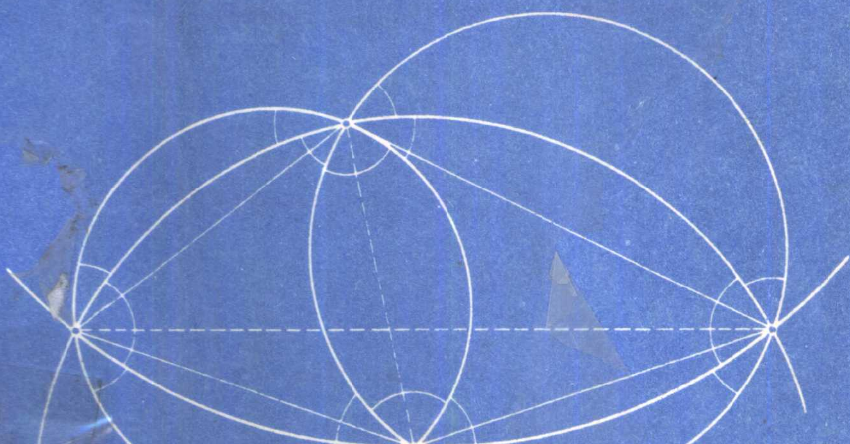
匈牙利數學問題詳解

第一冊

譯者 王昌銳



徐氏基金會出版

匈牙利數學
問題詳解

第一册

譯者：王昌銳

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第1347號

匈牙利數學
問題詳解
第 一 册

中華民國五十九年 三 月 廿 日初版

出版者 徐氏基金會出版部
台北市郵政信箱3261號
香港郵政信箱1284號
發行人 林 碧 鏗
台北郵政信箱3261號
譯 者 王 昌 銳
台灣省立高雄工業專科學校教授
印刷者 長德印刷有限公司
台北市迪化街一段二四〇號
電話：五一三四二八・五五六三六一

定 價 新台幣 二十五元
港 幣 四 元

改訂為基價1.30

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資，科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際兹太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂産生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要愼密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册） (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册） (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册） (Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册） (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯序

競賽求勝，人之天性。於今日優勝劣敗，物競天擇之科學時代，國與國間，人與人間，事與事間，物與物間……，無時無刻，不在殫精竭慮，運用智慧，以求競勝。所以關於體能方面，有運動會以事競技；關乎冒險犯難，有賽車，賽船，賽跳傘，……；關於商品，有各種展覽會，博覽會；亦無非爭奇鬪異，寓競賽之實意；而於科學藝術，亦莫不然。核能競賽，太空競賽，已爲今日最突出之競賽活動。至於數學競賽，則以歐洲之匈牙利，最爲馳名。

匈牙利爲歐洲小國，一次大戰以前，人口一千九百萬，目前，約一千萬左右。其所舉辦之一年一度的依阿特沃司（Eötvös）基本數學競賽，自1894年以來，頗具成效，對該國中等學校學生，頗富於鼓舞作用，從而數學興趣濃厚，研究熱情高張。歷年參加競賽之優勝人員，許多成爲國際馳名之士及有數的科學家。如菲查（L. Fejér），卡門（T vonkárman）柯尼格（D. König），來茲（M. Riesz），斯柴歌（G. Szego），雷多（T. Radö）特拉（E. Teller）等是。

本書係輯自1894—1928年間，依阿特沃司數學測驗題目，每年三題，分二冊印行。所含題材，係運用簡單概念，而漸達數學深處，以逐漸沉潛於數學範疇之中，頗得由淺入勝之義。書之編排，先提出表列式之逐年題目及要求作業之解答內容，任由讀者，憑其數學能力，自行解答，如覺力有未逮，即可參閱書中解答全文，以明究竟。每題解答，可能多過一或二個以上，均逐一作出，並附詳細之註釋及相關之定律，定理，法則，公式，圖解……，使讀者一覽之餘，便知其然，亦知其所以然。誠爲學習數學，磨練解題技術，激發數學興趣，誘導邏輯思考之最佳讀物。頗値得推介於我國青年及學人，以建立數學風氣，促進數學研究。所以，本書可作爲一種教學參考書讀，亦可作爲一種數學教材讀，因其註解內容，廣泛詳明，實不亞於一般教材內容也。

