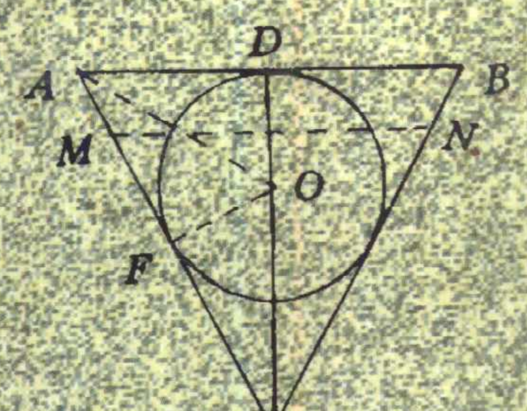
五年制高等职业教育数学教材

应用数学基础

阎章杭 李希洛 杨瑞蕊 主编

（下）



中国人民公安大学出版社

应用数学基础

下　册

主编　阎章杭　李希洛　杨瑞蕊

中国人民公安大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/阎章杭,李希洛,杨瑞蕊主编.-北京:中国人民公安大学出版社,2000.9
ISBN 7-81059-521-0/G·064

Ⅰ.应… Ⅱ.①阎…②李…③杨… Ⅲ.数学-高等教育:技术教育-教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 44806 号

应 用 数 学 基 础

YINGYONG SHUXUE JICHU

阎章杭　李希洛　杨瑞蕊　主编

出版发行:中国人民公安大学出版社
地　　址:北京市西城区木樨地南里
邮政编码:100038
印　　刷:固安县印刷厂印刷

版　　次:2000 年 9 月第 1 版
印　　次:2000 年 9 月第 1 次
印　　张:32
开　　本:787 毫米×1092 毫米　1/16
字　　数:816 千字
印　　数:0001 册~2000 册

ISBN 7-81059-521-0/G·064
定　　价:58.00 元(全二册)

本社图书出现印装质量问题,由发行部负责调换
联系电话:(010)83905728

E-mail:cpep@public.bta.net.cn

《应用数学基础》编委会

主　编　阎章杭　李希洛　杨瑞蕊

主　审　阎章杭　哈　斯

编　委　白水周　路世英　张建军　辛自力

牛普选　王燕燕　李希洛　李媛媛

拜云胜　张　杰　阎章杭　王　林

白景华　哈　斯

前　言

数学是五年制高等职业教育的一门必修的公共课,是学生提高文化素质和学习有关专业知识、专门技术的重要基础。

为了确保高等职业教育,培养的目标及教学质量,为了逐步构建适合高职教育公共数学课程的教材体系,探索五年制高职教育数学教材建设的新路子,新思想,开封大学会同洛阳大学,包头职业技术学院,开封教育学院等院校的教师和专家,经过一年多的反复酝酿和研究,几易其稿,编写了五年制高等职业教育数学课的教学大纲及试用教材——应用数学基础

在该套教材的编写过程中,我们以国家教育部关于五年制高职教育数学教学大纲为重要依据(但并没有严格按此大纲,不少地方,做了必要调整)来组织教学内容编写,同时又进一步结合当前职业教育发展的趋势及学校自身的状况,力争使教材更具有科学性、基础性和实用性。

本套教材共设三篇:第一篇:初等数学;第二篇:一元函数微积分;第三篇:技术数学。总学时为350学时左右。

在该套教材的编写中,我们努力遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则,突出五年一贯制及职业教育的特色,具体反映为:

1. 在初等数学与高等数学的教学中,除了应注意他们共性规律外,还应注意他们不同的规律。

在教材内容上,初等数学部分,此稿强调其基础性、实用性、系统性,注意与初中基础知识的衔接,对与现代生活和后续课程联系密切的内容,适当留有“接口”。

高等数学部分,比较强调综合素质和能力的培养,注重教材内容的应用性,注意专业课的结合。

2. 该套教材在保证基础,重视素质教育的前提下,能突破传统教材体系,精选内容、主次分明、删减枝节,注重应用,讲究实效。一些较繁的定理、公式及很明显的结论,有的只给出结果,有的以几何直观予以说明,所选的例题或习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的,删去单纯的技巧或是较难的题目,增加富有启发

