张石生著

变分不等式和相补问题

理论及应用

上海科学技术文献出版社

国家自然科学基金资助项目
高等学校博士学科专项科研基金资助项目

变分不等式和相补问题理论及应用

张石生 著

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

国家自然科学基金资助项目
高等学校博士学科专项科研基金资助项目

变分不等式和相补问题理论及应用

张石生　著

*

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 850×1168 1/32　印张 12.375　字数 332,000
1991 年 10 月第 1 版　1991 年 11 月第 1 次印刷
印数：1—1,050
ISBN 7-80513-839-7/O·60
定价：7.80 元
《科技新书目》249-293

内容简介

本书第一章为引言及预备知识. 第二章至第七章借助 Ky Fan 极大极小原理和 KKM 技巧, 分别用拓扑方法、变分方法、半序方法和不动点方法研究了 Hartman-Stampacchia 等变分不等式解的存在性和唯一性, 及解集的性状, 并给出其对偏微分方程的边值问题、非线性规划问题、鞍点问题及经济数学中的 Nash 限制平衡问题等的应用. 第八章介绍了相补问题解的存在性条件, 并给出解的逼近格式. 第九章至第十一章介绍了还处于萌芽阶段的随机变分不等式、随机相补问题、向量变分不等式及 Fuzzy 映象变分不等式, 讨论了解的存在性、唯一性及其逼近问题, 并给出某些应用.

本书可供数学系高年级学生、研究生学习, 也可作为数学工作者、力学、经济数学、控制论、理论物理等学科的工作者参考之用.

序　言

变分不等式及相补问题理论是当今非线性分析的重要组成部分，它在力学、微分方程、控制论、数理经济、对策理论、优化理论、非线性规划等理论和应用学科都有广泛的应用.

自本世纪 60 年代，Lions，Browder，Stampacchia，Ky Fan，Lemk，Catte，Dantizig 等人提出和创立变分不等式和相补问题的基本理论以来，经过许多数学家的努力，变分不等式和相补问题的理论及应用的研究已取得重要的进展，并日臻完善. 到目前为止，变分不等式和相补问题的理论，已成为一门内容十分丰富的边缘性学科并有广阔的应用前景.

本书是作者在给四川大学数学系研究生多次讲授《变分不等式和相补问题理论》课程所写讲义的基础上，加上这几年来作者在科研活动中所取得的若干结果整理而成. 书中的部分内容，作者曾在成都、昆明、徐州、承德及延安等地举办的讲习班上报告过.

本书的目的是介绍变分不等式和相补问题的基本理论、基本方法及其近期发展概况和所待解决的问题. 在选材上注重理论的系统性和科学性. 作者把散见于国内外重要书刊上有关的最新结果，其中包括作者本人近年来所获得的一些结果，经过加工整理，系统地向读者作了介绍. 作者希望通过本书的阅读，能使读者产生登堂入室的感受.

作者对河北大学杨从仁教授表示衷心感谢，感谢他对作者写作本书所给予的鼓励和支持. 作者对徐州师范学院的马意海先生和河北师范大学的李秉友先生深致谢忱，感谢他们详细地阅读了书稿全文，并提出了许多宝贵的意见. 作者还要感谢听课师生对本书原稿所提出的宝贵意见.

由于作者水平有限，尽管竭力而为，但书中还会有许多缺点和错误，敬请读者不吝批评和指正。

作　者

1991年2月28日

于四川大学

符 号 用 法

$\alpha(S)$	集 S 的非紧性测度
$B(x, r)$	以 x 为心 r 为半径的开球
$\mathrm{card}(M)$	集 M 的基数
$\mathrm{co}(M)$	集 M 的凸包
$\overline{\mathrm{co}}(M)$	集 M 的闭凸包
$\dim X$	空间 X 的维数
$d(x, y)$(或 $\mathrm{dis}(x, y)$)	点 x 和点 y 间的距离
$\partial\Omega$	Ω 的边界
$\mathrm{epi}\,\varphi$	φ 的上方图形
E^*	E 的共轭空间
$(\cdot, \cdot)$	E 和 E^* 间的配对或内积
$\mathscr{F}(E)$	E 上的 Fuzzy 集全体
$f\|_M$	f 在 M 上的限制
$\varnothing$	空集
$L(X, Y)$	X 到 Y 的连续线性算子全体的集合
$\inf$	下确界
$\limsup$(或 $\overline{\lim}$)	上极限
$\liminf$(或 $\underline{\lim}$)	下极限
$P_K(x)$	x 在集 K 上的投影
R	数直线
$\mathrm{span}(M)$	集 M 生成的线性子空间
$\sup$	上确界
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
X_D	集 D 的特征函数

