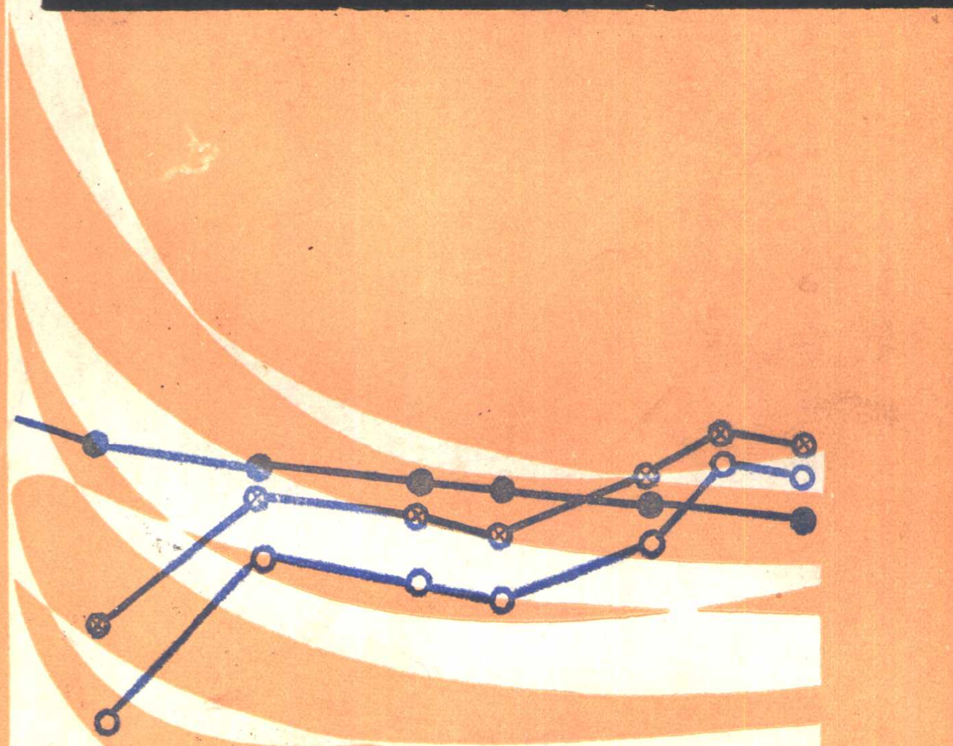
刘雪峰 程远平 胡星科 龚鹏飞 编著

矿井通风安全管理计算方法与程序设计



中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

矿井通风安全管理计算方法与程序设计

刘雪峰　程远平
胡星科　龚鹏飞　编著

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内 容 提 要

本书系统地介绍了矿井通风安全管理方面的计算方法及计算机程序设计方法，并给出了部分计算机源程序。程序主要用FORTRAN77语言编写，数据管理程序采用汉字dBASE Ⅲ数据库。主要内容包括矿井通风阻力测量计算；矿井主扇性能测定数据处理；矿井通风网路解算；煤层瓦斯流动理论；采场风流流动及瓦斯运移；矿井非稳定通风计算及通风网路管理数据库等。

本书可供从事煤矿通风安全管理的研究人员、工程技术人员使用，也可作为煤炭高校采矿工程和矿山通风与安全专业的教学用书。

责任编辑：马跃龙
技术设计：周俊平

高等学校教学用书
矿井通风安全管理计算方法与程序设计
刘雪峰　程远平　胡星科　龚鹏飞　编著

中国矿业大学出版社出版
全国新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/16　印张14　字数335　千字
1991年12月第一版　1991年12月第一次印刷
印数：1—1000册

ISBN　7-81021-517-5

TP·20　定价：3.65元

前　言

随着煤矿生产管理工作的现代化，矿井通风安全涉及的复杂计算及管理范围也日益增多，以往的手工计算是难以适应的，因此需要借助于电子计算机。目前，我国已有很多煤矿拥有了电子计算机，如何使这些现代化的计算及管理工具在矿井通风安全管理工作中发挥应有的作用，是每个从事通风安全管理工作的研究人员和工程技术人员所关心的问题之一。我们编写本书的目的，就是为了进一步推动该项工作的进展。

