3+X

黄冈高分解密

HUANGGANG GAOFEN JIEMI

数学

S H U X U E

主编◎项中心 陈体国

东华大学出版社

3 + X黄冈高分解密

数　　学

主　编　　项中心　　陈体国

编　委　　项中心　　陈体国　　赵正良

易汉桃　　乐冬华　　梅寿桃

吴克明　　刘辉弘　　石河富

吕元炎　　张　帆　　武　冰

陈晓峰　　邢　薇　　吴建东

余胜利　　陈秀英　　谢忠炳

宋新春　　李　锋

东华大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

3+X黄冈高分解密·高中数学/项中心,陈体国编著·—上海:东华大学出版社,2002.10
ISBN 7-81038-514-3

Ⅰ.3… Ⅱ.①项…②陈… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第079064号

四川新华出版公司策划制作

总发行人　王　庆
总策划人　陈大利
总监制人　文　龙
执行编辑　王瑗娟
责任编辑　紫　仪
封面设计　何东琳

3+X黄冈高分解密·高中数学

项中心　陈体国　主编

东华大学出版社出版
(上海市延安西路1882号　邮政编码　200051)
新华书店上海发行所发行　　四川新华印刷厂印刷
2002年11月第1版　　2002年11月第1次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:12.5　字数:340千字
印数:0001-10000
ISBN 7-81038-514-3/G·22
定　价　15.00元

目　录

第一编　高考命题特点、变化趋势和对中学数学教学的启示

一、命题特点

2000年、2001年和2002年高考命题都较好地贯彻了《考试说明》的各项规定，试题保持基本稳定，试题在知识内容及比例上、各类题型及比例上、总体难度及难度比例上、文、理卷适当的区别及区别比例上……都保持了相对地稳定。在相对稳定的基础上，2002年选择题和填空题，总体难度要比2001年简单些，而后面的6道主观题难度要高于2001年，但难度是分解到各题目中去的，不像2001年的20题和22题那样难度集中。近三年试题体现以下几个主要特点：

1. 注重基础，着意提高

近年的高考试题给我们一个启示是：漫游题海无出路，夯实基础是正道。如2001年卷共计9道的几何试题中，大多数都是常规试题，无偏题、怪题。试题着重考查高中几何的基础知识，但并不刻意追求知识的覆盖面。立体几何仍以棱柱、锥体为载体着重考查线线、线面、面面的位置关系及多面体与旋转体的侧面积、体积等。在9道几何试题中，其中就有6道试题可在课本中找到其原形。试卷的第(2)、(7)、(19)题分别为解析几何课本P.69习题五的第一题的第(4)小题、P.80第4题的第(3)小题、P.102习题八的第(13)题的变形；试题的第(13)题为立体几何课本P.84习题十的第(10)题的变式题，而第(11)、(13)、(17)题都可利用立体几何课本P.106例1的结论来迅速解决。

又如选择题(1)，只需了解三角函数值在各个象限的符号即可，题(6)只要知道反余弦函数定义以及函数与反函数定义域和值域的关系可选出答案，题(10)借用单调性的趋势图马上得出结果；再看解答题(20)，是去年考生认为最难的题目，大部分同学不敢问津，事实上，若知识扎实，马上可写出排列数公式与二项式定理。分步可得到总分的一半。本题细细分析起来，貌似题在书外，实则根在书内，让人耳目一新，有很高的欣赏品味例如重视课本知识间的内在联系，运用知识的发生发展过程设置情境：$P_n^i=C_n^i\cdot i!$，使(Ⅰ)易于转化为(Ⅱ)；强调知识的应用功能，如课本例题真分数的一个性质($a,b,m\in R^+$，且$a<b$，有$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$)可用于此题(Ⅰ)的论证；再就是其(Ⅱ)的潜在发现有课本题；分别求当$n=1,2,3,4$时，$(1+\frac{1}{n})^n$的值的影子，其(Ⅱ)的论证过程和自然对数底的来源$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$的论证；先证数列$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$递增完全类似(再证有界)。另外，对于(Ⅱ)也可转化为函数，运用导数使其获证。综上说明了此题既注重紧扣课本立意，又注重初等数学与高等数学的自然衔接，是一个有丰富内涵、着意提高、有很好选拔功能的精品。

2002年的选择题、填空题起点较低。如理科卷中16道题，无论涉及的知识内容，还是题目设问方式，既基础又常规。理科客观试题没采用以往的多个命题构建组合命题或开放式命题的试题，相对文字长度缩减了，学生得分绝对比率势必可观。

2002年试题没有偏题、怪题，比如2002年理科试卷的18题，图形考生都见过，只不过是命题的方式变化了一下，但2002年试题难度有起伏，小题比去年容易，但解答题总体难度要高于去年，意在提高。如理科最后一题，第一问是搭个解题的台阶，要求考生熟悉一下违椎思想，而第二问分两小问，主要考查学生推理分析，此题得分率估计比较低，应是全卷最难的一题。又如文科第20题。此题对文科考生而言较难，要做好这两道题需要有扎实的基本功和基础知识，还要熟练掌握分类讨论、数形结合等重要数学思想；第22题，要求学生设计一种拼剪方法，是一道富有创意、十分精彩的试题，它有利于培养学生空间想像能力，使学生的主观能动性和创造性得到充分的发挥，体现了至今素质教育正确方向。

2. 新旧内容有机结合，突出新增内容的数学价值和应用功能

2000年新课程卷中有些题目属于新教材与旧教材的结合部，凡涉及此类内容，命题时都采用新、旧结合，以新带旧或以新方法解决的办法进行处理。如新课程卷理科第21题、文科第20题是属旧教材的内容，在新课程卷中，在答案中给出了应用导数处理的方法，使问题的解决更快捷便利。在第22题中，将在原来试卷中用定比分点叙述的问题，改用向量语言叙述，解题时也用向量的方法处理；又如2001年

