7

线性代数及其应用

主　编　王晓峰

副主编　张志让　王树佳　谢婉文

理学院　王晓峰

山东科学技术出版社

线性代数及其应用

主　编　王晓峰

副主编　张志让　王树佳　谢婉文

出版者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002　电话:(0531)2065109

网址:www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net

发行者:山东科学技术出版社

地址:济南市玉函路 16 号

邮编:250002　电话:(0531)2020432

印刷者:济南申汇印务有限责任公司

地址:济南市王官庄 12 号

邮编:250022　电话:(0531)7963341

开本:850mm×1168mm　1/32

印张:7.75

字数:172 千

版次:2002 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1－5000

ISBN 7－5331－3094－4　O·103

定价:15.00 元

前　言

线性代数理论有着悠久的历史和丰富的内容。随着科学技术的发展，特别是电子计算机使用的日益普遍，作为重要的数学工具之一，线性代数的应用已经深入到了自然科学、社会科学、工程技术、经济、管理等各个领域，以至于各大学许多院系都将线性代数作为必须开设的基础课程之一，因而也对线性代数的教学内容和教学形式提出了更高的要求。

基于这些认识，本教材既兼顾线性代数的全面性、系统性以及逻辑上的严密性，还力求在内容上突出以下鲜明特色，把矩阵初等变换这一线性代数中最重要的工具的运用贯穿始终，让学生充分感受到其功能的强大；开篇第一章就讲解线性方程组，这仅是中学代数的简单延续，学生很快能进入角色，避免了一开始就将繁杂而且不易掌握的行列式的概念强加给学生的尴尬；减少用处不多、地位又不重要的行列式的内容，并采用实用的按行或列展开的方法定义行列式，并在其他内容的处理中尽可能不用或少用行列式（比如矩阵的秩的定义）；采用形式矩阵的记法（或看作是分块矩阵）处理向量组间的线性关系，使复杂的计算和有关的证明得以简单明

了；尽可能多地给出应用实例，让各个专业的学生都能体会到线性代数对自己的专业发展的有用之处，达到增加学习兴趣的目的；有较好的伸缩性，教师可根据学时的多少对书中的若干内容予以取舍（比如，仅有 30～40 学时，可将标有“*”的内容、第七章的部分内容以及第八章的部分或全部舍去不讲）。

我们欢迎来自同行和其他读者的建议和意见。

本书的编著得到了教育部优秀青年教师基金、深圳大学教务处和深圳大学线性代数重点课程项目的资助。

本书采纳了赵中时先生、林壮鹏老师和陈必红老师仔细审阅初稿后提出的许多宝贵建议，在此表示衷心的感谢。

编著者

2001 年 11 月 29 日

目　录

第一章　线性方程组和矩阵

无论在工程技术、电子与计算机、信息处理、经济、管理、以及物理学等各个领域，甚至在数学的许多分支中，人们都会面临各种各样需要处理的线性问题．而线性问题的处理常常归结为对线性方程组的求解，矩阵则是处理线性问题过程中最重要的工具．

§1.1　n元线性方程组

一、n元线性方程

我们知道，一个关于变元x、y的二元一次方程

$$a_1x+a_2y=b,\qquad a_1,\ a_2,\ b\ \text{为实数}$$

在平面解析几何中代表xoy平面上的一条直线．因此也称其为二元线性方程．一般地，如果$a_1,a_2,\cdots,a_n$和b均为数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个变元（亦称未知量），那么我们称形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1}$$

的方程为 n **元线性方程**. a_ix_i 称为此方程的第 i 项，而 a_i 为其系数；b 称为此方程的常数项. 方程（1）中数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 可以全是有理数，也可以全是实数或复数等，并且分别称之为有理系数，实系数和复系数 n 元线性方程. 如无特别声明，本书中的线性方程均是实系数线性方程.

一个 n 元有序实数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$（也常记为“列”的形式：$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$）如果满足

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$$

则称其为方程（1）的**一个解**，有时也称 $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$\cdots$，$x_n = c_n$ 是方程（1）的一个解. 方程（1）的全部解的集合称为（1）的**解集**. 两个 n 元线性方程的解集如果相同，则称这两个方程**同解**.

