温度 $t$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 构成了一个六元随机场。但是，物理学中人们感兴趣的是各个元 $\xi^{(i)}(t,\boldsymbol{r})$ 具有相同的维数，并且在 $x,y,z,t$ 坐标空间的正交变换过程中具有相同的特性，即 $\xi^{(i)}(t)$ 是一个张量的元。按照这种方法，上述例子中采用四个场描述更容易些，即三个标量场（$\rho,p$ 和 $t$）和一个矢量场 $\boldsymbol{v}$。

设 $Q=(t,\boldsymbol{r})$ 表示四维空间中的一点，如果一元随机场 $\xi(Q)$ 的 $n$ 个变量或 $n$ 个点（$n=1,2,3,\cdots$）的概率密度是已知的，则称 $\xi(Q)$ 被完备定义，对于 $n$ 个任意选定点 $Q$，函数由下式给出

$$p_n\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n = P\{\xi_\nu \leqslant \xi(Q_\nu) < \xi_\nu, \nu = 1,2,\cdots,n\} \tag{1.1.1}$$

式中,$P\{\xi \leqslant (Q) < \xi + \mathrm{d}\xi\}$是随机变量 $\xi(Q)$的值落在$\{\xi,\xi+\mathrm{d}\xi\}$区域内的概率密度。与此相类似,$N$ 元场$\xi^{(i)}(q)$可由 $nN$ 个变量概率密度的集合统计完备地定义。

$$p_{nN}(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\cdots,\xi_n^{(N)})\mathrm{d}\xi_1^{(1)}\mathrm{d}\xi_2^{(1)}\cdots\mathrm{d}\xi_n^{(N)} = P\{\xi_\nu^{(i)} \leqslant \xi^{(i)}(Q_\nu) < \xi_\nu^{(i)} + \mathrm{d}\xi_\nu^{(i)}, \nu = 1,2,\cdots,n, i = 1,2,\cdots,N\} \tag{1.1.2}$$

显然,上述概率密度必须满足非负、对称、归一和分层的条件。

如果第 $n$ 个变量的概率密度 $p_n$ 在变换 $Q \to Q + \delta Q$ 中是不变的,即

$$P\{\xi_\nu \leqslant \xi(Q_\nu + \delta Q) < \xi_\nu + \mathrm{d}\xi_\nu, \nu = 1,2,\cdots,n\} = P\{\xi_\nu \leqslant \xi(Q_\nu) < \xi_\nu + \mathrm{d}\xi_\nu, \nu = 1,2,\cdots,n\} \tag{1.1.3}$$

则一元随机场被认为是时间上平稳和空间上均匀的场。对于具有 $N$ 元的随机场$\xi^{(i)}$,如果任一变量 $nN$ 的概率密度 $p_{nN}$在 $Q \to Q + \delta Q$ 变换中是不变的,则场 $\xi^{(i)}(i=1,2,\cdots,N)$在 $Q$ 空间内是均匀和均匀连通的。

如果给定多变量概率密度,那么我们可以求出相应随机场 $\xi$ 的各阶矩。一般情况下各阶矩是坐标 $Q_\nu=(t,\boldsymbol{r}_\nu)$的函数。在大多实际应用中,人们常常对随机场相关理论中用到的一阶矩和二阶矩感兴趣,所以下面我们先讨论此问题。实际上,随机场矩的概念基本上与随机过程矩的概念相同。

类似于随机过程,随机场的一阶矩(平均场)用单变量概率密度 $p_1(\xi)$计算[1]

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int \xi p_1(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.1.4}$$

式中,$\langle\cdot\rangle$表示系综平均。随机场 $\xi$ 的起伏部分$\tilde{\xi}$ 定义为

$$\tilde{\xi} \equiv \xi - \langle \xi \rangle \tag{1.1.5}$$

二阶交叉矩 $\Gamma_\xi$ 由双变量概率密度$p_2(\xi_1,\xi_2)$计算

$$\Gamma_\xi(Q_1,Q_2) \equiv \langle \xi(Q_1),\xi(Q_2) \rangle = \iint \xi_1\xi_2 p_2(\xi_1,\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{1.1.6}$$