$x \mapsto f(x)$	作为 x 的函数
$\mathring{S}$(或 $\operatorname{int} S$)	集 S 的内部
$\operatorname{graph}(f)$	f 的图象

目　　录

第一章　引论及预备知识

§1.1　变分不等式的概念和例子

设 E 是一拓扑空间，X 是 E 中之一非空子集．$f: X \to (-\infty, +\infty]$ 是一泛函，且 $f \not\equiv +\infty$．设 $\varphi: X\times X \to R=(-\infty, +\infty)$ 也是一泛函，且 $\varphi(x, x)\geqslant 0$, $\forall x\in X$．下面的关于 $x\in X$ 的无穷不等方程组：

$$\varphi(x, y)\geqslant f(x)-f(y), \ \forall y\in X \tag{1.1}$$

称为变分不等式（或称变分不等方程）．若 $\bar{x}\in X$ 满足(1.1)，则称 $\bar{x}$ 为变分不等式(1.1)的解．

我们通常所说的变分不等式理论的基本内容就是研究各种类型的变分不等式解的存在性和唯一性条件，解（或解集）的性状及其逼近问题，以及对各种问题的应用．

下面我们举出变分不等式的某些例子，它们在变分不等式的理论和应用中将起到重要的作用．

例 1　设 K 是 R^n 中的有界闭凸集，$B: K \to R^n$ 是一连续映象．求 $\bar{x}\in K$，使得

$$(B\bar{x}, v-\bar{x})\geqslant 0, \ \forall v\in K \tag{1.2}$$

例 2　设 H 是一实 Hilbert 空间，$f\in H^*$（H 的共轭空间）是一给定元，a 是 H 上的一双线性连续泛函，$j: H\to R$ 是一给定的泛函．求 $u\in H$ 满足变分不等方程

$$a(u, v-u)+j(v)-j(u)\geqslant (f, v-u), \ \forall v\in H \tag{1.3}$$

例 3　设 H 是一 Hilbert 空间，其范数和内积分别记为 $|\cdot|$，$(\cdot, \cdot)$．设 V 是一自反 Banach 空间，其范数记为 $\|\cdot\|$，且满足 $V\subset H\subset V^*$（V 的共轭空间）．设 $\varphi: L^p(0, T; V)\to(-\infty, +\infty]$，且 $\varphi\not\equiv+\infty$．记 $D(\varphi)=\{u\in L^p(0, T; V): \varphi(u)<\infty\}$，并定义 Φ

如下：

$$\Phi(u)=\begin{cases}\int_0^T \varphi(u(t))dt, 若\ \varphi(u)\in L^1(0,\ T;\ R)\\ +\infty, \qquad\qquad 其他\end{cases}$$

其中 $u\in L^p(0,\ T;V)$. 记

$$D(\Phi)=\{u\in L^p(0,\ T;V):\Phi(u)<+\infty\}.$$

再设 $A: D(\Phi)\to L^q(0,\ T;V)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. 求 $u\in D(\Phi)$ 满足变分不等方程：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{du}{dt}+Au,\ v-u\right)+\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant(f,\ v-u),\\ \qquad\qquad \forall v\in D(\varphi),\ \text{a.e.}\,t\in(0,\ T)\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{1.4}$$

例 4 设 E 是局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，$K\subset E$ 是一非空的紧凸集. 设 $f: K\to E$ 是一连续映象，求 $u\in K$ 和 E 上的连续半范数 p, 使得

$$p(f(u)-x)-p(f(u)-u)\geqslant 0,\ \forall x\in K\tag{1.5}$$

例 5 设 E 和 K 与例 4 中的相同. 设 $F: K\to 2^K$ 是一多值映象，设 $f: K\times K\to R$. 求 $\bar{x}\in K$ 满足变分不等方程

$$f(\bar{x},\ y)\leqslant 0,\ \forall y\in F(\bar{x})\tag{1.6}$$

例 6 设 S 和 C 分别是 R^n 和 R^m 中的子集，设 $T: S\to 2^C$ 是一集值映象，M 和 η 分别是 $S\times C\to R^n$ 和 $S\times S\to R^n$ 的单值映象. 求 $\bar{x}\in S$ 和 $\bar{y}\in T(\bar{x})$, 使得

$$(M(\bar{x},\ \bar{y}),\ \eta(x,\ \bar{x}))\geqslant 0,\ \forall x\in S\tag{1.7}$$