性或为专业服务的应用性题目。

数学建模是培养学生综合运用数学知识，分析解决实际问题的一种手段，本书最后一章的“数学模型与数学建模简介”就是供有关专业选学的。

本套教材可供以初中为起点的五年制高等职业教育使用，稍作处理，也可供相应的中等职业技术教育使用。

该套教材由闫章杭总策划，负责组织实施。

主编：闫章杭，李希洛，杨瑞蕊。

主审：闫章杭，哈斯。

参加编写的人员有：

白水周(第一、二、廿三章)，路世英(第三、四章)，张建军(第五、十章)，辛自力(第六，七章)，牛普选(第八、九章)，王燕燕(第十一、廿二章)，李希洛(第十三章，第廿二章的三、四、五节)，李媛媛(第十四章)，拜云胜(第十五，十六章)，张杰(第十七，十八章)，闫章杭(第十九，廿五章)，王林(第廿章)，白景华(第廿一章，第廿二章一、二节)，哈斯(第廿四章)。

由于编者水平有限，时间仓促，不当之处在所难免，热忱希望广大读者批评指正。

在本书的编写和出版过程中，得到有关学校的领导、系部的领导和有关专家，以及公安大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的谢意。

编　者

2000 年 6 月

目　录

下　册

第二篇　一元函数微积分

第三篇　技术数学

第二篇　一元函数微积分

第十四章　函数、极限与连续

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心。而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具，因此本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题。

§14-1　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，都有确定的数值 y 与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切数时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的**值域**。当自变量取某一数值 x_0 时，函数 y 具有确定的对应值，则称函数在 x_0 处有定义。

如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 $y\in M$ 与之对应，那么称这种函数为**单值函数**，否则为**多值函数**。

本书所研究的函数若无特殊说明均指单值函数。

在函数定义中，并没有要求自变量变化时，其函数值一定要变，只要求对于每一个自变量 $x\in D$ 都有确定的 y 值与之对应，因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，即当 $x\in R$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C。我们称这样的函数为**常量函数**。

通过函数定义，我们可以发现，构成函数的两个重要因素：

(1)对应关系

(2)定义域

显然，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才认为是相同的。

例如，函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数。

又如，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数。

2. 函数的定义域

定义域是构成函数的重要因素之一，因此研究函数，就必须注意函数的定义域。在考虑实

际问题时,应根据问题的实际意义来确定定义域。例如,匀速直线运动的位移 $s=vt$,t 是时间,故只能取非负数。对于用数学式子表示的函数,其定义域由函数表达式本身来确定,即使运算有意义。如:

(1)函数中有分式,要求分母不能为零;

(2)函数中有根式,要求负数不能开偶次方根;

(3)函数中有对数式,要求真数必须大于零;

(4)函数中有三角和反三角函数式,要求符合它们的定义域;

(5)若函数式是上述各式的混合式,则应取各部分定义域的交集。

例 1 求下列函数的定义域

(1)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

(2)$y=\lg\dfrac{x-1}{x-2}$

(3)$y=\arcsin\dfrac{x+1}{3}+\sqrt{x+1}$

解 (1)$\because 4-x^2\neq 0 \qquad \therefore x\neq\pm 2$

又$\because x+2\geqslant 0 \qquad \therefore x\geqslant -2$

$\therefore$函数定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$

(2)$\because \dfrac{x-1}{x-2}>0$

$\therefore x>2$ 或 $x<1$

$\therefore$函数定义域为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

(3)$\because -1\leqslant\dfrac{x+1}{3}\leqslant 1$

$\therefore -3\leqslant x+1\leqslant 3$,即$-4\leqslant x\leqslant 2$

又$\because x+1\geqslant 0 \qquad \therefore x\geqslant -1$

$\therefore$函数的定义域为$[-1,2]$

3. 函数与函数值的记号

通常,y 是 x 的函数记为 $y=f(x)$,但若同一问题中,需要讨论 n 个不同的函数,就要使用不同的函数记号,例如,$F(x)$,$\varphi(x)$,$y(x)$……