而协方差定义为

$$\psi_{\xi}(Q_1Q_2) \equiv \langle\tilde{\xi}(Q_1)\tilde{\xi}(Q_2)\rangle =$$

$$\iint(\xi_1 - \langle\xi_1\rangle)(\xi_2 - \langle\xi_2\rangle)p_2(\xi_1,\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 =$$

$$\Gamma_{\xi}(Q_1,Q_2) - \langle\xi(Q_1)\rangle\langle\xi_2(Q_2)\rangle \qquad (1.1.7)$$

如果随机场的平均值为零,则二阶交叉矩等于协方差 $\Gamma_{\xi}(Q_1,Q_2) = \psi_{\xi}(Q_1,Q_2)$。随机场的方差,即起伏均方差为

$$D[\xi] \equiv \sigma_{\xi}^2(Q) \equiv \langle\tilde{\xi}^2(Q)\rangle = \langle[\xi(Q) - \langle\xi(Q)\rangle]^2\rangle =$$

$$\psi_{\xi}(Q,Q) \qquad (1.1.8)$$

多元随机场 $\xi^{(i)}(Q)$在相关理论中是由平均值$\langle\xi^{(i)}(Q)\rangle$和下式表示的二阶矩阵来描述的

$$\Gamma_{ik}(1,2) = \langle\xi^{(i)}(1)\xi^{(k)}(2)\rangle \qquad (1.1.9)$$

也可以用下列相关矩阵描述

$$\psi_{ik}(1,2) = \langle\tilde{\xi}^{(i)}(1)\tilde{\xi}^{(k)}(2)\rangle = \Gamma_{ik}(1,2) - \langle\xi^{(i)}(1)\rangle\langle\xi^{(k)}(2)\rangle \qquad (1.1.10)$$

式中,1,2 是变量 $Q_1$ 与 $Q_2$ 的速记号。相关矩阵的对角元是场 $\xi^{(k)}$的协方差函数 $\psi_{kk}(1,2)$,而非对角矩阵则是互协方差函数 $\psi_{ik}(1,2)$。

除了上述对实随机场 $\xi(Q)$的描述外,我们也可处理复随机场问题。复随机场记为

$$\zeta(Q) = \xi(Q) + \mathrm{i}\eta(Q) \qquad (1.1.11)$$

式中,$\xi = \mathrm{Re}\{\zeta\}$和 $\eta = \mathrm{Im}\{\zeta\}$是 $Q$ 空间的实函数。一个复随机场可以由 $2n$ 变量的概率密度$p_{2n}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots;\eta_1,\cdots,\eta_n)$统计完备地定义。概率密度 $p_{2n}$与概率$P$ 间有如下关系

$$p_{2n}(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots;\eta_1,\cdots,\eta_n)\mathrm{d}\xi\cdots\mathrm{d}\xi_n\mathrm{d}\eta_1\cdots\mathrm{d}\eta_n =$$

$$P\{\xi_{\mu} \leqslant \xi(Q_{\mu}) \leqslant \xi_{\mu} + \mathrm{d}\xi_{\mu}, \eta_{v} \leqslant \eta(Q_{\nu}) \leqslant$$

$$\eta + \mathrm{d}\eta_{\nu} \quad (\mu,\nu = 1,2,\cdots,\eta)\}$$

由 $p_{2n}$,我们可以求出复随机场 $\zeta$ 的各阶矩。下一节我们将讨论复随机场的矩的问题。

## 1.2 复随机场的空间协方差函数

我们先研究以空间坐标为变量而独立于时间的随机场,并设一维复随机场 $\zeta$ 仅是 $\boldsymbol{r}$ 的函数。

$$\zeta(\boldsymbol{r}) = \xi(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\eta(\boldsymbol{r})$$

