

摩尔工程力学 论文选辑

〔德〕 O. 摩 尔 著

上海科学技术出版社

摩尔工程力学論文选輯

[德] O. 摩 尔 著

吳 之 翰 譯

李 国 豪 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书譯自德文第三版的“摩尔工程力学論文选輯”(O. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik; 简称“摩尔工程力学”, O. Mohr: Technische Mechanik). 除略去“土压力理論”和“水坝的应力状态”两篇論文外,余均照譯。其中包括表达物体内点应力状态的摩尔圓,摩尔的材料破坏理論,以彈性轉角荷載 $\frac{M}{EI}$ 的索曲綫表示直梁撓曲綫的摩尔定理,求桁架次应力的摩尔轉角法等內容的十四篇論文,俱为摩尔在工程力学方面的名著。

本书可供我国从事于工程力学者用以学习摩尔的理論,亦可供大专学校土木、机械等专业师生以及工程技术人员参考之用。

ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER TECHNISCHEN MECHANIK

O. Mohr

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn · 1928

摩尔工程力学論文选輯

吳之翰 譯 李国豪 校

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/16 印張 24 4/16 插頁 4 排版字數 536,000
1966 年 5 月第 1 版 1966 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—1,300

統一书号 15119·1849 定价(科七) 4.00 元

汉 译 本 序 言

摩尔是十九世紀下半期德国的工程力学家，在工程力学方面作出了許多具有創造性的貢獻。其中最著名的有：表达物体点应力状态的摩尔圓，摩尔的材料破坏理論，以彈性轉角荷載 $\frac{M}{\epsilon J}$ 的索曲綫表示直梁撓曲綫的摩尔定理，求桁架次应力（剛性結点弯矩）的摩尔轉角法等。此后几十年中，工程力学这門学科在理論上和解题技巧上虽又有了新的发展，但摩尔的这些貢獻仍然是彈塑性理論、材料力学、結構力学等的重要組成部分。在摩尔的論著中鮮明地反映出，他对力学問題見解新穎，思考深湛，而其几何构思与表达方法至为卓越。材料破坏理論一文，从問題的提法到具体的論証尤为精辟。

摩尔的成就，一方面是由于当时的生产实践和科学技术的发展已向工程力学提出了新的課題，而当时的梁的撓曲理論、桁架理論、彈性理論以及对于材料破坏問題的初步認識等，虽为解决新的課題創造了条件，但仍感不足；另一方面是由于摩尔曾先后从事于鉄路工程的生产实践和鉄路工程与工程力学的教学工作，能在前人奠定的基础上进一步发展工程力学。因而摩尔的論著也就在一定程度上反映出他所从事这一工程力学部門当时的面貌。

这本摩尔工程力学論文选輯譯自 1928 年印行的德文第三版，其中論文 VI “土压力理論”和論文 VIII “水坝的应力状态”因不属于摩尔的主要工作，故未譯出。本书在題材的選擇和內容的翻譯方面可能都有不够恰当之处，至盼讀者指正。

吳之翰 李国豪 上海，同济大学，1965 年 9 月

原 序

第 一 版

本书汇集若干篇重新整理过的关于应用力学方面的論文。这些論文是在数十年中陸續写成的并曾在各种期刊上发表过(其中有些期刊的发行量是不大的)。論文的内容,凡已大部分为新近出版的工程力学教本和建筑力学教本所吸收者,均未多作更动和补充。但經重加編排并組織成十二篇独立的論文之后,把相属的内容归并起来,既避免了重复,也簡化了闡述。

这十二篇論文相互之間頗有联系,因此依次排列,使前后呼应而无顛倒之弊。

閱讀本书所需要的先修知識不多,除力学中的一些基本定理外,只要求具备初等数学和微积分运算的一般基础。土木和机械专业的工程技术人员及学生均可用以参考。

所有附图都已插入正文,因为这样可以对照閱讀,方便得多。同时又选择了适当的例題帮助理解。因此,在原始論文中采用大尺寸示意图的一些例題,都加以更換。准备另就工程实例編成大型例題和习題集,单独印行。