试题(20),对于(Ⅱ)也可转化为函数,运用导数使其获证。所有这些努力都是力图促进新旧知识的有机结合,到达知识应用的融会贯通。2002 年试题中也如此。

3.文理区别增大,应用题文、理分设,2002 年文科的应用题目却较多

2000 年试题中,在选择题的 12 个小题中有 9 道相同题,2 道相异题及 1 道"姊妹题":填空题文、理完全相同;在 6 道解答题中,有 1 道相同题,一道相异题,而有 4 道"姊妹题"。因为,文、理科知识内容差异,必须有相异题型,为了适当降低文科试题的难度,采取了"姊妹题"的处理方式,"姊妹题"文、理在考查知识、方法、能力基本相同的条件下,适当减少设问来降低要求层次。在文、理科试卷中相同试题共 14 道,占总数的 64%,"姊妹题"5 道占总数的 23%,两项合计占总数的 87%。因此可见,对文科考生在总的要求方面并未有太大的降低。但 2001 年和 2002 年的文理区别部分无论是题目数量还是分数均逐年增大,2002 年文、理试卷选择题有 2 道不一样,填空题有 3 道题不一样,解答题有 5 道题不一样。也就是说,共有 10 道题不一样,理科难度明显高于文科,但文科的应用题目却较多。另外,自从 1994 年高考加入应用题以来,文理科的应用题都是相同的,而近两年的应用题的命制,进行文、理分设,充分考虑到了文、理考生的现实和未来的差别。

4.稳中求改、锐意创新

命题立意新,情境新,思维价值高。2000 年题把日常生活中极普通的种植、上市、销售、利润、物价诸因素融入"西红柿"之中,情境贴近生活,通过图像给出各元素关系,形象、具体、深刻、内涵丰富,既有生活又含生产;既有种植又有销售;既有支出(成本)又有收入(利润)。2001 年试题中,(11)题借助学生熟悉的中国民房传统结构为背景,考查了二面角等有关知识,其所给图形的生活化,让人颇感亲切。此题的解答更富有传统色彩,除了可直接用面积射影公式 $S_{射影}=S\cdot\cos\alpha$ 直接计算后找出答案外,也可估计出答案。2001 年试题中(12)题是一道关于网络传递信息的时代信息题,材料长,阅读量大,但筛选后聚集在每一条线路中取最小值即可。它无需考生动用复杂的数学知识,只要理解题意后题目不难解决。2002 年文科第 22 题非常独特,是个创新题型,主要考查空间想像、动手(拼图)能力,同时还要用到类比、迁移的思想方法,着重考查学生的创新能力,第 3 问附加题的加分,这是以前从未有过的,给学生以自由发挥的空间,对动手能力较强的同学提供了展示自我的舞台。2002 年试题中,不少题目入口宽,策略不同所花时间有较大区别,比如理科第 6 题,$\sqrt{2}M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in Z\}$,$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in Z\}$。如果采用剩余类分类思想,思维繁琐;如果变 $\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$,变 $\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}$,只需注意到 $2k+1$ 为奇数,而 $k+2$ 仍为整数即可快速作答。理科第 8 题圆锥和半球有公共底面,即知两者"半径"相同,题设"如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等"中"恰好"两字似乎多余。理科第 12 题只要联想到空间模型,注意到"有 2 个面不相邻",既可从相对平行的平面入手正面构造选法,也可从反面入手剔除 8 个角上 3 个平面相邻的特殊情形。理科第 16 题,如果观察、联想到 $f(x)+f(\frac{1}{x})=1$ 便迎刃而解。

又如 2001 年第(10)题,考查函数的单调性,一反传统的一提及函数单调性,就势必涉及到单调函数的定义域或函数的有关性质,而是改为可用语言进行定性非定量的刻画(如对②,$g(x)$ 是单调递减,则 $-g(x)$ 单调递增,又 $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)+[-g(x)]$ 也单调递增,故②正确,类似地,可以判断出③也正确),表明了当代浓厚的创新意识。又如 2000 年文、理科试卷共有的第 18 题,涉及旋转体中重要的基本概念和有一定难度的计算技能,立意新颖,情境新颖,叙述简洁,形象直观,富于新意。2001 年理科第(22)题,虽然考生对其背景并不陌生,但三个问题的设计颇有新意。特别是问题(Ⅲ),可谓独具匠心,初看此题,有超纲之嫌,但细研其解答过程,却合情合理(见标准答案),巧妙地把 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}(\ln a_n)$ 化归为学生所熟悉的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln a$。这是一个创新的过程,也是区分更高层次人才的一个关口。此外,选择题(8)、(11),填空题(15)也都很有新意。理科第(20)题是两个不等式的证明题,与以往考过的不等式证明不同的是,知识内容上有新突破。这两个不等式一个是关于排列数不等式,一个是二项式不等式,这是前所未有的,多数考生反映本题难度太大,甚至有相当一部分考生连题意都没搞懂。一方面本题的确难度不小,另一方面与复习时对有关内容重视不够,及能力培养不到位有直接关系。

又如 2002 年 18 题,是道立体几何题,是一个难度适中的题,着重基础知识的考查,题目的新颖之处在于对近几年高考考查立体几何有所突破,异面直线上求两点间的距离的最小值,转化为求二次函数最小值问题,也是一个平时训练的重点与常规题,此

题的第一问，是求异面直线上两点间的距离要构造直角三角形即可达到目的，可在 AB 上取点 G 使 $\frac{BG}{GA}=\frac{BN}{NF}$，则 $GN\parallel BE$，$MC\parallel BC$，所以$\angle MGN=90°$。又 $|MG|=2-\frac{2-\sqrt{2}a}{2}$，$|NG|=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，从而 $|MN|^2=|MG|^2+|NG|^2=a^2-\sqrt{2}a+1=(a-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2})$，再进一步求值。

第二问：转化为给定区间上求最值的问题。

第三问：在前提 MN 长最小时求面 MNA 与面 MNB 所成二面角的大小，要先求证$\triangle AMN$ 与$\triangle BMN$ 为正三角形，取 MN 的中点 H，则可求证$\angle AHB$ 为所求二面角。

5.开放探索，考查探究精神

开放性试题是考查学生能力与素质，特别是考查学生探究精神的良好题型，2000 年立体几何证明题，平行六面体的侧棱与底面边长的比值为多少时，才能有体的对角线垂直于特定面的结论。考生需大胆利用想像空间，综合元素关系，探索地给出假设，并探究地给出证明。2000 年文科第 20 题，理科第 19 题是"姊妹题"，第Ⅱ问，讨论函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax(x>0)$的单调性，理科未给出 a 的确切范围，文、理科都未给出单调递增，还是递减，不但要寻求条件，还要寻求结论，应该说，此题比立体几何题更加开放，探究精神更强些。