由定义,$\zeta$ 的协方差为

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \equiv \langle\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\zeta}^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle = \langle\zeta(\boldsymbol{r}_1)\zeta^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle - \langle\zeta(\boldsymbol{r}_1)\rangle\langle\zeta^*(\boldsymbol{r}_2)\rangle \tag{1.2.1}$$

式中,* 表示复共轭,令 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$,我们得到 $\boldsymbol{r}$ 点的方差

$$\sigma_\zeta^2(\boldsymbol{r}) \equiv \langle|\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 = \psi_\zeta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) \tag{1.2.2}$$

由于协方差 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$在随机过程中有其独特的特征,下面我们对它们略为多作些讨论。

由式(1.2.1)可知,协方差 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$是厄米的,即

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\zeta^*(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1) \tag{1.2.3}$$

在实随机场情况下($\zeta=\zeta^*$),则协方差是对称的

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1) \tag{1.2.4}$$

$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$的平方模小于或等于方差 $\sigma_\zeta^2(\boldsymbol{r}_1)$和 $\sigma_\zeta^2(\boldsymbol{r}_2)$的积

$$|\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|^2 \leqslant \sigma_\zeta^2(\boldsymbol{r}_1)\sigma_\zeta^2(\boldsymbol{r}_2) = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{1.2.5}$$

由式(1.2.5)可得出相关系数

$$K_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}{\sigma_\zeta(\boldsymbol{r}_1)\sigma_\zeta(\boldsymbol{r}_2)} = \frac{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}{\sqrt{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1)\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2)}} \tag{1.2.6}$$

相关系数的绝对值小于或等于 1

$$|K_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)| \leqslant 1 \tag{1.2.7}$$

因为量 $\langle|\int\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2\rangle$ 是非负的,所以协方差 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$是正定的,即

$$\iint\limits_V \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)u(\boldsymbol{r}_1)u^*(\boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \geqslant 0 \tag{1.2.8}$$

式中，$u(\boldsymbol{r})$是任意复函数；$V$ 是积分式(1.2.8)存在的积分区域；$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \int \mathrm{d}x_i \int \mathrm{d}y_i \int \mathrm{d}z \quad (i = 1,2)$。

两个复场 $\mu(\boldsymbol{r})$和 $\nu(\boldsymbol{r})$的互协方差函数记为

$$\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \langle \tilde{\mu}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\nu}(\boldsymbol{r}_2)\rangle \tag{1.2.9}$$

类似于式(1.1.6)，$\psi_{\mu\nu}$的平方模不大于方差$\sigma_\mu^2$ 与$\sigma_\nu^2$ 的积，即

$$|\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|^2 \leqslant \sigma_\mu^2(\boldsymbol{r}_1)\sigma_\nu^2(\boldsymbol{r}_2) \tag{1.2.10}$$

互相关系数则为

$$K_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{\psi_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}{\sigma_\mu(\boldsymbol{r}_1)\sigma_\nu(\boldsymbol{r}_2)} \tag{1.2.11}$$

$K_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$的模小于或等于1即$|K_{\mu\nu}|\leqslant 1$。应注意互协方差 $\psi_{\mu\nu}$既不是厄米的又不是正定的，其具有性质$|\psi_{\mu\nu}{}^*(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)| = \psi_{\nu\mu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$。

类似于平稳随机场的概念，这里提出均匀场的概念。如果随机场的平均值是常数，并且如果当位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 在同一方向上移动同样的量 $\boldsymbol{r}_0$ 时协方差函数不改变，也就是如果$\langle\zeta(\boldsymbol{r})\rangle =$ 常数，且 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_0)$时，随机场称为均匀的。

除了 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$，有时引入复数场的第二协方差函数

$$\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \langle\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r}_2)\rangle \tag{1.2.12}$$

第二协方差函数是变量对称的，$\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)$，当 $\zeta$ 是实场时，则 $\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1) = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)$。