在每篇論文之后附有文献摘要,当然不能要求其完备;但可指出探本穷源的途徑。

Mohr, Dresden, 1905 年 10 月

第 二 版

在第一版序中提到准备另就工程实例編成大型例題和习題集,因患目疾不能制图,未能实现。但在第二版中作了一系列的增补,茲扼要說明如下。

論文 II 論及图解靜力学的要点,就其中的第 16 节到第 20 节补充了对于空間力組的組合規則,使迄今所习用的方法大为簡化。

論文 V 闡述著者关于材料力学基础的新假設,书評中曾多次指出这还是一个不够明确的部分,需要进一步作强度实验加以澄清;不可否认,当时所掌握的实践資料确未能在各方面都很充分。最近十年中,德、英、美各国工程师的工作已弥补了这项缺陷,且証实了著者的假設;著者以往未敢如此希冀,至深庆幸。在論文 V 的第 11 节中就这方面詳加叙述。

論文 VI 討論土压力理論,这是建筑力学中的又一不明确的部分。著者认为 Rankine 的假定优于 Coulomb 的假定,但各方面有不同的意見,因而有意加以申述,并首先指出 Coulomb 的理論不切实际,其次指出不能期待通过土压力实验以解决爭論。

論文 VIII “水坝的应力状态”是新增的一篇。当評論新建的 Nil 水坝时，英文期刊引起了对于大型水坝稳定計算的疑竇，同时并提出修改計算方法的建議，但所建議的方法显然将导致不利的結果。論文 VIII 証实上述疑竇缺乏根据，因而迄今在德国所慣用的假定也就沒有放弃的理由。

新增的第二篇論文 XIII 系闡明平面結構的一般理論。它試圖从統一的观点出发来处理建筑力学的广大領域。設有一个鏈由若干可延伸的鏈节所組成，而这些鏈节又复各繞无摩擦鉸轉动，則当运动很小时鏈的运动将受一些簡單定律的支配。这些定律可以作出靜力学的解釋并从而有助于形象化。涉及平面結構的内力和形变的探討，都可以追溯到这些簡單的定律。只要一看目录就可以知道这个方法的多方面适用性。

Mohr, Dresden, 1913 年 10 月

第 三 版

Christian Otto Mohr 于 1918 年 10 月 3 日逝世，享年几达 83 周岁。他由教师职务退休之后，即从事于自己重要作品的編纂工作，輯成本书；第二版的修正和补充仍由他亲手处理。

本书第三版的出版工作是由 Mohr 后裔委托他的最后一班的学生 H. Spangenberg 担任的。在这项工作中，其最适当的合作者应推 K. Beyer，因为他至今在 Dresden 高等工业学校主持着当年 Mohr 任課的一部分工作。

出版第三版的目的是为了保持 Mohr 經典性著作的本来面目，作为考据之典籍。因此只就各別論文之后附加注釋，以介紹有关問題的新文献为主，并用小体字排印以区别于正文。如此不仅指出 Mohr 作品的影响迄今依然生动，并且为进一步的研究提供綫索。在論文 V “什么情况决定材料的彈性极限和破坏？”之后，Beyer 写了一篇較长的附注，使讀者結合所附的文献目录，可以看到一些最近在与此重要問題有关的理論和实验方面的发展情况，并有利于今日来理解 Mohr 假設的意义。

在第三版中新收入 Mohr 的論文两篇：“超靜定桁架理論”和“論框架結構的計算”，刊为論文 XIIa 和 XIIIa。这两篇論文是 Mohr 在本书第二版出版之后所作。此外，删去了第二版中最后一篇論文“关于行星运动的观察”，因为它不属于工程力学的范围。这篇論文原来登載于 Zeitschrift für Mathematik und Mechanik 1921, S. 161。

.....

Mohr 是工程技术界著名学者之一。他的深远影响可从本书得其梗概。本书第三版正与前两版一样，不仅仅是一教本，且可对深入研究 Mohr 理論的讀者有所教益和启发。

K. Beyer 和 H. Spangenberg, Dresden 和 München, 1928 年 5 月

目 录

(括弧中数字系小节目所在的頁碼)