遵循教学大纲，又不拘泥于教学大纲，这一高考改革原则，更多地反映在考查能力与素质上，理科上述函数单调性证明题中，当 $0<a<1$ 时 $f(0)=f(\frac{2a}{1-a^2})=1$，而 $0<\frac{2a}{1-a^2}$，所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上不是单调函数。这一概念(不是单调函数)及证明方法，未见于教学大纲及课本之中，应该说这种证明方法，源于教材，又高于教材，是开放性的又一体现。2000 年文、理科试卷第 16 题是相同题，是有关射影的判断题。未涉及任何量及量的计算问题，是定性分析题，在图中利用某些特殊点射影性质，排除一些似是而非的结论；本题题型新颖，方法开放，探究性强。2001 年理科(22)题由 $f(\frac{1}{2})$、$f(\frac{1}{4})$的求解过程可以猜想 $f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}$从而为第Ⅲ问的解决开辟了道路，体现探求精神。

又如 2002 年文科第 16 题，这是一道开放性试题，着重考查了学生的思维能力。

6.考查能力，重视数学思想和方法

近年来，命题中很重视知识的整体性和综合性，在知识网络的交会点上设计试题，之所以这样做是倡导"考生在理解的基础上牢固地掌握必要的基本知识、技能，对所学内容能融会贯通，理论联系实际，防止单纯机械记忆。"2000 年文、理科的第 22 题是以平面几何(梯形)为背景，以图形变化为依托，以运动轨迹(曲线)为情境，以代数运算为方法，以集合区间为目标，在各科知识的网络交会点上设计此题，在知识的深度、广度上都达到了一定的水平。2000 年文、理科试题中函数单调性的考题，是把变量数学——函数与定量数学——方程、不等式联系起来的实例，实际上，考生深刻地体会到方程、不等式与函数之间的关系。即使在客观性试题中，也不乏这样的实例。

近两年试题对数学思想和方法的考查更加明确，自觉性更加增强，运用更加成熟。这些在试卷中都可以找到实例。解答 2000 年试题中的第 5 题时，就要利用分析、比较、特殊化的方法，只要取靠近原点左右的两个值，甚至一个特殊值代入函数，就能判断真伪。第 12 题"过抛物线 $y=ax^2(a>0)$的焦点 F 作一直线交抛物线于P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则……"一般化时，由抛物线定义，设出 P、Q 坐标，用定比分点坐标公式，通过常规计算得解。特殊化，正焦弦状态解法很简捷，极限化时，更加简明。一般化——特殊化——极限化，应该说后者已兼有辩证思维意义。2001 年理科第(22)题是继去年第(19)题后的又一道难得的优秀函数综合题，形式简洁明了，内涵丰富隽永。从内容上看，本题涉及函数的对称性(包括奇偶性)、周期性，数列和数列的极限等基本知识，并把这些知识统一于一题之内；从解答上看，本题深刻地考查了考生的思维能力，如要求 $f(\frac{1}{2})$，考生不难通过对已知中的 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$进行赋值而得到 $f(1)=[f(\frac{1}{2})]$，进而得到 $f(\frac{1}{2})=\pm a^{\frac{1}{2}}$，这里用到了特殊与一般的思想，往下考生自然会想到正负号能否确定的问题，由 $f(1)=[f(\frac{1}{2})]^2$ 的变形过程可以得到 $f(x)=[f(\frac{x}{2})]^2\geqslant 0$。这里考查了思维的批判性和深刻性。由$f(\frac{1}{2})$、$f(\frac{1}{4})$的求解过程可以猜想到 $f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}$，从而为第(Ⅲ)问的解决开辟了道路，这里考查了思维敏捷性和广阔性，因此本题有很高的思维价值。本题突出体现了数学思想方法在探索问题解决

问题中的作用，解答过程除综合运用多种数学知识外，更需要灵活运用数形结合、函数与方程、等价转化的思想，以及赋值法、迭代法、综合法、分析法等数学方法。

分类讨论的思想方法是自然科学乃至社会科学研究的基本方法，如 2000 年理科第 6、10、13、14、16、19 等题都采用了分类讨论的方法。

考查运算能力、空间想像能力、逻辑思维能力以及分析和解决问题的能力，是数学学科本身特点决定的、公认与共识的能力，考查能力以逻辑思维能力为核心。运算能力是思维能力与运算技能的结合，它不仅包括数的计算，还包括式的运算；不仅包括精算，还包括近似计算与估算。以含字母的式的运算为主，兼顾对基础和逻辑推理的考查，2000 年考卷第 6 题是税率题，可以说是在逻辑推理指导下进行的。

空间想像能力是对空间形式的观察、分析抽象的能力，图形的处理与图形的变换都要与推理相结合。2000 年文、理科第 19 题是立体几何题，它给考生以广阔的想像空间。通过空间图形的变换，垂直关系的条件与证明思路，可清晰地看到。这种空间想像力，如与代数逻辑推理能力有机结合，更能显示出考生思维层次的差异。如 2000 年广东卷第 18 题：

设 $\{a_n\}$ 为等比数列，$T_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$，已知 $T_1 = 1, T_2 = 4$。

Ⅰ. 求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比；

Ⅱ. 求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式。

第Ⅰ问很容易得到。第Ⅱ问，考查教材中求等比数列前 n 项和的通法——错位相减法推算出答案。

2002 年整张试卷主要考查以下数学思想：分类讨论思想——如理科的 19 题、21 题、22 题等；数形结合思想——如文科 1、4、5、7、10、11、14、16、17、20、21 等题；函数方程思想——如文科的 4、6、9、10 等题；转化思想——如立体几何的题目就和代数进行转化。又如理科 21 题是一道函数题，本大题很有区分度，主要看学生的基本功是否扎实。

二、变化趋势

近年来，高考连续大规模扩招，2002 年高校计划招生 260 万，本科生 130 万，专科生 120 万，高考考生的入学率已近 60%，这与 1998 年以前入学率只有 30%的形势大不一样。根据基础教育的要求，在不影响高校整体录取的前提下，为有助于中学教学，试题难度将会相应进行调整。