利用 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$和 $\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$，复场 $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ 实部与虚部的协方差函数和互协方差函数可表示为

$$\psi_\xi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \langle\tilde{\xi}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\xi}(\boldsymbol{r}_2)\rangle,\quad \psi_\eta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \langle\tilde{\eta}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\eta}(\boldsymbol{r}_2)\rangle$$

$$\psi_{\eta\xi}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \langle\tilde{\xi}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\eta}(\boldsymbol{r}_2)\rangle = \psi_{\xi\eta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

注意，一般情况下 $\psi_{\xi\eta}$相对于$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 是不对称的。利用上述关系，我们有

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\xi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \psi_\eta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) - \mathrm{i}\psi_{\xi\eta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \mathrm{i}\psi_{\eta\xi}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$
$$\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\xi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) - \psi_\eta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \mathrm{i}\psi_{\xi\eta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \mathrm{i}\psi_{\eta\xi}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{1.2.13}$$

我们得到实场 $\xi(\boldsymbol{r})$和 $\eta(\boldsymbol{r})$的下列相关矩阵元

$$\begin{aligned}
\psi_\xi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\} \\
\psi_\eta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) - \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\} \\
\psi_{\xi\eta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) - \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\} \\
\psi_{\eta\xi}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) + \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\}
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

当 $\zeta$ 是统计均匀随机场时,仅只有 $\zeta$ 的平均值和二阶矩在 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$ 变换中是不变的,即

$$\langle\zeta(\boldsymbol{r})\rangle = \langle\zeta(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r})\rangle \tag{1.2.15}$$

$$\langle\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rangle = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{r}) \tag{1.2.16}$$

条件(1.2.15)意味着$\langle\zeta\rangle$ = 常数,在式(1.2.16)中设 $\delta\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}_2$,则有 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,0)$,即统计均匀场的协方差仅依赖于位置矢量的差 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 而不是位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。把 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,0)$简记为 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r})$

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \langle\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r}_1)\tilde{\zeta}^*(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})\rangle \tag{1.2.17}$$

统计均匀场的第二方差 $\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})$的形式同式(1.2.17),只是没有复共轭记号。

统计均匀场的方差是常数

$$\sigma_\zeta^2 = \langle|\tilde{\zeta}(\boldsymbol{r})|^2\rangle = \psi_\zeta(0) \tag{1.2.18}$$

而协方差(式(1.2.1),式(1.2.3))和式(1.2.6)的一般特性则变为

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \psi_\zeta^*(-\boldsymbol{r}) \tag{1.2.19}$$

$$|\psi_\zeta(\boldsymbol{r})| \leqslant \sigma_\zeta^2 \tag{1.2.20}$$

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\psi_\zeta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)u(\boldsymbol{r}_1)u^*(\boldsymbol{r}_2) \geqslant 0 \tag{1.2.21}$$

这些关系与平稳随机过程的性质相类似[2]。由式(1.2.19)可得

$$\mathrm{Re}\{\psi_\zeta(-\boldsymbol{r})\} = \mathrm{Re}\{\psi_\zeta(\boldsymbol{r})\}, \mathrm{Im}\{\psi_\zeta(-\boldsymbol{r})\} = -\mathrm{Im}\{\psi_\zeta(\boldsymbol{r})\}$$

上式表示 $\psi_\zeta$ 实部是 $\boldsymbol{r}$ 的偶函数,虚部是 $\boldsymbol{r}$ 的奇函数。如果 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r})$ 是偶函数则其必然为实函数。

均匀场第二类协方差函数相对其变量是偶对称函数,即 $\tilde{\psi}_\zeta(-\boldsymbol{r}) = \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})$。对某些特例,第一类协方差函数也是偶函数。式(1.2.14)变为

$$\begin{cases} \psi_\xi(\boldsymbol{r}) = [\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) + \mathrm{Re}\{\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})\}]/2 \\ \psi_\eta(\boldsymbol{r}) = [\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) - \mathrm{Re}\{\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})\}]/2 \\ \psi_{\xi\eta}(\boldsymbol{r}) = \psi_{\eta\xi}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{Im}\{\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})\}/2 \end{cases} \tag{1.2.22}$$