例 7 设 E 是局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，F 是一 Fréchet 空间. 设 X 和 C 分别是 E 和 F 的子集. 设 T 是 $X\to 2^C$ 的集值映象，设 $\varphi: X\times C\times X\to R$, 且 $\varphi(x,\ y,\ x)\geqslant 0$, $\forall x\in X$, $y\in C$. 设 $S: X\to 2^X$. 求 $\bar{x}\in X$, $\bar{x}\in S(\bar{x})$, $\bar{y}\in T(\bar{x})$, 使得

$$\varphi(\bar{x},\ \bar{y},\ x)\geqslant 0,\ \forall x\in S(\bar{x})\tag{1.8}$$

例 8 设 E 是一实线性空间，X_0 和 X 是 E 中的闭集且 $X_0\subset X$, g: $X_0\times X\to(-\infty,\ +\infty]$ 且对每一 $z\in X_0$, $g(z,\ \cdot)\not\equiv+\infty$, ψ: $X_0\times X\times X\to R$, 且对任一 $z\in X_0$, $\psi(z,\ x,\ x)\geqslant 0$,

$\forall x\in X$. 求 $\bar{x}\in X_0$, 使得

$$g(\bar{x}, y)+\psi(\bar{x}, \bar{x}, y)\geqslant g(\bar{x}, \bar{x}),\ \forall y\in X \tag{1.9}$$

例 9 设 X 是一实线性拓扑空间, 设 (Y, S) 是具偏序"$\leqslant$"的实拓扑线性空间, 其中 $S\subset Y$ 是一闭凸锥且 $\operatorname{int}S\neq\varnothing$, 而"$\leqslant$"是由 S 引入的偏序. 设 $f: C\to Y$ 是 S-凸的, 其中 $C\subset X$. 求 $x_0\in C$ 和 $B\in\partial_W f(x_0)$ 使得

$$B(x-x_0)\notin-\operatorname{int}S,\ \forall x\in C \tag{1.10}$$

其中 $\partial_W f(x_0)$ 表示 f 在 x_0 处的弱次梯度.

例 10 设 E 是一线性拓扑空间, $X\subset E$ 是一非空紧凸集, E^* 是 E 的共轭空间, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表 E 与 E^* 间的配对. 设 $(\Omega, \mathscr{A})$ 是一可测空间, $f: \Omega\times X\to E^*$. 求可测映象 $v: \Omega\to X$, 使得

$$\operatorname{Re}\langle f(w, v(w)), y-v(w)\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in X \tag{1.11}$$

例 11 设 E 是一局部凸的 Hausdorff 线性拓扑空间, X 是 E 的非空紧凸集, $\mathscr{F}(E)$ 是 E 上的一切 Fuzzy 集的集合. 设 G 和 F 分别是 $X\to\mathscr{F}(X)$ 和 $X\to\mathscr{F}(E^*)$ 的 Fuzzy 映象. 设 $\alpha(x)$ 是 $X\to(0, 1]$ 的函数, $\beta\in(0, 1]$. 求 $y_0\in X$, 使得

$$G_{y_0}(y_0)\geqslant\alpha(y_0),\ \operatorname{Re}\langle u, y_0-x\rangle\leqslant 0,\ \forall u\in F_{y_0}(u)\geqslant\beta,$$
$$\forall x\in G_{y_0}(x)\geqslant\alpha(y_0) \tag{1.12}$$

§1.2 评　　述

前面所举出的 12 类变分不等式是变分不等式理论及应用研究中比较典型而重要的例子. 这些变分不等式由不同的作者在不同的时期提出并加以研究. 由研究这些类型的变分不等式所建立的理论、思想和方法成为变分不等式理论的核心.

例 1 中的变分不等式(1.2)称为 Hartman-Stam-pacchia 变分不等式, 它是 Hartman, Stampacchia[1] 在创立变分不等式理论时所研究的第一个变分不等式. 这一变分不等式与极值理论和微分方程紧密相关, 而且在近年已被推广到无穷维空间.

例 2 中的变分不等式(1.3)称为 Lions-Stampacchia 变分不