高考命题仍然是贯彻高考内容改革的指导思想，总体上更加注重对考生能力和素质的考查：命题范围遵循中学教学大纲，但不拘泥于教学大纲；试题设计增加应用性和能力型题目。试题贴近生活，贴近实际，在材料选择方面，更能反映时代特点，引导学生关注现实问题，关注改革的热点问题；注意理论联系实际，体现科学知识的应用价值，推动科学知识的普及，引导学生破除迷信，崇尚科学。命题适当减少题量，降低难度，给学生充分思考的时间，有利于能力的考查；试题切入容易，深入难，即多数考生能够入手，但得高分不易，有利于选拔；统一与个性相结合，鼓励有创造性的答案，适当增加开放性的试题，引导中学数学教学，培养创新精神和创造能力；避免死记硬背和繁琐的计算。

试题在保持稳定的基础上，将会不断创新，使试题更富有时代气息。试题仍将会保持以下特点：

1. 考查基础知识仍是重点

高中数学基础知识是指高中数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映出来的数学思想和方法。综观近年来的高考试题，约有 100 分左右的试题是以考查高中数学的常规题目，2003 年也会延续这种方式。其中对概念、性质的考查重在理解层次，而不是简单的模仿和机械的记忆；对定理、公式的考查重在理解和掌握以及灵活运用，反对死记硬背。近年来，对于一些难于记忆的相关公式在试卷中给出，以体现淡化考查记忆，突出考查理解和运用，估计 2003 年仍会保持这种形式。

高考对数学思想和方法的考查是核心，是以知识为依托，以能力为目的进行考查的。对于数学方法的考查，主要考查配方法、换元法、待定系数法、代入法、比较法、构造法、割补法、解析法等。有时还考查数学归纳法、反证法等。对于数学思想的考查，是历年来的考查重点，主要在解答题（综合题）中进行重点考查。它主要包括函数与方程的思想、数形结合的思想、分类讨论的思想、化归与转化的思想。

2003 年的高考自然不会削弱对数学思想方法的考查，当然不会将上述思想方法作为一种特殊的技巧来考查，而是突出通性通法的考查。

2. 考查能力继续全面深入

对能力的考查是高考的主题，高考主要考查《考试说明》中的四种能力，并注意到层次要求上的差别。

对运算能力的考查上，主要体现在算理算法的考查上；字母运算占较大的分量；数值计算主要突出准确性和快速性的要求，避开繁杂和机械的重复计算；同时也考查估算和估测，即用简单的估计或心算，便能快速作答，体现推理运算。

对思维能力的考查是考查能力的核心,多数试题的解答要求考生必须具有良好的阅读、观察、思考和推理能力。同时注重考查思维的深刻性、敏捷性、灵活性、变通性和独创性等思维品质。

对空间想像能力的考查主要是通过立体几何试题进行的。试题着重考查对图形的辨识、几何元素的位置关系及几何量的计算。因此,考查空间想像能力不是简单地考查空间概念,而是将其与逻辑思维能力及计算能力联系起来,进行综合考查。

对分析问题、解决问题的能力考查,既有纯数学问题,又有数学应用题,设置这些问题时,一般是以取材合理、背景公平为条件的。这类题目既有综合性又有深刻性,是高考的热点,也是体现区分度的重点题目,从近年来看,其难度把握较好。估计2003年不会有多大的改变。

三、对中学教学的启示

高考对中学教学的导向作用是不可忽视的,近年的高考数学命题总的来说有利于中学教学改革,试卷中加大基础分的比例,有利于中学抓好基础,有利于提高中差生的学习兴趣和信心,有利于教师在课堂教学中认真落实"三基"。加大对创新和应用的考查,有利于中学素质教育,创新型和应用型试题是光靠题海战所解决不了的,因此要求教师在教学中必须把思想方法的教学放在首位,逐步提高能力和素质,否则别无出路。调整解答题的内容结构,有利于走出高考复习的误区。引导师生进行既全面又重点的复习,从而摆脱侥幸心理,避免猜题、押题等不良风气的曼延。

1.教材研究要发挥教材的多种功能和效应

教材首先是学生获得知识结论的"教本"。数学概念、定理、公式的积累组织成知识整体,随着学习的深入,知识积累的增多,各部分知识在各自发展中的纵向联系和部分知识之间的横向联系日益密切,不失时机地构筑知识网络,并在各个阶段逐步扩充和完善,是扎实掌握基础知识的重要一课,其中教材的导言和小结中有很多有益的启示。基本数学思想和数学方法在知识形成的过程中发展,数学能力在知识、方法和技能的学习过程中提高,是教材的又一个重要效应。许多重要的例题和习题反映相关数学理论的本质属性,蕴含着数学的重要的思维方法和思想精髓,对这类数学问题,通过类比、延伸、迁移、拓展、提出新的问题并加以解决,能有效巩固基础知识,发展数学能力,发挥教材的扩张效应。

2.解题研究要重在解题方向和策略

"问题是数学的心脏",学习数学的过程与数学解题紧密相关,而数学能力的提高在于解题的质量而非解题的数量,因之要重在研究解题的方向和策略。要善于从题目的条件和求解(或求证)的过程中提取有用的信息,作用于记忆系统中的数学认知结构,提取相关的知识,推动题目信息的延伸,归结到某个确定的数学关系,从而形成一个解题的行动序列,这就是解题方向。题目信息与不同数学知识的结合,可能会形成多个解题方向,选取其中简捷的路径,就得到题目的最优解法,解题过程中不断进行这样的思考和操作,将使数学能力得到有效的提高。

3.应用研究要关注数学应用的社会价值

解答数学应用问题,是创新意识和实践能力的重要表现。数学应用的研究,要关注生活环境、社会现实、经济建设、科技发展等各个方面,从中提炼出有社会价值的应用背景,促进学生不断追求新知,独立思考,增强用数学的意识,学会将实际问题抽象为数学问题。这个过程,就是创新意识和实践能力深化、提高的过程。它不仅仅是参加考试的需要,更重要的是可以促进学生综合文化素质的形成和提高。

4.推理研究要着眼抽象思维水平的提高

数学活动过程大量的是推理过程,人们在发展数学推理逻辑和推理方法的过程中也发挥了自身的抽象思维。要把握住"数学活动是一项思维活动"的特征,通过多种推理方法的合理运用,培养学生思维的准确性、深刻性和灵活性;通过对推理过程的合理表述,培养学生思维的逻辑性、完整性和流畅性。