本书共分八章，第一章扼要介绍了矩阵理论和图论的基本概念及性质，以及几种线性代数方程组的解法，供读者在阅读以后几章的内容时参考。第二至第八章依次介绍了矿井通风阻力测量计算；矿井主扇性能测定数据处理；矿井通风网路解算；煤层瓦斯流动理论；采场风流流动及瓦斯运移；矿井非稳定通风计算及通风网路管理数据库方面的矿井通风安全管理计算方法与程序设计方法。书末还给出了部分计算机源程序，供读者使用时参考。本书各章内容即相互联系，又有其相对独立性，读者可根据需要选读或系统阅读。

本书的编写过程中自始自终得到了中国矿业大学王省身教授、赵以蕙教授、张惠忱副教授的悉心指导和热情帮助；张惠忱副教授还对本书全文进行了审阅，并提出了许多宝贵的意见；在此向他们表示衷心的感谢。此外，在本书的编写过程中还得到了郑州矿务局张廷芳高级工程师和有关参考文献作者的支持和帮助，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，对本书的错误和不妥之处，希望读者提出宝贵意见。

编著者

1990年7月

目　录

第一章 预备知识

矿井通风学的计算技术建立在现代应用数学的基础上，与应用数学的各个分支如线性代数、图论、数值计算方法及概率统计等有十分密切的联系。本章扼要地介绍矩阵理论、图论的基本概念及性质，以及几种线性代数方程组的解法供读者在阅读以后几章的内容时参考。

第一节 矩阵理论基础知识

一、矩阵的定义

矩阵是若干个代数系统的一种排列，一般被写成矩形，具有规定的行和列。于是

$$\underset{m,n}{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

就是一个 $m\times n$ 阶的矩阵，以符号 A 表示。括号内的符号代表组成矩阵 A 的元素。另外一种表示矩阵的方式是用典型元素，例如

$$A=\{a_{ij}\};\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

如果矩阵是 1×1 阵，就称为“标量”。

二、矩阵的种类

1．方阵。方阵是行数和列数相等的矩阵。于是 $\underset{m,m}{A}$ 就是一个 m 阶方阵。主对角线是由元素 $a_{ij}(i=j)$ 组成的。

2．行矩阵或行向量。一个行矩阵或行向量仅由一行组成，用黑体字母表示，例如

$$\boldsymbol{A}=(a_1a_2\cdots a_n)$$

3．列矩阵或列向量。一个列矩阵或列向量仅由一列组成，表示成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

列向量的转置即 $\boldsymbol{A}^T=(a_1a_2\cdots a_n)$ 为行向量，同理行向量的转置为列向量。本书中所说的向量指的是列向量。

4．对角矩阵。对角矩阵（简称对角阵）是主对角线以外的元素都为零的方阵：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_{mm} \end{bmatrix}$$

其中 $i\neq j$ 的所有元素 $d_{ij}=0$，$i=j$ 的所有元素或某些元素 $d_{ij}\neq0$。例如

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

我们也用

$$B=\text{diag}(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n)$$

的形式表示对角矩阵。

5．单位(矩)阵。单位阵是一个对角阵，其主对角线上的元素都等于1。它总是用

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&a_{ij}=0,\text{对于全部 } i\neq j\\&a_{ij}=1,\text{对于全部 } i=j\end{aligned}$$

表示。

6．零矩阵。零矩阵是一个诸元素都为零的矩阵。用字母 O 表示。

7．三角(矩)阵。三角阵是一个方阵，其主对角线上面（或下面）的元素(但不含主对角线元素)都为零。例如：

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}\qquad \text{上三角阵}\quad a_{ij}=0,i>j$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}\qquad \text{下三角阵}\quad a_{ij}=0,i<j$$

三、矩阵运算

1．矩阵相等。同阶的两个矩阵 A 和 B，若对于所有的 i 和 j 都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则它们是相等的。不同阶的矩阵不可能相等。可以成立的相等律是：

$$A=A\quad(\text{自反律})\tag{1-1}$$

$$\text{若 } A=B,\text{则 } B=A\ (\text{对称律})\tag{1-2}$$

$$\text{若 } A=B,B=C,\text{则 } A=C\tag{1-3}$$

2．矩阵加法。同阶的两矩阵 A 与 B 之和为一同阶的矩阵 C，对于所有的 i 和 j，其元素都为 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。不同阶的矩阵不能够相加。可以成立的加法律是：

$$A+B=B+A\ (\text{交换律})\tag{1-4}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C\ (\text{结合律})\tag{1-5}$$