函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0\in D$ 时,对应的函数值可以记为 $y_0=f(x_0)$。

例 2 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(2)$,$f(-2)$,$f(0)$,$f(a)$,$f(a+b)$。

解 $f(2)=0$;$f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$;$f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$;$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$;

$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$

4. 函数的表示法

表示函数的方法,最常用的有三种:

(1)公式法 如,$y=x^a$,$y=\sin x$ 等;

(2)表格法 如对数表,三角函数表等;

(3)图象法 用图象表示函数。

有时,我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示。

例如：函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数。当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$。它的图象如图 14·1 所示。

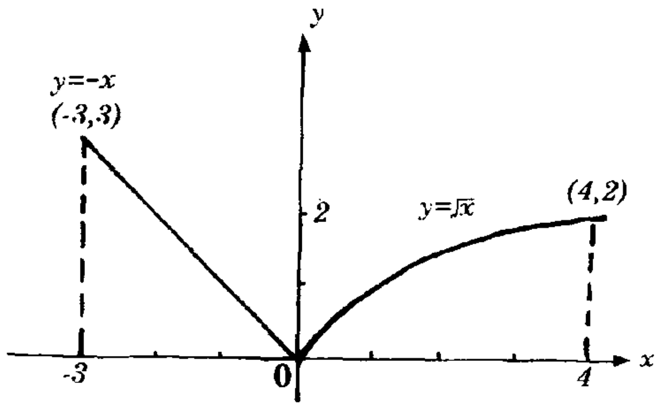


图 14·1

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**，即用几个式子合在一起表示一个函数。

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算。

例如，上述分段函数中 $f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-3)=-(-3)=3$。

二、函数的几种特性

1．函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；如果 $f(x)$的定义域关于原点对称，且对任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称为 $f(x)$为**偶函数**。如果函数既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$为**非奇偶函数**。