本書之譯，係響應徐氏基金會廣譯新書，造福學子之號召。書中譯名，力求通俗易懂，編排敘述，力存其眞，以保原書面目。譯稿多勞吾妻蔣君英女士，協助整理，深致謝意。

中華民國五十八年十二月廿二日

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家所撰一系列書刊之一，其目的在求確立多數中等以上學校學生及社會人士，有興趣而可領會之某類重要數學觀念•新數學文庫之大部內容，包含常不爲中學課程所容納之題材，而且難易相殊，卽使同一書內有的部份，卽比其他部份，需要較高程度之集中心志•由是，讀者須具相當技能學識，以瞭解此等書籍之大部內容，並須作明智之努力。

如讀者已往，僅於教室作業中遭逢數學，則應熟記於心，數學書籍不能快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，卽可瞭解書中所有內容，而應很自然的越過複雜部份，以後再回來讀，因後續之敍述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉題材之章節，當可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，爲"做"數學•各書均含習題，有些習題，且需縝密思考，奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，如此，數學對之，將變爲更富意義。

對著者及編者而言，此爲新的嘗試•願對協助本文庫各書籌印之許多中學師生，表示由衷謝意•編者頗有興趣於本文庫各書之反應意見，希望讀者書面寄給紐約大學，新數學文庫編輯委員會（Editorial Committe of New Mathematical Library）。

原編者

匈牙利版原序

此等測驗，首於1894年，由匈牙利數學物理學會舉辦，以祝賀該會創辦人兼主席，名物理學家依阿特沃司（Baron Loránd Eötvos），於該年就任教育部長。爲誌勿忘，測驗於每年秋季舉行，以適應該年度應屆中學畢業學生。測驗者於監督下，於教室作業；會方選優卷二，其獎—第一及第二依阿特沃司獎—於該學會下一會期，由主席親自頒授予優勝者。

本卷，發行於依氏逝世十週年紀念之日，包含前所舉辦之測驗。而利用優勝者之答案，常非一般學生所求出者……。

優勝者姓名，均曾列舉，其考卷曾全部披露於該會雜誌"Matematikai és Fizikai Lapok"中；然此處解答，已予更改，以應本書之敎育性目標。

有些提供定理定義及證明之註釋，已用於解答，其他用於指出問題與著名學術結果間連繫，有時能提供完整題材要旨；其他，徒給予一般定理之說明即是……。

有少許預備條件。凡已學習解二次方程式，及知乎平面幾何者，即能解答許多問題。如其亦知乎三角學，即能解答大部份問題。故此處只需匈牙利中學從二年所教題材之很少部份，以致較年青之學生，由書即能容易學習。

然而，此書非僅爲學生及教師而作。任何成年人，凡對數學保有興趣者，亦能求得有價值之進益。而將見知，其基本智能，雖限制進入中學，而能作出多少？

讀者究應如何使用本書？一言以蔽之：不要浮躁！具備高度興趣及毅力，任人皆將求出自以爲適合之最佳途徑，由本書所含各種題材中，獲致進益……。

柯 施 克

József Kürschak

1929年4月9日於布達配斯特（Budapest）.

柯施克所編纂之"數學測驗問題"一書，原刊於 1929 年。第一版很快銷售一空，而教育部同意再版，吾人爲求對柯氏目標所有貢獻，乃欣然肩此重任。本卷即將後隨以包含舉辦測驗以來之同樣內容的另一本書。

新版需要某些修改。可是，柯氏途徑，仍予保留，特別是其適應廣大讀者水準之卓見。吾人處處討論斯見，其有修改，亦徒適應今日中學課程而已。例如，增加排列，二項式定理，半角公式，等等。亦增加少數註解。包括某些似乎處爲簡單或巧妙之新解法，故較第一版言，參與競賽者之作業，亦略有變化……。

爲便於掌握，亦作有少許技術上之修改。由是，於提供解答以前，重述問題，並統一標誌及其他圖形之修正與增加……。

誠懇希望本書，能對大衆，有所進益。

海約司（György Hajos）
紐可姆（Gyula Neukomm）
蘇南尼（János Surányi）

1955年九月，於布達配斯特。

英文版序

近年以來，對各階層數學教學之改進，曾作許多努力。由是僅自然的，朝此方向，尋求進一步的鼓舞與改進，一如對發掘及發展可能存在於吾人社會中之潛伏才能新方法者然。學校數學研究群之出版計劃，即有如此目的。依阿特沃司競賽之匈牙利問題集之此翻譯，即爲此目標效力。自余爲現代數學年代，及一較古老而目睹此競賽之有趣發展第一階段者間，少數僅存者之一時，即被要求對此題集，寫篇英文的介紹詞。