采用零矩阵O，则有

$$A+O=O+A=A\tag{1-6}$$

$$A+(-A)=O\tag{1-7}$$

式中$(-A)$是以$(-a_{ij})$为元素组成的矩阵。

3．标量乘法。一个矩阵A与一标量 α 相乘的结果为另一矩阵 B，其元素对于所有的 i 和 j 都是 $b_{ij}=\alpha a_{ij}$。于是

$$B=\alpha A,\ \{b_{ij}\}=\{\alpha a_{ij}\}$$

下列定律成立：

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B \tag{1-8}$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A \tag{1-9}$$

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B) \tag{1-10}$$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A \tag{1-11}$$

4．矩阵乘法。若 A 和 B 两矩阵的维数分别为 $m\times k$ 和 $k\times n$，则其积是另一 $m\times n$ 维的 C 矩阵，其元素为

$$C_{ij}=\sum_{r=1}^{k}a_{ir}b_{rj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ r=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n) \tag{1-12}$$

或

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$$

必须注意，在矩阵乘法中，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。

例

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\ 和\ B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[1\times5+2\times2] & [1\times1+2\times3]\\ [3\times5+0\times2] & [3\times1+0\times3]\\ [1\times5+1\times2] & [1\times1+1\times3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 15 & 3\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

关于矩阵乘法有下列关系式：

$$AI=IA=A\qquad(I\ 为单位阵) \tag{1-13}$$

$$A(BC)=(AB)C=ABC\ (结合律) \tag{1-14}$$

$$A(B+C)=AB+AC\qquad(分配律) \tag{1-15}$$

$$(A+B)C=AC+BC\qquad(分配律) \tag{1-16}$$

在所有这些关系中，必须严格保持矩阵的顺序。应当注意，即使按两种顺序都可以相乘，但通常交换律是不成立的，即一般

$$AB\neq BA \tag{1-17}$$

5．矩阵的转置。$m\times n$ 阶矩阵 A 的转置阵是将 A 的行和列互换所形成的一个 $n\times m$ 阶矩阵，也就是把 A 的第 i 行变成转置矩阵的第 i 列。我们用 A^T 表示 A 的转置矩阵。若 $B=A^T$，则对于所有的 i 和 j 都得出 $b_{ij}=a_{ji}$。

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -6 & 5\end{bmatrix}$

则 $A^T=\begin{bmatrix}1 & -6\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

下列关系式成立：

$$(A+B)^T = A^T + B^T \tag{1-18}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{1-19}$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T \tag{1-20}$$

$$(A^T)^T = A \tag{1-21}$$

如果D为对角阵，则 $D^T = D$。同理，对于单位阵I，有 $I^T = I$。

6．对称和斜对称矩阵。若 $A^T = A$，则矩阵是对称的；若 $A^T = -A$，就是斜对称的。这些矩阵必须总是方阵。这样

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ 是对称矩阵，而

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 是斜对称矩阵。

在 n 阶对称矩阵中，至多有$(n^2+n)/2$ 个不同的元素，同阶的斜对称矩阵至多有$(n^2-n)/2$ 个非零元素。对称和斜对称二者兼备的唯一矩阵是零矩阵O。

对于任一矩阵 A 和任一对称矩阵 B，矩阵 AA^T，A^TA，ABA^T 及 A^TBA 都是对称矩阵。

7．逆矩阵。和标量不同，矩阵中不定义除法。事实上我们可能有 $AB = AC$，不必要$B = C$。这意味着用 A进行“除法”运算，即使 $A \neq 0$，也是不可能的。举例来说，令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

这里显然 $B \neq C$，但通过计算我们得到

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = AC$$

替代除法，我们引入矩阵A的逆阵 A^{-1} 的概念。

方阵A若存在逆的话，则这个逆是唯一的矩阵 A^{-1}，它有以下性质

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{1-22}$$

下列规则成立：

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{1-23}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{1-24}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{1-25}$$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \tag{1-26}$$