例 1 求二元线性方程

$$2x - 3y = 2 \tag{2}$$

的解集（全部解）.

解 将（2）变形为

$$x = 1 + \frac{3}{2}y \tag{3}$$

此时，给变元 y 赋任一值，使可求得 x 对应的值. 例如，令 $y = 0$，则 $x = 1$；令 $y = -2$，则 $x = -2$；等等. 即 $(1, 0)$ 和 $(-2, -2)$ 均是（2）的解（也称为（2）的两个特解）. 而（2）的全部解可记为

$$(1+\frac{3}{2}t,\ t),\qquad t\text{为任意实数}$$

上述例题中，方程（2）的解集在 xoy 平面上构成点的集合

$$\left\{(1+\frac{3}{2}t,\ t)\middle|\ t\ \text{为任意实数}\right\}$$

它的几何意义为一条直线：其方程就是 $2x-3y=2$.

二、n 元线性方程组

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个变元．称由 m 个 n 元实系数线性方程构成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{4}$$

为 n **元（实系数）线性方程组**．方程组中系数 a_{ij} 的双重脚标表示 a_{ij} 为方程组（4）的第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数.

一个 n 元有序实数组（c_1，c_2，$\cdots$，c_n）如果是方程组（4）中每一个方程的解，则称为此**方程组的一个解**；此方程组的全部解的集合称为该方程组的**解集**.

例 2　解下列方程组，并在直角坐标系中作出其图形.

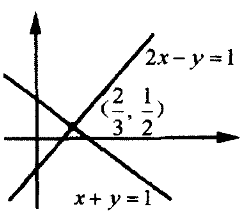
（a）$\begin{cases}x+y=1\\2x-y=1,\end{cases}$　（b）$\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=2,\end{cases}$　（c）$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=3.\end{cases}$

解　（a）此方程组有惟一的解：$(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，即当 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 时方程组中两个等式均成立．此惟一解的几何意义为 xoy 平面

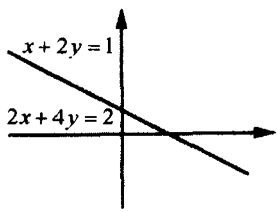
上两条相交直线的交点，其坐标就是$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

（b） 此方程组中第二个方程刚好是第一个方程的 2 倍，从而两个方程的解集相同. 第一个方程变形为 $x=1-2y$，得全部解为$(1-2t, t)$，其中 t 为任意实数. 在平面直角坐标系中其图形为两条重合的直线，即该直线上所有点的坐标对应此方程组的全部解.

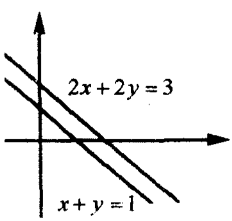
（c） 容易验证此方程组没有解（称为**矛盾方程组**），即两个方程的解集不含公共元素. 这两个方程的图形为两条平行（不重合）的直线.



（a）



（b）



（c）

思考 由三个三元线性方程构成的三元线性方程组解集的所有可能类型及对应的空间直角坐标系中的几何意义是什么？

例 2 给出了一线性方程组解集的三种可能：有惟一解；有无穷多解； 或无解．我们将在本章 § 1.4 给出一般性的结论并在第四章对线性方程组且关于变元解的结构进行更深入的讨论．

§1.2　矩阵的定义

上一节中方程组（4）的未知量的系数构成了一个 m 行 n 列的数表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

一个如上的 m 行 n 列的矩形数表称为一个 $m\times n$ **级矩阵**，其横排称为**行**，纵排称为**列**．而表中每一数 a_{ij} 称为矩阵的**元素**，其双重脚标表示此元素位于该矩阵第 i 行和第 j 列．亦称 i 为 a_{ij} 的**行编号**， j 为 a_{ij} 的**列编号**，并简称 a_{ij} 为此矩阵（i, j）**位置上**的元素．常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示矩阵．为方便计，用记号

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

表示 A 是一个 m 行 n 列的矩阵，其（i，j）位置上的元素为 a_{ij}，

$$i=1,\ 2,\cdots,m;\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

如果一个矩阵的元素均为实数，则称其为实矩阵．我们约

定，除非特别申明，本书所讨论的矩阵均为实矩阵.