第二编　高分解秘与专题综合能力测试

专题1　函数的性质

【命题规律】

函数的性质是历届高考重点考查的内容。主要集中在函数的定义域、值域，函数的解析式、反函数的概念与性质，函数的单调性、奇偶性、周期性，函数的对称性，函数的最值及函数的图像。考查的要求是全方位的，多层次的、综合性与灵活性都很强。如1999年高考理科试题考查函数的定义域，需要用极限方法。尤其是近年来，有关函数的应用题，更是热点，也是难点。

本专题题型以选择题、填空题居多，同时必有解答题，有关解答题，多在知识网络交会点处命题，且有一定难度。而选择题方法灵活，填空题出现有“多项选填”，“完形填空”，“构造填空”等多种类型的填空题。

【高分解秘】

【例1】(1997·全国·理、文)定义在区间$(-\infty,+\infty)$的奇函数$f(x)$为增函数；偶函数$g(x)$在区间$[0,+\infty)$的图像与$f(x)$的图像重合，设$a>b>0$，给出下列不等式：

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$。

其中成立的是　　(　　)

A.①与④　　B.②与③

C.①与③　　D.②与④

【揭秘】此题重在掌握奇偶函数的概念和函数的增减性定义，注意推理的正确性。

【解析】由$f(x)$为奇函数，且定义域为R，$\therefore f(0)=0$，又$f(x)$为增函数，即$f(a)>f(b)>0$，由题设条件知，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=g(x)$，$\therefore f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$\therefore [f(b)-f(-a)]-[g(a)-g(-b)]=f(b)+f(a)-g(a)+g(b)=2f(b)>0$。

故①成立，则②不成立，同理可验证③成立，④不成立，故选C。

【点评】本题主要考查函数的奇偶性与单调性及推理能力。本题也可根据题设条件，设$f(x)=x$，$g(x)=|x|$，取特殊值可很快得出结论。

【例2】(2000·全国·理、文)《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过800元的部分不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过500元的部分	5%
超过500元至2000元的部分	10%
超过2000元至5000元的部分	15%
……	…

对某人一月份应交纳此项税款26.78元，则他的当月工资、薪金所得介于　　(　　)

A.800～900元　　B.900～1200元

C.1200～1500元　　D.1500～2800元

【揭秘】本题是应用问题的税率问题，关键是数学建模，建立交纳税款y元与收入x元的函数关系。另一方面，由于此题是个区间上的数字问题，又是选择题，故通过估算得出结论。

【解析】解法1：由题设知交纳的税款y元与收入x元的函数关系式为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 800\\ (x-800)\cdot 5\% & (800<x\leqslant 1300)\\ 25+(x-1300)\cdot 10\% & (1300<x\leqslant 2800)\\ 175+(x-2800)\cdot 15\% & (2800<x\leqslant 5800)\end{cases}$$

因此当$y=26.78$元，即$25<y<27$时，有$1300<x<1320$。

解法2：如果收入为1300元，其中500元应纳税，税率为5%，应纳税为$500\times 5\%=25$(元)，如果收入为1500元，应纳税部分为700元，其中500元按5%纳税，其余200元按10%纳税，应纳税为45元，而此人纳税为26.78元，故其收入为1300至1500元之间。故选C。

【点评】本题主要考查分段函数的应用以及估算的能力。问题贴近生活，有特殊的社会意义。解法1是建立函数关系，应用性强，计算准确。解法2是直接计算，只要估算出收入范围就行了。解法2比较灵活，减少计算量。

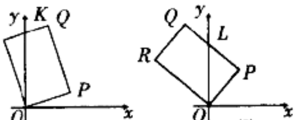
【例 3】在直角坐标系中，设矩形 $OPQR$ 的顶点按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$、$P(1,t)$、$Q(1-2t,2+t)$、$R(-2t,2)$，其中 $t\in(0,+\infty)$。

(1)求矩形 $OPQR$ 在第一象限部分的面积 $S(t)$；

(2)确定函数 $S(t)$ 的单调区间，并加以证明。

【揭秘】这是一道通过图形建立函数关系式的题，由于点的坐标位置不同，图形的位置也不同，矩形在第一象限的面积就不同。因此要先对 t 予以讨论。而求图形在第一象限面积时，可利用补形法、或整体减去部分。

【解析】(1)当 $1-2t>0$ 即 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，如图(1)，点 Q 在第一象限，此时 $S(t)$ 为四边形 $OPQK$ 的面积。



(1) (2)

直线 QR 的方程为 $y-2=t(x+2t)$。

令 $x=0$，得 $y=2t^2+2$，点 K 的坐标为 $(0,2t^2+2)$。

$S_{OPQK}=S_{OPQR}-S_{OKR}=2(\sqrt{1+t^2})^2-\frac{1}{2}(2t^2+252t)=2(1-t+t^2-t^3)$。

当 $1-2t\leqslant0$ 即 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，如图(2)所示，点 Q 在 y 轴上或第二象限，$S(t)$ 为 $\triangle OPL$ 的面积，直线 PQ 的方程为 $y-t=-\frac{1}{t}(x-1)$。

令 $x=0$ 得 $y=t+\frac{1}{t}$，点 L 的坐标为 $(0,t+\frac{1}{t})$。

$S_{\triangle OPL}=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\cdot1=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$。

所以 $S(t)=\begin{cases}2(1-t+t^2-t^3),0<t<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),t\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$

(2)当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，对于任何 $0<t_1<t_2<\frac{1}{2}$，有

$S(t_1)-S(t_2)=2(t_2-t_1)[1-(t_1+t_2)+(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]>0$，即 $S(t_1)>S(t_2)$，所以 $S(t)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 内是减函数。

当 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，对于任何 $\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2$，有

$S(t_1)-S(t_2)=\frac{1}{2}(t_1-t_2)(1-\frac{1}{t_1t_2})$，

所以，若 $\frac{1}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant1$，则 $S(t_1)>S(t_2)$；若 $1\leqslant t_1<t_2$，则 $S(t_1)<S(t_2)$。

所以 $S(t)$ 在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上是减函数，在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数。

由 $2[1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^3]=\frac{5}{4}=S(\frac{1}{2})$ 以及上面的证明过程可得，对于任何 $0<t_1<\frac{1}{2}\leqslant t_2<1$，$S(t_1)>\frac{5}{4}\geqslant S(t_2)$。

于是 $S(t)$ 的单调区间分别为 $(0,1]$ 及 $[1,+\infty)$，且 $S(t)$ 在 $(0,1]$ 内是减函数，在 $[1,+\infty)$ 内是增函数。