存在逆阵的方阵称为非奇异矩阵，不存在逆阵的方阵则称为奇异矩阵。

为了要了解矩阵求逆的方法，我们要引入方阵的行列式概念。每个方阵都连带有一个唯一定义的标量，称为A的行列式，用“detA”或 $|A|$ 来表示。对于 $n \times n$ 阶矩阵的 n 阶行列式将通过$(n-1)$阶行列式来定义。为了应用此法，我们需要定义最低阶矩阵的行列式，即 1×1 阶矩阵的行列式。对一个包含单一元素的矩阵

$$A=(a_{11})$$

其行列式定义为

$$|A|=\det A=a_{11}$$

从 $n\times n$ 矩阵所得的 $(n-1)\times(n-1)$ 行列式被称为子式。方阵 A 中元素 a_{ij} 的子式 m_{ij} 是去掉 A 中第 i 行和第 j 列所形成的子方阵的行列式。

例

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

对于 a_{12} 的子式为

$$m_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

矩阵 A 中元素 a_{ij} 的余因子 c_{ij} 由

$$c_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij} \tag{1-27}$$

得出，其中 m_{ij} 为元素 a_{ij} 的子式。现在我们可以把行列式定义为

$$|A|=\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}$$

或者 $|A|$ 是第一行元素乘以各自的余因子的积。

对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

元素 a_{11} 和 a_{12} 的余因子为

$$c_{11}=|a_{22}|=a_{22} \text{ 及 } c_{12}=-|a_{21}|=-a_{21}$$

于是

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

同理，对于

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

有

$$\begin{aligned}|A|&=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

引入了行列式的概念并利用其性质，我们可给出一些更直接的方法来计算逆阵。

（1） 矩阵 A 的余因子矩阵 C 是与 A 同阶的方阵，A 中的每个元素 a_{ij} 都为它的余因子所代替。

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}$$

的余因子矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

（2） 矩阵 A 的伴随矩阵是 A 的余因子矩阵的转置矩阵，即是 C^T，并用 $\mathrm{adj}A$ 表示，

$$\mathrm{adj}A=C^T=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

方阵 A 的逆阵由下式计算：

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|} \tag{1-28}$$

式(1-28)表明，要使 A 有逆矩阵，$|A|$ 不得为零。

例：已知联立的一对线性方程

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2=8 \\ 3x_1-x_2=1 \end{aligned}\right\}$$

求其唯一解。

首先将方程组写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{或 } \boldsymbol{AX=B}$$

推算余因子

$$c_{11}=(-1)^2(-1)=-1 \qquad c_{12}=(-1)^3(3)=-3$$

$$c_{21}=(-1)^3(3)=-3 \qquad c_{22}=(-1)^4(2)=2$$

及

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2-9=-11$$

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{adj}A=C^T=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AX=B}$，我们可以写出

$$A^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

因此有 $x_1=1$ 和 $x_2=2$。

第二节　图论基本知识

一、图的基本概念

一个图 G 是一个三重组 $\langle V(G), E(G), \Phi_g\rangle$，其中 $V(G)$ 是一个非空的结点（或叫顶

点)集合，$E(G)$是边的集合，Φ_G 是从边集 E 到结点偶对集合上的函数。

一个图可以用一个图形表示。

例：设 $G=\langle V(G),E(G),\Phi_G\rangle$，其中 $V(G)=\{a,b,c,d\}$，$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$，$\Phi_G(e_1)=(a,b)$，$\Phi_G(e_2)=(a,c)$，$\Phi_G(e_3)=(b,d)$，$\Phi_G(e_4)=(b,c)$，$\Phi_G(e_5)=(d,c)$，$\Phi_G(e_6)=(a,d)$，则图 G 可用图 1-1 表示。

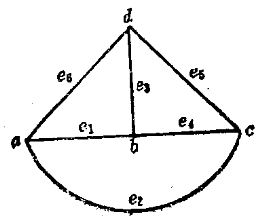


图 1-1

定义中的结点偶对可以是有序的，也可以是无序的。若边 e 所对应的偶对 (a,b) 是有序的，则边 e 是有向边。有向边简称弧，a 叫弧 e 的始点，b 叫弧 e 的终点，统称为 e 的端点。称 e 是关联于结点 a 和 b 的，结点 a 和结点 b 是邻接的。若边 e 所对应的偶对 (a,b) 是无序的，则称 e 为无向边。无向边简称棱。矿井通风网路图是一种有向图。

