数理类 语言类 电脑类 管理类 哲学类

线性代数·概率论与数理统计

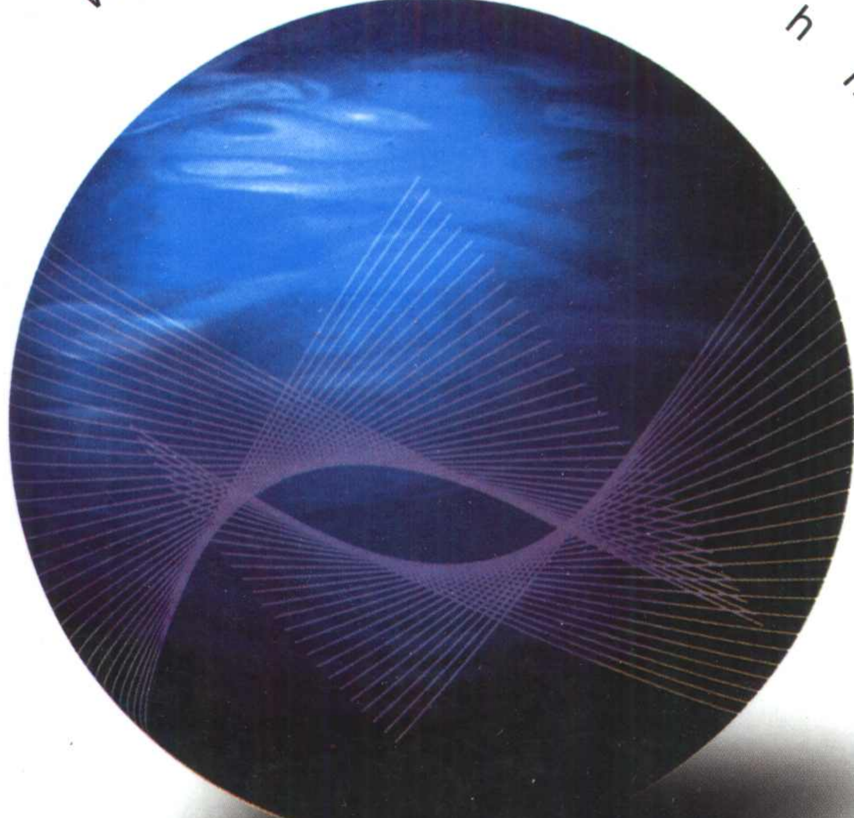
LINEARALGEBRA

现代远程教育系列教材

总主编 刘楚中

本册主编 罗 汉 李晓沛 刘先霞

www.hunu.hn.cninfo.net



出版社

现代远程教育系列教材

总主编 刘楚中

线性代数·概率论与数理统计

主　　编　罗　汉　李晓沛　刘先霞

湖南大学出版社

2002年·长沙

内 容 简 介

本书分为线性代数和概率统计两个部分，线性代数部分主要包括行列式、线性方程组、矩阵理论、线性空间和二次型等基本内容，概率统计部分主要包括随机事件、随机变量、数字特征、随机向量、极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析等基本内容。

本书作为现代远程教育的教材，配合目前多媒体网上教学使用，具有起点低、说理浅显易懂、叙述详细，结构严谨、便于自学等特点，同时它也适宜一般高等院校相应课程作为教材或参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数·概率论与数理统计/罗汉等主编．—长沙：湖南大学出版社，2001．8

现代远程教育系列教材

ISBN 7-81053-372-X

Ⅰ．线…　Ⅱ．罗…　Ⅲ．①线性代数—远距离教育—教材②概率论—远距离教育—教材③数理统计—远距离教育—教材　Ⅳ．①0151．2②021

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第036230号

线性代数·概率论与数理统计

Xianxing Daishu Gailülun yu Shuli Tongji

罗汉　李晓沛　刘先霞　主编

□责任编辑　卢　宇　袁作兴

□封面设计　花景勇

□出版发行　湖南大学出版社

社址　长沙市岳麓山　　邮码　410082

电话　0731—8821691　　0731—8821315

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　长沙县新华彩印厂

□开本　787×1092　16开　□印张　17.5　□字数　400千

□版次　2001年7月第1版　□2002年10月第3次印刷

□印数　14 000—14 000册

□书号　ISBN 7—81053—372-X/0．25

□定价　26.50元

前　言

计算机多媒体网络的现代远程教育在我国还是一个新生事物．我校是1998年国家教育部首批批准的全国现代远程高等教育的四所试点院校之一．为配合现代远程教育的教学，我们根据多媒体网上教学的特点，结合作者多年教学的经验体会尝试编写了《线性代数·概率论与数理统计》，作为相应课程的教材，与之配套的还有电子教案和教学光盘等．