例如，函数 $y=\sin x$、$y=x^3$ 等都是奇函数；

又如，函数 $y=\cos x$、$y=x^2$ 等都是偶函数；

而函数 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇偶函数。

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称，如图 14·2 所示：

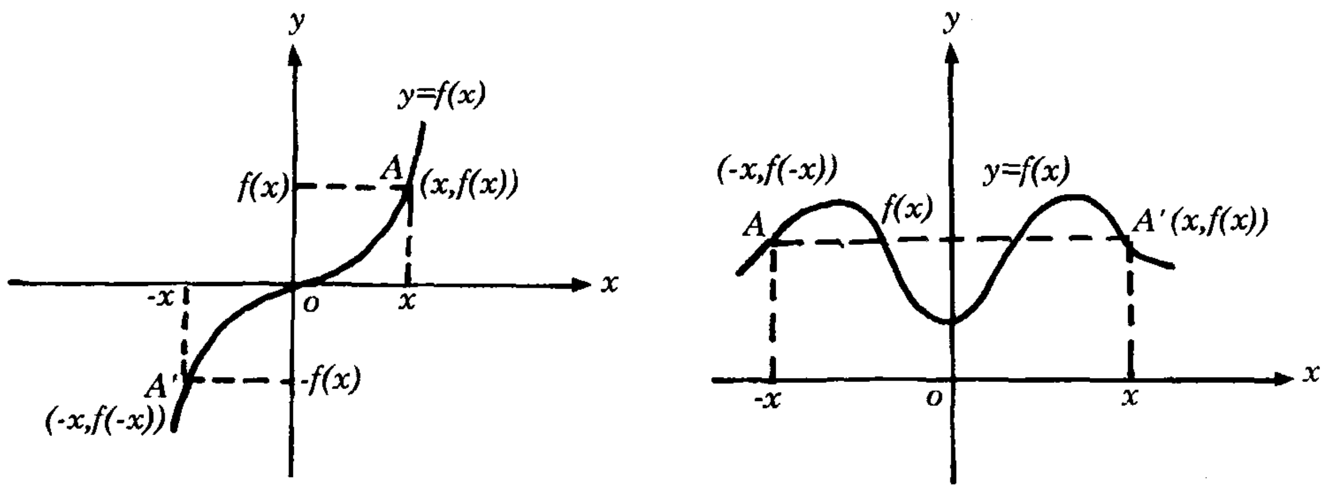


图 14·2

例 3 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性。

解 $\because f(-x)=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]$

$=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$
\begin{aligned}
&= \ln \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\
&= \ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1} \\
&= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

$\therefore f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数。

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内随着 x 的增大而增大(或减小),即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内单调增加(或单调减少)。在定义域内单调增加或单调减少的函数,我们统称为**单调函数**,其中(a,b)叫做函数 $f(x)$的单调增加(或单调减少)区间,也称**单调区间**。

单调增加(或单调减少)函数的图象沿 x 轴的正向上升(或下降)。

上述定义也适用于其它有限区间和无限区间的情形。

例如,由图 14·3 可知,函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的,而在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的,它在定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数。

又如,由图 14·4 可知,函数 $y=\log_a{}^x(a>1)$在定义域$(0,+\infty)$内单调增加;函数 $y=\log_a{}^x$ $(0<a<1)$在定义域$(0+\infty)$内是单调减少的,所以,它们在定义域$(0,+\infty)$内都是单调函数。

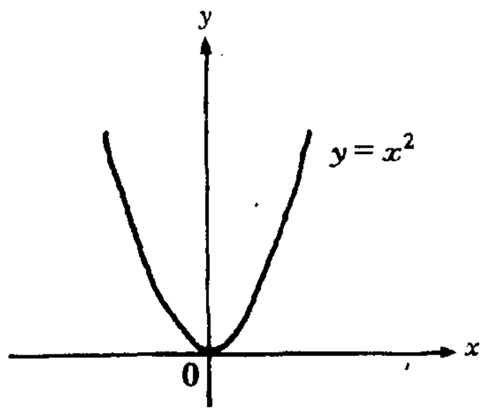


图 14·3

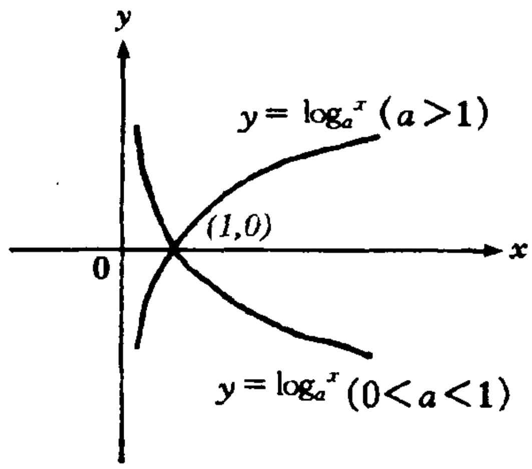


图 14·4

例 4 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$是在区间(0,1)内的单调减少的函数。

证明 在区间(0,1)内任取两点 x_1,x_2,设 $x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$。因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$$

所以,$f(x_1)>f(x_2)$

根据函数单调减少的定义,可知 $f(x)=\frac{1}{x}$是在区间(0,1)内的单调减少函数。

3. 函数的周期性

如果有不为零的实数 l 存在，使得 $f(x+l)=f(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域上恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**。l 是 $f(x)$ 的周期，显然 $2l$、$3l$、$\cdots nl$ 也是它的周期，通常所说的函数的周期是指最小正周期，记为 l。

一个以 l 为周期的函数，它的图象在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，有相同的形状，如图 14·5。