图中的两结点间若有同始点和同终点的几条边，则这几条边称为平行边，在通风网路中，这种情形被称为并联分支。两结点 a、b 间互相平行的边的条数称为边$[a,b]$的重数。含有平行边的图称为多重图。非多重图称为线图。

赋权图是一个三重组$\langle V,E,g\rangle$或四重组$\langle V,E,f,g\rangle$，其中 V 是结点集合，E 是边的集合，f 是定义在 V 上的函数，g 是定义在 E 上的函数。

例如在通风网路图上，对每一条分支我们可以以相应巷道的风阻值赋权。

二、路径和回路

1．路径和回路

在有向图中，路径是一个边的序列$(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{ik})$，其中 e_{ij} 的终点与 e_{ij+1} 的始点一致。如果序列中同一条边不出现两次，则称此路径是简单路径。如果同一点不碰到两次，则称此路径是基本路径(或叫链)。如果路径中的 e_{ik} 的终点与 e_{i1} 的始点相重合，则此路径称为回路，没有相同边的回路称为简单回路，通过各顶点不超过一次的回路称为基本回路。

在无向图中，类似地可定义以上各术语，只需将上述定义中的“有向图”三字改为“无向图”即可，故不重述。

在图 1-1 中：

(a) $P_1=(e_5,e_2)$ 是一基本路径(简单路径)；

(b) $P_2=(e_3,e_4,e_5)$ 是一基本回路。

2．连通图

设 $G=\langle V,E\rangle$是图，且 v_i、$v_j\in V$。如果从 v_i 到 v_j 存在任何一条路径，则称 v_j 从 v_i 可达。

在无向图中，如果任两结点是可达的，则称图 G 是连通的。在有向图中，如果在任何

结点偶对中，两结点都互相可达，则称图是强连通的；否则是弱连通的。显然，强连通的也一定是单向连通和弱连通的，单向连通的一定是弱连通的，但其逆均不真。

3. 欧拉路径和欧拉回路

如图 1-2 所示，能否找到这样一条回路，它穿程每条边一次且仅一次，这就是欧拉问题。穿程图 G 的每条边一次且仅一次的路径，称为欧拉路径；穿程图 G 的每条边一次且仅一次的回路，称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。

下面给出图G中存在欧拉路径或欧拉回路的充分必要条件。

(1) 无向图 G 具有一条欧拉路径当且仅当 G 是连通的，且有零个或 2 个奇数次数的顶点；一个无向图具有一条欧拉回路，当且仅当该图是连通的，并且它的顶点次数都是偶数。

(2) 一个有向图具有欧拉回路，当且仅当它是连通的，并且每个顶点的引入次数等于引出次数。一个有向图具有欧拉路径，当且仅当它是连通的，并且每个顶点的引入次数等于引出次数。可能有两个顶点是例外，对于这两个顶点，一个顶点的引入次数比它的引出次数大 1，另一个顶点的引入次数比它的引出次数小 1。

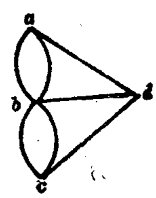


图 1-2

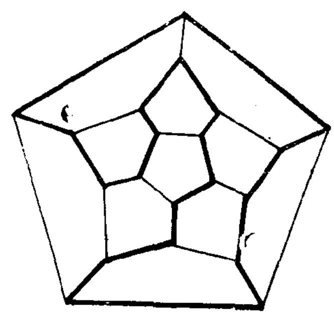


图 1-3

4. 哈密尔顿路径与哈密尔顿回路

在无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，穿程于 G 的每个顶点一次且仅一次的路径称为哈密尔顿路径。穿程于G的每个顶点一次且仅一次的回路称为哈密尔顿回路。具有哈密尔顿回路的图称为哈密尔顿图。

如图 1-3 所示的哈密尔顿图，粗线为哈密尔顿回路。

到目前为止，还没有找到一个哈密尔顿路径存在的充分必要条件。下面给出一个充分条件：

设 $G=\langle V,E\rangle$ 是具有 n 个顶点的简单无向图，若在 G 中每一对顶点次数之和大于等于 $n-1$，则在 G 中存在一条哈密尔顿路径。

三、图的矩阵表示

1. 邻接矩阵

设 $G=\langle V,E\rangle$ 是有向线图，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，并假定各结点已经有了从 v_1 到 v_n 的次序。定义一个 $n\times n$ 的矩阵 A，其中各元素 a_{ij} 为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, 如果\langle v_i,v_j\rangle\in E\\ 0, 如果\langle v_i,v_j\rangle\notin E\end{cases}$$