线性代数、概率论与数理统计是高等院校各专业重要的基础理论课程．一方面，它为学习后续课程奠定必要的数学基础；另一方面，它的许多基本理论和方法也直接运用于自然科学、社会科学和工程技术等众多领域．这本教材的内容分为线性代数和概率统计两个部分．线性代数部分主要包括行列式、线性方程组、矩阵理论、线性空间和二次型等；概率统计部分主要包括随机事件、随机变量、数字特征、随机向量、极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析等，符合教育部高等工业学校数学课程教学指导委员会颁发的线性代数和概率统计课程的教学基本要求．全部内容的讲授约需90学时．不同的专业在使用时可根据教学计划的要求对内容进行适当取舍，教师和学生在教学中应着重强调掌握基本概念、基本理论和基本方法，并注意培养抽象概括、定量分析、演绎推理、归纳综合等数学素质，提高运用所学知识分析问题和解决问题的能力．

《线性代数·概率论与数理统计》是我校现代远程教育数学系列教材之一．这套系列教材由刘楚中任总主编，周叔子主审．本书由罗汉、李晓沛、刘先霞编著，罗汉统一了全稿．本书在编写过程中，得到了湖南大学多媒体信息教育学院和湖南大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢．

湖南大学数学与计量经济学院

2001年5月

目　次

第一部分　线性代数

第二部分　概率论与数理统计

第一部分

线　性　代　数

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中一个很重要的概念，它是研究线性方程组等问题的一个有力工具. 在这一章里，我们主要是给出行列式的定义、性质和介绍行列式的计算方法.

§1　二阶与三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法求解，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1,$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2.$$

因此，当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时，(1)的解为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases} \tag{2}$$

这就是一般二元线性方程组(1)的求解公式.

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{3}$$

同样可用加减消元法求解，当 $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \neq 0$ 时，可得出一般三元线性方程组(3)的解的公式为

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}, \\ y = \dfrac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}, \\ z = \dfrac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}. \end{cases} \tag{4}$$

(2)式和(4)式的形式比较复杂，不便于记忆. 所以，我们引进一个符号来表示上面的结果.

设有四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. 我们把代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5}$$

称其为一个二阶行列式；

设有九个数$a_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$，我们把代数和$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

称其为一个三阶行列式.

在行列式中，横排叫做**行**，纵排叫做**列**.（5）、(6)式的右端叫做该行列式的**展开式**；展开式中的每一个乘积叫做行列式的**项**，而$a_{ij}(i,j=1,2$ 或 $1,2,3)$称为行列式的**元素**.一般来说，行列式中元素a_{ij}的第一个下标i表示它所在的行，第二个下标j表示它所在的列.

二、三阶行列式的展开式可用一个简单的对角线规则来记忆：即主对角线方向上（实线上）元素的乘积项取正号；副对角线方向上（虚线上）元素的乘积项取负号，再将各项相加. 如图1—1.

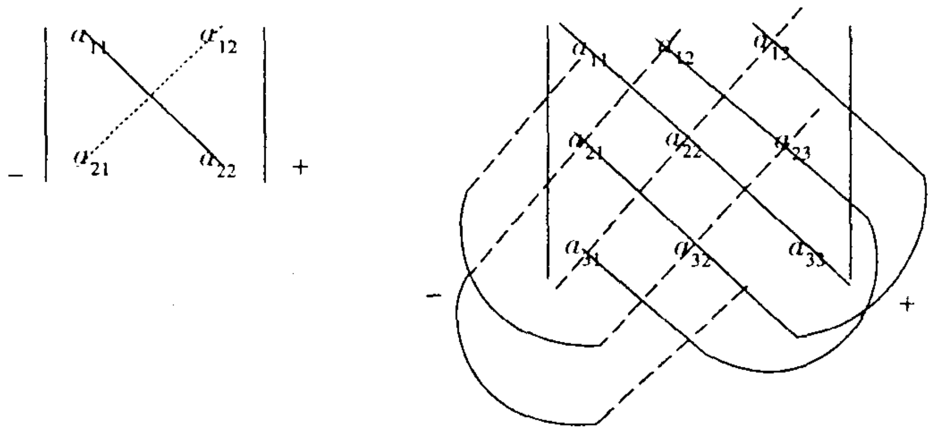


图1—1

例1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=2\times5-1\times(-3)=13$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}=2\times2\times(-5)+1\times0\times3+4\times7\times(-3)-4\times2\times3-2\times0\times7$$

$$-(-3)\times1\times(-5)=-20-84-24-15=-143.$$

有了行列式后，二元线性方程组(1)的解(2)可表示为

$$x=\frac{D_1}{D};y=\frac{D_2}{D} \tag{7}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