依阿特沃司競賽，於 1894 年，組成於匈牙利；而於該一小國（註：第一次世界大戰以前，匈牙利有居民一千九百萬；目前約有一千萬人。）之數學發展方面，擔任要角。競賽係爲進入大學之一年級新生而設；問題及優勝者姓名之刊佈，由一開始，便爲一級興趣之公共大事。於競賽最初十年期內之優勝者中，如菲查（Fejer），卡門（Von Kármán），哈爾（Haar），李慈（Riesz）等人及其他人士，後來均成爲國際馳名之人。由於戰火及其他有關情況之短暫干擾，競賽仍實行至今；雖名稱已改，而競賽組織及範圍，近年來變得更爲廣大。然而，主要部份，仍保一樣。習題幾已完全採自中學題材（不包括微積分），爲一種基本特質，仍頗難解，且其解答，需要某種程度之觀察及創造才能。於書及註解之形成中，容許任何所予之協助。

數學爲一人類活動，幾如人心之不同者然。因此，似不可能設計一種一定而有效之方式與方法，以刺激數學於一廣大局面。而競賽觀念，似爲有力鼓勵，而有興趣於觀察，其果如是，而幾乎仍完全缺乏於德國學術生活圈子之中，雖然，數學於該國度，已往二百年來，非常流行。匈牙利之依阿特沃司競賽組織，係受英國及法國長時實行之先例所影響。特別要提及英國劍橋之"數學鼎"獎，及法國進入高等學校之會考問題。此等早期先例，亦引起某種激發普遍興趣爲首要之準備，以吸引最佳競賽員，並使之正常認識。於英國參與金鼎獎角逐人員，均經先期有系統之訓練；而於法國，公立學校亦提供會考準備之方便。於匈牙利，亦曾實施相似行動，發行一種以中學生爲主之雜誌，作爲另一自然鼓舞，以使學生參加競賽，賴以進入大學（註：依阿特沃司競賽及雜誌之良好記述，由雷多（Tibor Rado）所作論文："匈牙利之數學生活"中，已予提供。載於美國數學月刊卷 39（1932）PP. 85 - 90）

（於 P.87，6行，曾小有修正：1908年，有第一獎女優勝者）]。

該雜誌幾於競賽舉辦之同時，即1894年，即已創立。創辦者爲安乃里（Dániel Arany）；而由卓越之中學教師累茲（Lászlo Rácz）發行數年[註：其姓名與歷史同在，尙有第二理由：累茲爲紐曼（J. Von Neumann）之中學老師。載於美國數學協會雜誌，卷64（1958），PP.1-49；烏南（S.Ulam）所作"死者略傳"之P.2中，累茲姓名，拼法錯誤。]，以後由其他幾位優秀教師編印。作品一部份由教師提供，一部份由與大學有連繫之數學家提供，多爲年青有爲之士。雜誌作品以登載採自基本數學者爲主，許多爲三角形幾何，有些爲投影及圖形幾何，代數及偶而出現之數目理論，以後亦及於嚐試微積分。但最重要及最豐富之部份爲習題部份，佔據極大篇幅，而主以學生爲學生而作。最佳解答之納入者，併印作者姓名及學校名稱。其他投入正確解答者，亦列表刊佈。

我記得很清楚，當余投稿於該刊物之此一階段時（於1908及1912年間）；備熱切焦待該月刊之到來，而最關心者，爲觀看習題部份，幾乎是屛息以赴，且開始毫不遲延的把握習題不放。其他從事斯相同事務者之姓名，即很快得知，往往滿懷嫉妒而讀，爲何彼輩能成功的作出某些問題，而我不能完全成功的作到，或爲何彼等得到較吾所投寄者爲佳之解答（即較簡單，更優美，或較機智）？以下故事，或欠詳細正確但確可信：

"約在1940年時，地點爲法西斯匈牙利，一個不著名的勞工集中營，恰爲由半獨裁至納粹型式殘忍統治悲慘移轉之開始。此等集中營，多收容着猶太青年，被逼實行某些完全無用之工作。一年青人（現爲匈牙利領頭數學家之一）適在該營；兹且稱之爲X先生，彼於一重木負荷下喘息，當軍曹向其以不太恭維之姿態，向其怒吼時，乃向之宣示其最後姓名，監理官員，恰立其旁幾步之處，曰："你說，我有否聽淸，你名叫X"？"是的"爲其答覆。"你恰爲幾年以前，工作於中學月刊雜誌社之同一X"？"是的"，復爲其答。"你知道，你曾較我們任何人解出多而又多之困難問題，我們都很嫉妒你"。故事之結局，爲X先生於營中，接受更溫和待遇，甚至以後，與營中最高權威軍官，有數學方面接觸。"