称这样的矩阵为图的邻接矩阵。

当有向线图代表关系时，邻接矩阵就是关系矩阵。有向图是自反的，矩阵的对角线元素全为1；有向图是非自反的，矩阵的对角线元素全为0；有向图是对称的，对所有 i 和 j，矩阵的元素 $a_{ij}=a_{ji}$；有向图是反对称的，对所有的 i 和 j，$a_{ij}=1$ 蕴含着 $a_{ji}=0$，$a_{ij}=0$，不一定 $a_{ji}=1$。

零图的邻接矩阵的元素全为零，并称它为零矩阵。图的每一顶点都有自回路而再无其它边时，图的邻接矩阵是单位矩阵。设有向线图 $G=\langle V,E\rangle$ 的邻接矩阵是 A，则 G 的逆图 $\tilde{G}=\langle V,\tilde{E}\rangle$ 的邻接矩阵是 A 的转置矩阵 A^T。

邻接矩阵的概念可以推广到无向线图，只要把以上定义中的 $\langle v_i, v_j\rangle$ 换成 (v_i, v_j) 即可。无向图的邻接矩阵是对称的，对有向线图推出的结论，都可并行地用到无向线图上。另外，邻接矩阵的概念还可推广到多重图和赋权图。对多重图，a_{ij} 代表从 v_i 到 v_j 的边的重数；对赋权图，a_{ij} 代表权 $W(i,j)$，当从 v_i 到 v_j 不存在边时，规定 $a_{ij}=0$。

例1 求图 1-4 所示的有向线图的邻接矩阵。

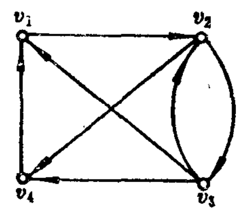


图 1-4

现在我们计算例题中的 AA^T、A^TA、A^2、A^3、A^4 等，并研究其元素的意义。

$$A^T=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\qquad AA^T=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&0\\1&1&3&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix}$$

(1) AA^T 的元素的意义

设 $B=[b_{ij}]=AA^T$，则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$。当且仅当 a_{ik} 和 a_{jk} 都是1时，$a_{ik}\cdot a_{jk}=1$。

$a_{ik}=1$ 和 $a_{jk}=1$ 意味着存在边 $\langle v_i, v_k\rangle$ 和 $\langle v_j,v_k\rangle$，于是得出以下结论：从结点 v_i 和 v_j 二者引出的边，如果能共同终止于一些结点，则这些终止结点的数目就是 b_{ij} 的值；特别，$i=j$ 时，对角线上的元素 b_{ii} 就是结点 v_i 的引出次数。

例如，在图 1-4 中，①选 $i=2$，$j=3$，于是 $b_{23}=1$，说明从 v_2 和 v_3 引出的边能共同终

止于同一结点的只有一个，即 v_4。②选 $i=2, j=2$，于是 $b_{22}=2$，说明 v_2 的引出次数为 2。

(2) A^TA 的元素的意义

设 $B=[b_{ij}]=A^TA$，则 $b_{ij}=\sum_{K=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$。当且仅当 a_{ki} 和 a_{kj} 都是1时，$a_{ki}a_{kj}=1$。$a_{ki}=1$ 和 $a_{kj}=1$ 意味着存在边 $\langle v_k, v_i\rangle$ 和 $\langle v_k, v_j\rangle$。于是得出以下结论：从一些结点引出的边，如果同时终止于 v_i 和 v_j，则这样的结点数目就是 b_{ij} 的值。特别，对角线上元素的值是各结点的引入次数。

(3) A^n 的元素的意义

$n=1$ 时，$a_{ij}=1$，说明存在一条边 $\langle v_i, v_j\rangle$，或者说，从 v_i 到 v_j 存在一条长度为 1 的路径。

$n=2$ 时，用 a_{ij}^2 表示 A^2 各元素，于是

$$a_{ij}^2=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

当且仅当 a_{ik} 和 a_{kj} 都等于1时，$a_{ik}a_{kj}=1$。a_{ik} 和 a_{kj} 等于1，表明存在边 $\langle V_i, V_k\rangle$ 和 $\langle v_k, v_j\rangle$，即存在一条从 v_i 到 v_j 的长度为 2 的路径。所以，a_{ij}^2 等于从 v_i 到 v_j 长度为 2 的不同路径的条数。