上式成立的条件是复统计均匀场 $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ 的实部和虚部是统计均匀的和均匀连通的。如果统计均匀场 $\psi_\zeta(\boldsymbol{r})$和 $\tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r})$仅依赖于连接点 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的矢量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 的大小,即

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \psi_\zeta(r), \quad \tilde{\psi}_\zeta(\boldsymbol{r}) = \tilde{\psi}_\zeta(r) \qquad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2.23}$$

则称此随机场是统计各向同性的场。可以证明各向同性场的特性与随机过程理论中的各向同性随机过程完全类似。

各向同性场的协方差始终是偶函数,且是实数函数,按式(1.2.22),如果场 $\zeta$ 是各向同性的,那么场 $\xi = \mathrm{Re}\{\zeta\}$和 $\eta = \mathrm{Im}\{\zeta\}$ 是各向同性和各向同性连通的。

均匀各向同性随机场 $\zeta$ 的协方差的例子是高斯曲线型的协方差

$$\psi_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \mathrm{e}^{-r^2/2l^2} \tag{1.2.24}$$

和指数型协方差

$$\psi_\zeta(r) = \sigma_\zeta^2 \mathrm{e}^{-r/l} \tag{1.2.25}$$

式(1.2.24)与式(1.2.25)中的 $l$ 是场的相关半径,即 $r = l$ 时 $\psi_\zeta(r)$ 近似为 $\sigma_\zeta^2$ 的一半。对于任意形式的协方差点,则等效(积分)相关半径通常由下式给出

$$l_{ef} = \frac{1}{\sigma_\zeta{}^2}\int_0^\infty \psi_\zeta(r)\mathrm{d}r = \int_0^\infty K_\zeta(r)\mathrm{d}r \tag{1.2.26}$$

对于高斯函数形式的协方差：$l_{ef} = l(\pi/2)^{-1/2}$，指数形式的协方差：$l_{ef} = l$。某些协方差函数具有一定空间尺寸度，但是因为方程(1.2.26)是散发的而没有等效相关半径，下列协方差函数即是例子

$$\psi_\zeta(r) = \sigma^2\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-\mu}, \quad \mu < \frac{1}{2}$$

虽然相关半径的概念是一个常用的概念，但是，目前尚无一种对任何函数都合适的定义。通常协方差函数有几个空间特征尺度，例如，快振动协方差有一个慢变包络。下面分析各向异性场的协方差。

统计均匀但各向异性场的协方差不仅是 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 大小的函数，而且还依赖于 $\boldsymbol{r}$ 的方向，例如

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \psi_\zeta[(\alpha x + \beta y + \gamma z)/l] \tag{1.2.27}$$

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \psi_\zeta\left(\frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b}, \frac{|z|}{c}\right) \tag{1.2.28}$$

式中，$\alpha, \beta, \gamma$ 是方向余弦。显然各向异性场在随机过程理论中没有对应的部分。各向异性场的相关半径是方向的函数。例如：各向异性高斯型协方差

$$\psi_\zeta(\boldsymbol{r}) = \sigma_\zeta{}^2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right] \tag{1.2.29}$$

式中，$a$, $b$, $c$ 刻划了在 $x$, $y$ 和 $z$ 方向上的空间相关尺度。式(1.2.27)中的 $l$ 描述了与 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 平面垂直方向的相关半径。而 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ 平面的相关半径为无限长。

根据复随机场 $\zeta$ 一阶矩和二阶矩的定义，我们也可以按下式定义$(m+n)$阶矩 $\Gamma_{m,n}$

$$\Gamma_{m,n}(1,2,\cdots,m+n) = \langle\zeta(1)\rangle\cdots\zeta(m)\zeta^*(m+1)\cdots\zeta^*(m+n)\rangle \tag{1.2.30}$$

其中场 $\zeta$ 出现$m$ 次，而其复共轭 $\zeta^*$ 出现 $n$ 次，为简化记号我们用