【点评】本题主要考查建立函数关系式，函数单调性的知识及分析问题、解决问题的能力、建立函数关系式，要确定变量取值范围，即应用问题中函数的定义域。讨论函数的单调性。划分定义域区间。

【专题能力测试】

一、选择题

1. 已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$，$B=\{x\mid x=4n,n\in N\}$，则 ( )

A. $I=A\cup B$ B. $I=\overline{A}\cup B$

C. $I=A\cup\overline{B}$ D. $I=\overline{A}\cap B$

2. 已知映射 $f:A\longrightarrow B$，其中 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$。集合 B 中的元素都是 A 中在映射 f 下的象，且对任意 $a\in A$，在 B 中和它对应的元素是 $|a|$，则集合 B 中元素的个数是 ( )

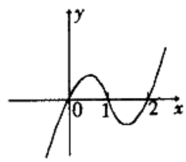
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in R$，且 $x\neq1$；已知 $f(x+1)$ 为奇函数，当 $x<1$ 时，$f(x)=2x^2-x+1$，那么当 $x>1$ 时，$f(x)$ 的递减区间是 ( )

A. $[\frac{5}{4},+\infty)$ B. $(1,\frac{5}{4}]$

C. $[\frac{7}{4},+\infty)$ D. $(1,\frac{7}{4}]$

4. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如图，如 ( )



A. $b\in(-\infty,0)$

B. $b\in(0,1)$

C. $b\in(1,2)$

D. $b\in(2,+\infty)$

5. 已知函数 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x\mid f(x-1)=ax,x\in R\}$，且 $A\cup R^+=R^+$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[0,+\infty)$ B. $(-\infty,0]$

C. $(0,+\infty)$ D. $(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

6. 已知函数 $f(x)=-x-x^3$，$x_1,x_2,x_3\in R$，且 x_1+x_2

$>0, x_2+x_3>0, x_3+x_1>0$，则 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的值为 ( )

A. 一定大于零

B. 一定小于零

C. 等于零

D. 正负均有可能

7. 设函数 $y=f(x)$ 定义在实数集上，则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图像关于 ( )

A. 直线 $y=0$ 对称

B. 直线 $x=0$ 对称

C. 直线 $y=1$ 对称

D. 直线 $x=1$ 对称

8. 设 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(-x)=-f(x)$，$f(a+d)<f(x)\ (d>0)$，当不等式 $f(a)+f(a^2)<0$ 成立时，a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

B. $(-1,0)$

C. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

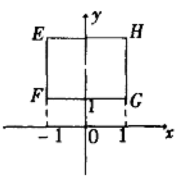
9. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，$f(a)=b$，$ab\neq 0$，则 $g(b)$ 等于 ( )

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

10. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 的值为 ( )

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

11. 函数 $y=x(x-2)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[-1,3]$，则以 a 为横坐标，b 为纵坐标所成的点 (a,b) 的轨迹为图中的 ( )



A. 点 $H(1,3)$，$F(-1,1)$

B. 线段 EF、GH

C. 线段 EH、FG

D. 线段 EF、EH

12. 函数 $y=f(x)$，在 $(0,2)$ 上是增函数，函数 $y=f(x+2)$ 是偶数，则下列结论正确的是 ( )

A. $f(1)<f(\frac{5}{2})<f(\frac{7}{2})$

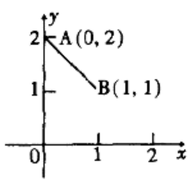
B. $f(\frac{7}{2})<f(1)<f(\frac{5}{2})$

C. $f(\frac{7}{2})<f(\frac{5}{2})<f(1)$

D. $f(\frac{5}{2})<f(1)<f(\frac{7}{2})$

二、填空题

13. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数，它在区间 $[0,1]$ 上的图像为如图所示的线段 AB，则在区间 $[1,2]$ 上，$f(x)=$______。



14. 1992 年底世界人口达到 54.8 亿，若人口的年平均增长率为 $x\%$，2000 年世界人口数为 y(亿)，那么 y 与 x 的函数关系式是 $y=$______(亿)。

15. 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1\ (x\geqslant 0)$，那么函数 $y=f(x)$ 的定义域是______。

16. 设函数 $f(x)$ 的反函数为 $h(x)$，函数 $g(x)$ 的反函数为 $h(x+1)$，已知 $f(2)=5$，$f(5)=-2$，$f(-2)=8$，那么 $g(2)$，$g(5)$，$g(8)$，$g(-2)$ 中，一定能求出具体数值的是______。

三、解答题

17. 如果函数 $f(x)$，对于任意 $x,y\in R$，都有 $f(x+y)=f(x)-f(y)$，且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 是增函数，又 $f(2)=0$。

(1) 确定 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求不等式 $f(a^{2x})>0$ 的解。

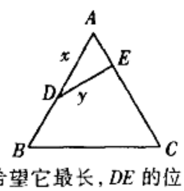
18. 已知函数 $f(x)$ 的图像可由函数 $g(x)=\dfrac{4x+m^2}{2x}$（m 为非零常数）的图像向右平移两个单位得到，

(1) 写出函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 证明函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

(3) 当 $x\in M$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $2+m^2$，最小值为 $2-\dfrac{m^2}{9}$，试确定集合 M，并说明理由。

19. 如图，公园有一块边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 的边角地，现修成草坪，图中 DE 把草坪分成面积相等的两部分，D 在 AB 上，E 在 AC 上。



(1) 设 $AD=x\ (x\geqslant a)$，求用 x 表示 y 的函数关系式；

(2) 如果 DE 是灌溉水管，为节约成本，希望它最短，DE 的位置应该在哪里？如果 DE 是参观线路，则希望它最长，DE 的位置又应该在哪里？请予以证明。

20. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 有最小正周期 2，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$。

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的解析式；

(3) 当 $\dfrac{2}{5}<a<\dfrac{1}{2}$ 时，解关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$。

21. 已知 $f(x)=(\dfrac{x-1}{x+1})^2\quad(x>1)$。

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及其定义域；

(2) 判定 $f^{-1}(x)$ 在其定义域内的单调性。

22. 已知函数 $f(x)$ 的反函数是 $y=\dfrac{2}{10^x+1}-1(x\in R)$，函数 $g(x)$ 的图像与 $y=\dfrac{4-3x}{x-1}$ 的图像关于 $y=x-1$ 对称，记 $F(x)=f(x)+g(x)$。