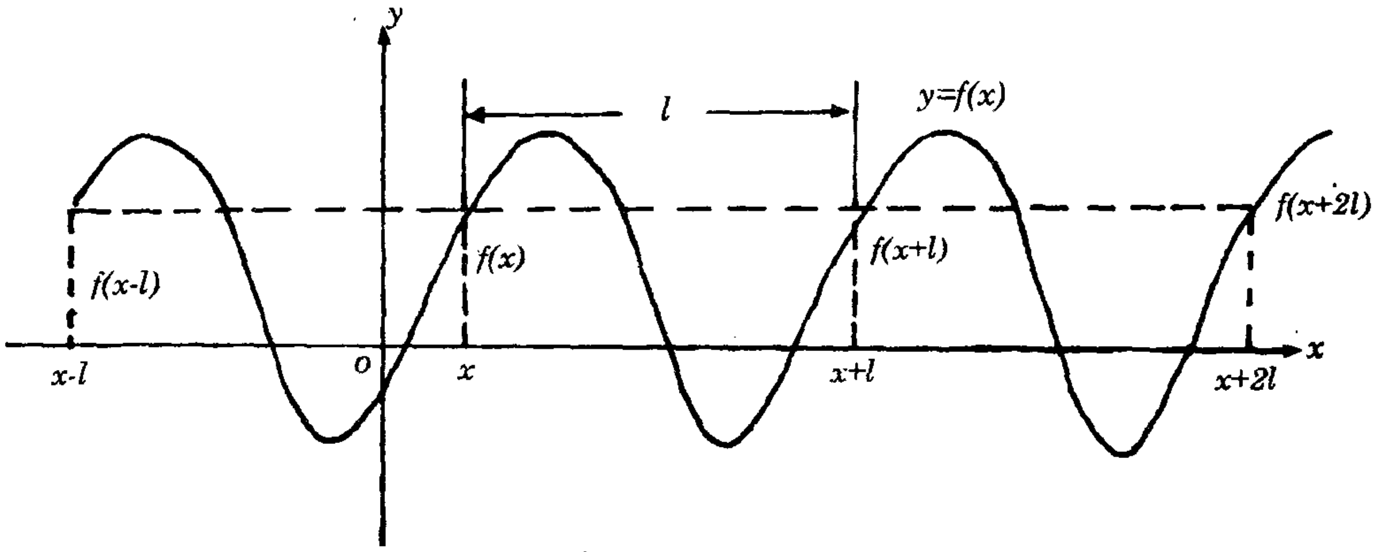


图 14·5

例如，函数 $\cos x$，$\sin x$ 以 2π 为周期，而 $A\sin(wx+\varphi)(w>0)$ 以 $\frac{2\pi}{w}$ 为周期。

4. 函数有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；如果不存在这样的数 M，是 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界。

上述定义也适用于闭区间和无穷区间。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in R$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立，这里 $M=1$。

又如，函数 $f(x)=\arctan x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于一切 $x\in R$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$ 都成立，这里 $M=\frac{\pi}{2}$

再如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$，内是无界的，因为对于区间 $(0,1)$ 内一切 x，不存在正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立。但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的，因为对于区间 $[1,2]$ 上的一切 x，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$（图 14·6）

显然，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是有界的，则它的图象在 (a,b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间（图 14·7）。