矩阵（5）称为线性方程组（4）的**系数矩阵**．考虑到常数项，方程组（4）还给出另一个$m\times(n+1)$级矩阵

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

称为方程组（4）的**增广矩阵**，矩阵中纵断续线右侧元素为方程组的常数项.

矩阵的例子：

一个1×1级矩阵

$$A=(a)=a$$

是一个数，其中，a是任一数.

如下是一个2×2级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

如下是一个1×4级矩阵：

$$A=(1,\quad 0,\quad -2,\quad \frac{1}{2})$$

如下是一个4×1级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如下是一个2×3级矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

而给定一个四元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \qquad\quad +x_4=2 \\ \qquad -x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_1 \qquad\quad -3x_3-3x_4=3 \end{cases}$$

则其系数矩阵和增广矩阵分别为：

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

由一个线性方程组写出对应的矩阵时必须注意：一方程中某变元未出现，即其系数为 0，从而系数矩阵和增广矩阵中对应位置上的元素为 0.

给定一个 $m\times(n+1)$ 级矩阵 B，也可惟一地写出以 B 为增广矩阵，关于变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 且由 m 个方程构成的的线性方程组. 例如，给定矩阵

$$B=\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

则以 B 为增广矩阵的线性方程组为：

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \qquad\quad -x_4=0 \\ \quad -3x_2 \qquad\quad +2x_4=-1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4=2. \end{cases}$$

§1.3 高斯消元法与矩阵的初等行变换

一、高斯（Gauss）消元法

现在考虑如下的两个线性方程组：

$$
\text{(a)}\quad \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -x-3y+5z=3 \\ 2x+4y-5z=-1 \\ x+y=2 \end{cases}
\qquad\qquad
\text{(b)}\quad \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ -y+2z=7 \\ z=-9 \\ 0=0. \end{cases}
$$

读者将会知道，方程组（a）可同解地化为（b）．明显地，方程组（b）更容易求解：从第三个方程得 $z=-9$，将其代入第二个方程得 $y=-25$，再将 $y=-25$，$z=-9$ 代入第一个方程得到 $x=27$．即此方程组有惟一的解：$(27,\ -25,\ -9)$．方程组（b）称为**阶梯形方程组**.

一般地，一个 n 元线性方程组如满足如下条件则称为阶梯形方程组.

（i） 如方程组中某一方程的各项系数全为零，则它下方的所有方程（如有）的各项系数全为零；

（ii） 如方程组中某一方程的各项系数不全为零，并且第一个不为零的项是第 i 项，则此方程下方的所有方程（如存在）的前 i 项的系数全为零.

例如，如下的方程组均是阶梯形的.

$$\text{(c)}\begin{cases}2x+2y+z=0\\ z=-3\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}\qquad \text{(d)}\begin{cases}-3x+y=2\\ 3z=-7\\ 0=3\end{cases}$$

$$\text{(e)}\begin{cases}5x_1-2x_2-3x_4=7\\ 2x_3+5x_4=-2\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}\qquad \text{(f)}\begin{cases}x_1-2x_2-x_3+x_4=-1\\ x_2+3x_4=2\\ x_3-5x_4=0\\ x_4=-5\end{cases}$$

解线性方程组的Gauss消元法就是要对给定的线性方程组施行三种所谓的初等变换，将其变换成一个同解的阶梯形方程组，从而达到求解的目的．我们先考察如下的一个例子．

将方程组

$$\begin{cases}2x_2+2x_3=1\\ 2x_1-2x_2=-1\\ 2x_1-2x_3=2\\ 4x_1-2x_2-2x_3=1\end{cases}\tag{6}$$

依次作如下的变形：将（6）中前两个方程位置互换，得

$$\begin{cases}2x_1-2x_2=-1\\ 2x_2+2x_3=1\\ 2x_1-2x_3=2\\ 4x_1-2x_2-2x_3=1\end{cases}\tag{7}$$

将（7）中第一个方程的 -1 倍和 -2 倍分别加到（7）中第三个和第四个方程上，得