而三元线性方程组(3)的解(4)也可表示为

$$x=\frac{D_1}{D};\quad y=\frac{D_2}{D};\quad z=\frac{D_3}{D}. \tag{8}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

其中行列式 D 是方程组中未知数量的系数按其原有的相对位置排列而成的，而行列式 D_j 则是方程组中的常数项替换 D 中的第 j 列而成的.（$j=1,2$ 或 $j=1,2,3$）

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-3y=-2. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7\neq 0$

由公式(7)

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11$$

知方程组的解为

$$x=\frac{19}{7},\quad y=\frac{11}{7}.$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0.$

故方程组的解为

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{11}{8},\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{9}{8},$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

习 题 1—1

1. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$（其中 ω 是 1 的 3 次本原根）.

2. 验证下列等式成立：

(1) $\begin{vmatrix} ca_1 & cb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2+ca_1 & b_2+cb_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

3. 利用上题的等式计算下列各题：

(1) $\begin{vmatrix} 125 & 5 \\ 7.5 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 51 & 72 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$.

4. 利用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} bx-ay=-2ab, \\ 2cy+3bz=bc, \\ cx+az=0. \end{cases}$

其中 a,b 和 c 是不为零的数.

§2　n 阶行列式的定义

对于由 n 个方程构成的 n 元线性方程组.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_{21} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases} \tag{1}
$$

它的解是否也能如二元或三元线性方程组一样，表示成为两个行列式的商的形式呢？为此，我们首先要给出n阶行列式的定义. 因为当n很大时，用消元法从n个未知量中消去$n-1$个未知量是比较复杂的，所以我们不用引入二、三阶行列式的方法来引入n阶行列式. 为了定义n阶行列式，我们把三阶行列式的展开式写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

由(2)式可以看出，三阶行列式的展开式可写成三项的代数和，每一项都是由D的第一行的元素$a_{1j}(j=1,2,3)$分别与三个带有符号$(-1)^{1+j}(j=1,2,3)$的二阶行列式

$$
(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};\ (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

的乘积所构成. 其中$(-1)^{1+j}$的指数$1+j$是元素a_{1j}所在的行数1和列数j的和$(j=1,2,3)$，而其后的二阶行列式是原三阶行列式划去a_{1j}所在行、列的所有元素后剩余的元素所构成.

依照这种规律，我们可以定义n阶行列式.

定义 对于$n\geqslant 3$，符号

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}
$$

表示一个n阶行列式，它的值定义为

$$
D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{4}
$$

其中$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的**代数余子式**，M_{ij}为由D中划去第i行和第j列后余下的元素构成的$n-1$阶行列式. 即

$$
M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**$(i,j=1,2,\cdots,n)$.

例如,四阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \tag{5}$$

对于 $n=1$,我们规定一阶行列式 $|a|$ 就等于 a.

这样,对任意的自然数 n,我们都定义了 n 阶行列式.

例 1 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $D = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2\times(-4)+0-2+4=-6$

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

这种形式的行列式称为**左下三角形行列式**

注意,二、三阶行列式的对角线规则已不适用于四阶及四阶以上的行列式.

习 题 1－2

计算下列行列式

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$　　2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§3　行列式的性质与计算

前面我们定义了 n 阶行列式，但直接根据定义来计算行列式是非常麻烦的. 下面我们给出行列式的一些基本性质，利用它们可以使行列式的计算得到简化.

首先介绍转置行列式的概念. 把一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列位置互换，就得到一个新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

那么 D 的转置行列式就是

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

容易算出 $D=6$，$D^{\mathrm{T}}=6$ 即 $D=D^{\mathrm{T}}$，

对任何一个行列式都有此性质，这就是

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 说明行列式中行与列所处的地位是相同的. 因此凡是对行成立的性质,对列也成立;反过来,对列成立的性质,对行也成立.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式改变符号.

性质 3 把行列式的某一行(列)的所有元素同乘以一个数 k,等于以数 k 乘这个行列式. 换句话说,一个行列式某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号外.

性质 4 设行列式 D 的第 i 行的所有元素都可以表成两项的和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

那么 D 等于两个行列式 D_1 与 D_2 的和. 其中 D_1 的第 i 行元素是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$;$D_2$ 的第 i 行元素是 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$,且 D_1,D_2 其余各行的元素与 D 相同,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同样的性质对于列也成立.

性质 5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式不变.

性质 6 行列式有两行(列)的对应元素成比例,那么这个行列式等于零. 特别行列式中有某行(列)的元素全为零或有两行(列)的元素对应相等,则这行列式等于零.

性质 7 行列式等于任意一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积的和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

性质 8 行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积的和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j),$$

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=0.(s\neq t)$$

在计算行列式时,适当地运用行列式的性质,可使计算大为简化.

例 1 计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$