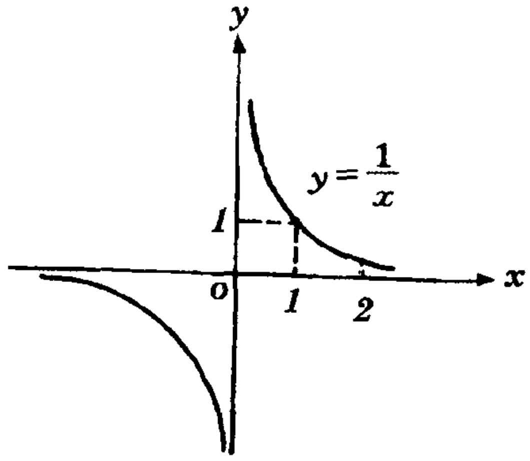


图 14·6

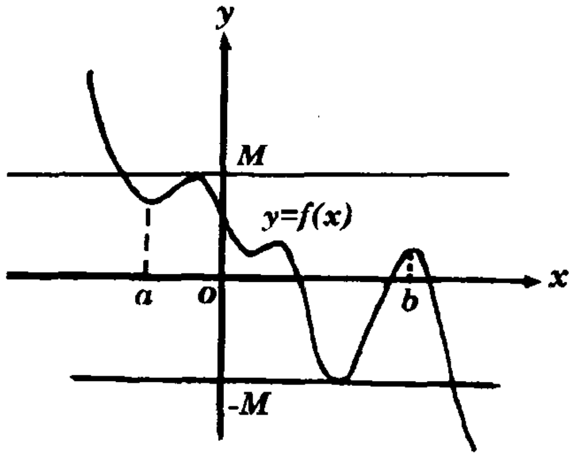


图 14·7

三、复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系往往是复杂的。

例如，设有边长为 1 的正方形金属薄片，受热后的膨胀，边长膨胀了 x，求受热膨胀以后的面积 y

由于面积 $y=(\text{边长 }u)^2$，而边长 $u=1+x$，因此 $y=u^2=(1+x)^2$

不难看出，这个函数的值不是直接由自变量 x 来确定的，是通过 $u=1+x$ 来确定的，也就是说对于每一个 x，经过中间变量 u，都有一个 y 的值与之对应，所以 y 是 x 的函数，而且这个函数可以看作是由函数 $u=x+1$ 与函数 $y=u^2$ 组合而成的。

定义 2 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的**复合函数**，其中 u 叫做**中间变量**。

但要注意，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域，应该取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则复合函数将失去意义。

例如，复合函数 $y=\lg u, u=x-1$。由于 $y=\lg u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 $u=x+1$ 的值域必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(1,+\infty)$ 内。

由此可知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应为函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集。

当然，我们也可以由两个以上的函数经过复合构成一个复合函数。例 $y=\lg u, u=\sin v$, $v=\frac{x}{2}$，则 $y=\lg\sin\frac{x}{2}$，其中 u、v 为中间变量。

下面举例分析复合函数的复合过程。正确熟练地掌握这个方法，有利于我们今后微积分的学习。

例 5 指出下列复合函数的复合过程

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=\arcsin(\ln x)$　　(4) $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$

解 (1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的。

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的。

(3) 函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的。

(4) 函数 $y=2\cos\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\cos u$、$u=\sqrt{v}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的。

四、反函数

定义 3 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，则当变量 y 在 M 中每取一个值时，都可以从关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，那么所确定的 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D。

习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$。

函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

例 6 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数，并写出它的定义域。

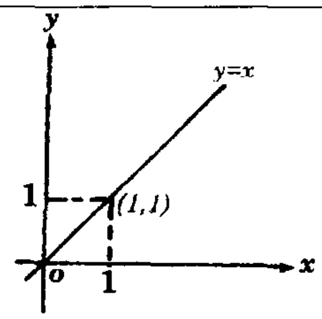
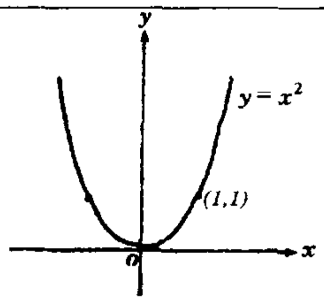
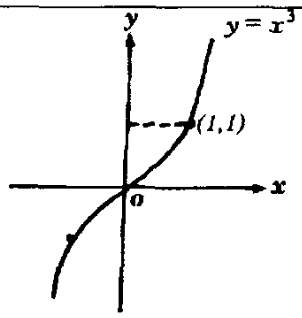
解 因为
$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$e^x-e^{-x}=2y$$
通分得
$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$
所以
$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$
由于 $e^x>0$，即 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$

于是
$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
所以所求反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域为 R。

五、初等函数

我们学过的幂函数 $y=x^a(a\in R)$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。其性质见表 14－3。

表 14－3

	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty+\infty)$ $y\in(-\infty+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty+\infty)$ $y\in(-\infty+\infty)$		奇函数 单调增加