容易推想到，A^n 的元素 a_{ij}^n 是从 v_i 到 v_j 的长度为 n 的不同路径的数目。这可用归纳法证明。

设 $n=m$ 时，上述断言成立，现证 $n=m+1$ 时，此断言亦成立。因为 $A^{m+1}=A^m\cdot A$，所以

$$a_{ij}^{m+1}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^m a_{kj}$$

当且仅当 a_{ik}^m 和 a_{kj} 都等于1时，$a_{ik}^m a_{kj}=1$。a_{ik}^m 和 a_{kj} 等于1，意味着从 v_i 到 v_k 有一条长度为 m 的路径和一条从 v_k 到 v_j 的边，于是从 v_i 到 v_j 有一条长度为 $m+1$ 的路径，a_{ik}^m 大于1时，情况是类似的，因而 a_{ij}^{m+1} 是从 v_i 到 v_j 的长度为 $m+1$ 的路径总数。所以断言对 $m+1$ 成立。

因此，对于一切 n，A^n 的元素 a_{ij}^n 表示从 v_i 到 v_j 长度为 n 的不同路径总数。特别，对角线上的元素 a_{ii}^n 就表示经过 v_i 的长度为 n 的不同回路个数。

由此，还可得出以下结论：$i\neq j$，$d(v_i, v_j)$ 就是使 A^m 的元素 a_{ij}^m 是非零的最小正整数值 m。

例如，在图 1-4 中，$a_{34}^4=3$，所以从 v_3 到 v_4 长度为4的路径是3条。$a_{13}=0$ 而 $a_{13}^2=1$，所以从 v_1 到 v_3 的距离是2。

现在考察矩阵

$$B_r=A+A^2+A^3+\cdots+A^r$$

的元素 b_{ij} 的意义。

容易看出，b_{ij} 是表示从结点 v_i 到 v_j 长度小于和等于 r 的不同路径总数。因此，若要研究是否存在一条从 v_i 到 v_j 的任意长的路径，须求出 $A^+=\sum_{i=1}^{\infty} A^i$。实际上没有必要

这样做，仅需考察：

$$B_{n-1}=A+A^2+A^3+\cdots+A^{n-1} \qquad (i\neq j\ 时)$$

或

$$B_n=A+A^2+A^3+\cdots+A^n \qquad (i=j\ 时)$$

此时，$b_{ij}\neq 0$，$i\neq j$ 时表示从 v_i 到 v_j 是可达的，$i=j$ 时表示经过 v_i 的回路存在；$b_{ij}=0$，$i\neq j$ 时表示从 v_i 到 v_j 是不可达的，分属不同强分图，$i=j$ 时表示不存在经过 v_i 的回路。因此，b_{ij} 表明了结点间的可达性。

例 2　根据图 1-5 和矩阵 B_5，验证以下断言：

(a) $b_{52}=0$，所以 v_2 和 v_5 分属两个强分图。

(b) $b_{11}=0$，所以没有经过 v_1 的回路。

(c) $b_{53}=3$，所以从 v_5 到 v_3 长度不超过 5 的路径有 3 条。

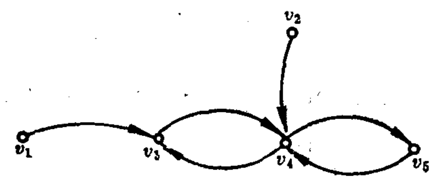


图 1-5

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&0&2&0\\0&0&0&2&0\\0&0&2&0&2\\0&0&0&2&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&2&0\\0&0&2&0&2\\0&0&2&0&2\\0&0&0&4&0\\0&0&2&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix}0&0&2&0&2\\0&0&0&4&0\\0&0&0&4&0\\0&0&4&0&4\\0&0&0&4&0\end{bmatrix}$$

$$B_5=A+A^2+\cdots+A^5=\begin{bmatrix}0&0&5&3&3\\0&0&3&7&3\\0&0&3&7&3\\0&0&7&6&7\\0&0&3&7&3\end{bmatrix}$$

有时仅需知道结点之间是否可达，而不必知道结点间存在多少条路径和怎样的路