(1) 求 $F(x)$ 的解析式及定义域；

(2) 是否在 $F(x)$ 的图像上存在两个不同的点 A、B，使 $AB\perp y$ 轴，若存在，求出 A、B 的坐标，若不存在，说明理由。

专题2 二次函数、方程与不等式

【命题规律】

二次函数作为中学阶段的一个极其重要的初等函数，几乎随处可见。它不但沟通了二次三项式、二次方程与二次不等式之间的逻辑关系，同时还为这些问题的解决提供了坚实的理论和清晰的图像说明。长期以来，围绕着一元二次不等式的考查。如一元二次方程，一元二次不等式等一直占有相当大的比重，考查的方法也灵活多变。

对二次函数基本性质的考查，是多年来高考考查的重点，二次函数与方程的根的讨论也贯穿于函数问题考查的始终。应用数形结合的思想来解决一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的相关问题，是综合运用数学知识的一个重要方面，更是高考的一大热点内容，应用题中创建二次函数模型，是近年来的一大热点。

【高分解秘】

【例1】(1997·全国)设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$。

(1)当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2)设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$。

【揭秘】本题可以从方程与函数的思想去考虑。方程思想：$f(x)$ 是二次函数，从而方程 $f(x)-x=0$ 是二次方程。由于 x_1,x_2 是它的两个根，且方程中 x^2 的系数是 a，因此有表达式 $f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$。

函数思想：二次函数 $y=f(x)-x$ 开口向上，因此在区间 $[x_1,x_2]$ 的外部，$f(x)-x>0$，(1)的左端得证。其次，抛物线 $y=f(x)$ 的开口也向上，又 $x_1=f(x_1)$，于是为了证得(1)的右端，相当于要求证明函数 $f(x)$ 在区间 $[0,x_1]$ 的最大值是 $f(x_1)$，这相当于证明 $f(0)\leqslant f(x_1)$，也即 $c\leqslant x_1$，利用韦达定理和题设，立即可得。

【证明】(1)令 $F(x)=f(x)-x$，因为 x_1,x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的根，$f(x)=ax^2+bx+c$，所以有 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$。

因为 $0<x_1<x_2$，所以，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$x-x_1<0$，$x-x_2<0$，得 $(x-x_1)(x-x_2)>0$。又 $a>0$。因此 $F(x)>0$，即 $f(x)-x>0$。至此，证得 $x<f(x)$；

又 $x_1-f(x)=x_1-[x+F(x)]$

$$=(x_1-x)-a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=(x_1-x)[1+a(x-x_2)],$$

$\because 0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$，

$\therefore x_1-x>0$。

$1+a(x-x_2)=(1-ax_2)+ax>0$。

即得 $x_1-f(x)>0$。证得 $f(x)<x_1$。

综合以上结果得，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$x<f(x)<x_1$。

(2) $\because f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)(a>0),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$，且是惟一的一条对称轴。因此，依题意得

$x_0=-\frac{b}{2a}$。

因为 x_1、x_2 是二次方程

$ax^2+(b-1)x+c=0$ 的根，根据韦达定理得

$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}$。

$\because x_2-\frac{1}{a}<0$，

$\therefore x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2-\frac{1}{a}\right)<\frac{x_1}{2}$。

【点评】本题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力。本题第(1)问若直接用求根公式相当麻烦，故引进辅助函数 $F(x)=f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$，也是解决问题的关键。第(2)问主要是利用根与系数的关系，再利用字母代换、通过放缩证明而得。若用求根公式也不难证出。

【例2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx(a,b$ 是常数，且 $a\neq0)$，$f(2)=0$ 且方程 $f(x)=x$ 有等根。

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)是否存在常数 $m,n(m<n)$ 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[m,n]$ 和 $[2m,2n]$，如存在，求出 m,n 的值；如不存在，说明理由。

【揭秘】(1)由题设条件，容易确定 a,b 的值；(2)属存在性问题。一般首先假定存在，然后根据题设的要求逐步寻找 m,n 存在的条件。由 $f(x)$ 是二次函数，从条件看可找到递增区间。

【解析】(1)由题设 $ax^2+(b-1)x=0$ 有等根，即 $\Delta=0$，得 $b=1$，

又∵ $f(2)=0$，得 $a=-\frac{1}{2}$ ∴ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$

(2)∵ $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$

∴ $2n\leqslant\frac{1}{2}$，即 $n\leqslant\frac{1}{4}$

而当 $n\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $[m,n]$ 上为增函数，设满足题设条件的 m,n 存在，

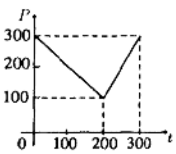
∴ $\begin{cases}f(m)=2m\\f(n)=2n\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}m^2-m=0\\-\frac{1}{2}n-n=0\end{cases}$

又∵ $m<n\leqslant\frac{1}{4}$ ∴ $m=-2,n=0$

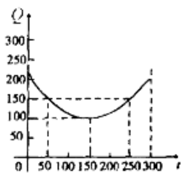
此时定义域为 $[-2,0]$，值域为 $[-4,0]$。

【点评】本题主要考查二次函数与方程的根的基础知识及二次函数的性质，本题属探索性命题，给解题增加难度。利用函数在区间上的单调性是解决本题的关键。

【例 3】(2000·全国·理、文)某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图(1)的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图(2)的抛物线段表示。



图(1)



图(2)

(1)写出图(1)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$；写出图(2)表示的种植成本与时间的函数关系 $Q=g(t)$；

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？(注：市场售价和种植成本的单位：元/10^2kg，时间单位：天)

【揭秘】本题根据图形写出函数解析式，图(1)为一次函数的图像，图(2)为二次函数的图像。通过图像写出解析式，要给出变量取值范围。问题(2)是求二次函数的最值，但要注意变量取值范围。

【解析】(1)由图(1)可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t & 0\leqslant t\leqslant 200,\\2t-300, & 200<t\leqslant 300;\end{cases}$$

由图(2)可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,0\leqslant t\leqslant 300。$$

(2)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得 $h(t)=f(t)-g(t)$，即

$$h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2},0\leqslant t\leqslant 200,\\-\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2},200<t\leqslant 300。\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100,$$