此等青年對該月刊之深厚興趣，決定其許多生活。簡單而具基本特性之有趣問題，深植於心，而求明朗及完全解答之努力，給予彼等新的經驗，創造智慧冒險之滋味。由是，最後由以束縛，而不可變其爲一數學上之姤婦。仍留有特別研究所擔任之問題，是否爲數學，或物理，或工程；但此爲一切之後之第二椿事；主要大道，爲生活而設。可思考克瑙奈卡（Kronecker）

之格言，彼比較數學家與食蓮子者："嚐此果實滋味一次之人，從不能再言誓絕"。

而一最後觀察，應不忘任何有價值問題之解，如無艱苦作業，極罕能輕易獲致；此寧爲幾天，或幾週或幾月明智努力之結果。爲何年青的心，願作此高度努力？其解釋或爲天性嗜好某種價值，即，其明智努力及精神力量高度，高於物質利益，如斯價值，僅能爲長期環境及大衆精神文化發展結果，而難爲政府協助，甚或更加緊之數學訓練所能爲功。最有效方法，可包含於年青心胸中，灌輸以明智作業之美景，繼之以偉大而成功之心智努力的滿意感受。希望已予考驗，本書恰能助以致此，且表示一正確方向內之良好步驟。

斯柴歌（Gábor Szegö）

1961年二月於史坦福大學。

匈牙利數學問題詳解

目　　錄

問　　題

1894年　競　賽

1894/1.　證明數式

$$2x+3y \text{ 及 } 9x+5y$$

對x及y整值之相同集合，可用17相除。

1894/2.　已知一圓及兩點P及Q：作一內接直角三角形，以致其腿之一，走過已知點P，而他者經過已知點Q．對P與Q點何種位置，此作圖爲不可能？

1894/3.　三角形諸邊長度，組成一算術級數，其差爲d．三角形之面積爲t．求此三角形之諸邊與角．對$d=1$及$t=6$情況，解此問題。

1895年　競　賽

1895/1.　證明有$2(2^{n-1}-1)$種討論n卡片對兩人之方式．（參加人員可接受不等數目之卡片．）

1895/2.　已知一直角三角形ABC，於三角形內，作一點N，以使角NBC，NCA及NAB，均爲相等。

1895/3.　已知以下三角形資料：其外接圓之半徑R，其邊之一，長度爲c，而其他兩邊長度之比率爲a/b；決定此三角形所有三邊及角。

1896年 競 賽

1896／1. 證明

$$\log n \geqq k \cdot \log 2,$$

其中 n 爲一自然數，而 k 爲可除 n 之不同質數．

1896／2. 證明方程式

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=0$$

及

$$x^2-2xy+y^2-5x+5y=0$$

產生方程式

$$xy-12x+15y=0.$$

1896／3. 已予其高度之足，作一三角形．以三角形 X，其頂爲三角形 Y 高度足者諸邊長度，表示解三角形 Y 之諸邊長度。

1897年 競 賽

1897／1. 對一直角三角形諸角 α，β 及 γ，證明以下關係：

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\\&\quad+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)\\&\quad+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0.\end{aligned}$$

1897／2. 證明，如 α，β 及 γ，爲隨意三角形諸角，則

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4}.$$

1897／3. 令$ABCD$爲一矩形，且令M，N及P，Q，分別爲某直線e，與邊AB、CD及AD，BC（或其延長線）之交點．給予諸點M，N，P，Q，及邊AB之長度p，作一矩形．於何種條件之下，此問題可解，且有幾解？

1898年　競　賽

1898／1. 決定所有正整數n，以使2^n+1，可爲3除．

1898／2. 證明以下定理：如兩三角形，有一共角，則諸角正弦之和在其餘兩角差較小之三角形中，將爲較大。

在此定理之基礎上，決定該三角形形狀，以使其角之正弦和爲一極大

1898／3. 令A，B，C，D爲一直線e上四已知之點．作一方形，以致其平行邊之二（或其延長線），分別經過A及B，而其他兩邊（或其延長線），分別經過C及D．

1899年　競　賽

1899／1. 諸點A_0，A_1，A_2，A_3，A_4，將一單位圓（半徑爲1之圓）分成互相等部份．證明弦A_0A_1，A_0A_2滿足$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5$．

1899／2. 令x_1及x_2，爲方程式

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

之根．證明x_1^3及x_2^3爲

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$