所以，当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[0,200]$ 上的最大值 100；

当 $200<t\leqslant 300$ 时，配方整理得 $h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$，所以当 $t=300$ 时，$h(t)$ 取得区间 $(200,300]$ 上的最大值 87.5。

综上，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$ 在区间 $[0,300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。

【点评】本题主要考查由函数图像建立函数关系式和求函数最值问题，考查运用所学知识解决实际问题的能力。由于是实际问题，所以要注意变量的取值范围。特别是第(2)问的求最值过程中，要划分变量区间，比较最值大小，最后确定最大值的取得，这也是学生容易出错的地方。

在解决有关二次函数问题时，要结合二次函数的图像与二次方程的根之间的关系，进行分析与推理，要结合二次函数的性质与一元二次不等式的联系综合求解。由于二次函数是知识网络的交会点，涉及的思维方法丰富，我们必须熟练掌握二次函数(图像)与方程，不等式的相互联系与相互转化等重要知识。

【专题能力测试】

一、选择题

1. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么 ( )

A. $f(2)<f(1)<f(4)$　　B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$　　D. $f(4)<f(2)<f(1)$

2. 若 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在 $(-5,-2)$ 上为 ( )

A. 增函数　　B. 减函数

C. 增减性随 m 变化而定　　D. 无单调性

3. 如果函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a\geqslant -3$　B. $a\leqslant -3$　C. $a\leqslant 5$　D. $a\geqslant 3$

4. 对任意 $a\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值总大于 0，则 x 的取值范围是 ( )

A. $1<x<3$　　B. $x<1$ 或 $x>3$

C. $1<x<2$　　D. $x>3$

5. 若函数 $f(x)=\lg(mx^2-4x+m-3)$ 的值域为 R，则

实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(4,+\infty)$　　B. $[0,4]$

C. $(-1,4)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

6. 已知二次函数 $f(x)=x^2+x+a(a>0)$，若 $f(m)<0$，则 $f(m+1)$ 的值为 ( )

A. 正数　　B. 负数

C. 零　　D. 符号与 a 有关

7. 已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，则 $g(x)$ ( )

A. 在区间 $(-1,0)$ 上是减函数

B. 在区间 $(0,1)$ 上是减函数

C. 在区间 $(-2,0)$ 上是增函数

D. 在区间 $(0,2)$ 上是增函数

8. 设 $M=\{(x,y)\mid y=x^2+2bx+1\}$，$P=\{(x,y)\mid y=2a(x+b)\}$，$S=\{(a,b)\mid M\cap P=\phi\}$，则 S 的面积是 ( )

A. 1　　B. π　　C. 4　　D. 4π

9. 函数 $f(x)=x^2-bx+c$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$ 且 $f(0)=4$，则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系是 ( )

A. $f(b^x)\leqslant f(c^x)$

B. $f(b^x)\geqslant f(c^x)$

C. $f(b^x)>f(c^x)$

D. 大小关系随 x 的不同区间而改变

10. 已知抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 顶点坐标为 $(0,k)$，$P=f(-\frac{3}{4})$，$Q=f(m^2-m+1)(m\in R)$，则 ( )

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P\neq Q$　　D. P、Q 的大小与 m、k 值有关

11. 已知 $A=\{x\mid \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\}$，$f(x)=x^2+px+q$ 和 $g(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 是定义在 A 上的函数，当 $x,x_0\in A$ 时，有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，$g(x)\geqslant g(x_0)$，且 $f(x_0)=g(x_0)$，则 $f(x)$ 在 A 上的最大值是 ( )

A. 8　　B. 4　　C. 10　　D. $\frac{17}{4}$

12. 若 $f(x)$、$g(x)$ 均为奇函数，且 $F(x)=af(x)+bg(x)+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最大值 4，则 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最小值 ( )

A. -4　　B. -2　　C. -1　　D. 3

二、填空题

13. 已知 α、β 是方程 $x^2-2ax+a+b=0$ 的两个实根，则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是______。

14. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像与坐标轴分别交于点 $(-1,0)$ 和 $(0,-1)$，顶点在第四象限，则 $a+b+c$ 的取值范围是______。

15. 当 $x\in(1,2)$，不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立，则 a 的取值范围是______。

16. 设函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，若当 $x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，则当 $x>1$ 时，$f(x)$ 的表达式为______。

三、解答题

17. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(1)=2$，在 $x=t(t\in R)$ 处取得最值。若 $y=g(x)$ 为一次函数，且 $f(x)+g(x)=x^2+2x-3$。

(1) 求 $y=f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $x\in[-1,2]$ 时，$f(x)\geqslant -1$ 恒成立，求 t 的取值范围。

18. 若对任意实数 x，二次函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+30(a\in R)$ 的值均为非负实数，求关于 x 的方程 $\frac{x}{a+3}=|a-1|+1$ 的根的范围。

19. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，a,b,c 均为实数，满足 $f(-1)=0$，对于任意实数 x，都有 $f(x)\geqslant x$，并且当 $x\in(0,2)$ 时，有 $f(x)\leqslant\frac{(x+1)^2}{4}$。

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 证明：$a>0$，$c>0$；

(3) 当 $x\in[-1,1]$ 时，函数 $g(x)=f(x)-mx(m\in R)$ 是单调函数。求证 $m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 1$。

20. $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$。

(1) 求 $x>0$ 时，$f(x)$ 的解析式；

(2) 是否存在这样的正数 a,b，当 $x\in[a,b]$ 时，$g(x)=f(x)$，且 $g(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$？若存在，求出所有的 a,b 的值；若不存在，请说明理由。

21. 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴。

设淡水鱼的市场价格为 x 元/kg,政府补贴为 t 元/kg。根据市场调查,当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时,淡水鱼的市场日供应量 Pkg 与市场日需求量 Qkg 近似地满足关系:

$P=1000(x+t-8)\quad (x\geqslant 8, t\geqslant 0)$,

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\quad (8\leqslant x\leqslant 14)$。

当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格。

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

22. $f(x)=ax^2+a^2x+2b-a^3$。

(1)当 $x\in(-2,6)$时,$f(x)>0$,当 $x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$时,$f(x)<0$,求 a、b 及$f(x)$;

(2)设 $F(x)=-\frac{k}{4}f(x)+4(k+1)x+2(6k-1)$。$k$ 为何值时,$F(x)$恒取负值?