論文 I 剛体的平衡和无限小运动..... 1

1. 虚速度原理(1) 2. 軸和綫段(1) 3. 剛体轉动速度的表达(1) 4. 軸的移动速度(2)
5. 一个物体点的速度球和零軸(2) 6. 两軸的矩(2) 7. 力的功速度和靜力矩(3) 8. 在組合运动中的移动速度和一个力組的靜力矩(4) 9. 作用于一个剛体的力組的矩綫段(4) 10. 等值綫段組(5) 11. 一个綫段組的坐标(5) 12. 力組的功速度(6) 13. 等值綫段組到一个平面上或者到一个軸上的直角投影(7) 14. 一个綫段和一个軸的坐标(7) 15. 力偶和轉偶(8) 16. 零值綫段組或平衡組(9) 17. 一个零值組的各綫段的可能位置(10) 18. 两个綫段的零值組(11) 19. 三个綫段的零值組(11) 20. 四个綫段的零值組(12) 21. 五个綫段的零值組(14) 22. 六个綫段的零值組(15) 23. 七个綫段的零值組(16) 24. 把一个給定的綫段組組合成一个尽量简单的等值組(16) 25. 第一例(17) 26. 一个組(P)的共軛軸和共軛綫段的最重要特性(18) 27. 第二例(19) 28. 第三例(19) 29. 第四例(20) 30. 剛体各点的同时刻速度的特性(21) 31. 螺旋运动的几个特性(22) 32. 当运动自由度受限制时剛体平衡的一些条件(22) 33. 文献摘要(23)

論文 II 图解靜力学的要点26

1. 引言(26)

A. 平面力組26

2. 把一个給定的力組組成合力(26) 3. 索多边形(27) 4. 平面平衡組(28) 5. 习题:对于一个給定的力組作一个索多边形通过两个給定点(32) 6. 习题:对于一个給定的力組作一个索多边形通过三个給定点(33) 7. 利用索多边形以确定若干平行力的靜力矩(34) 8. 利用索多边形以确定弯矩(35) 9. 用索多边形求移动荷载列的作用(37) 10. 索曲綫(42) 11. 鉛垂力的索曲綫的微分方程(42) 12. 用索曲綫求平面对于軸或者物体对于平面的慣矩(43)

B. 空間力組44

13. 引言(44) 14. 各軸 p 交于非无限远点 A 的力組(P)(45) 15. 平行力組(45) 16. 以一个在平面 xy 上的力 R 与另一个平行于軸 z 的力 Q 相結合代替一个力組(P)(45) 17. 以一个力 K 与一个力偶 U 相結合代替一个力組(P), 力偶 U 的平面垂直于 K (45) 18. 以通过一个給定点 A 的力 K 与一个力偶 U 相結合代替一个給定的力組(P)(46) 19. 以一个力 T 与一个具有給定軸 s 的力 S 相結合代替一个給定的力組(P)(47) 20. 以一个在給定平面 s 上的力 S 与一个通过給定点 T_0 的力 T 相結合代替一个給定的力組(P)(48) 21. 以一个力 K 与一个力偶 U 相結合代替一个給定的力組(P), 力偶 U 的平面垂直于力 K (48) 22. 以一个通过給定点 N 的力 Q 与一个力偶 U_1 相結合代替一个給定的力組(P)(51) 23. 以一个在給定平面 u 上的力偶 U_1 与一个力 Q 相結合代替一个給定的力組(P)(51) 24. 試确定一个給定的平面 h 对于一个給定力組(P)的零点 H_0 (51) 25. 試确定一个給定点 H_0 对于一个給定的力組(P)的零平面 h . (52) 26 和 27. 試以两个力 G, H 代替一个給定的力組(P)(52) 28. 文献摘要(52)

論文 III 质量的几何学.....54

A. 一組质点的一次矩54

1. 一个质点組的重心(54) 2. 一个质点組投影的重心(54) 3. 确定一个质点組重心的图解法(55)
4. 把一个质点組分解为若干分組(56) 5. 等值质点組(56)

B. 平面质点組的或平面的二次矩.....57

6. 一个平面质点組对于在平面上平行于一个給定軸 AB 的所有各軸的慣矩(57) 7. 一个平面 F 对于所有在平面上經過重心各軸的慣矩和离心矩(58) 8. 作图法(60) 9. 其他表达法(60)

C. 空間质点組的或物体的二次矩	64
10. 一个物体或者一个空間质点組对于所有經過一点的平面偶的离心矩之間的关系 (64)	11. 矩球 (65)
12. 点 A 的主平面和主軸 (65)	13. 对于点 A 的主平面的慣矩值 (66)
14. 点 A 各主軸的方位 (67)	15. 主慣矩 X, Y, Z 与其他一些二次矩之間的关系 (68)
16. 上述各种关系的图示法 (68)	17. 重心 S 的各主軸与另一个給定点 A 的各主軸之間的关系 (70)
18. 文献摘要 (70)	
論文 IV 平面机构的运动	72
第一部分 平面机构运动的几何学	72
1. 平面点組的速度图 (72)	2. 刚性点組的速度图 (73)
3. 相似变化的点組的速度图 (74)	4. 杆多边形的速度图 (75)
5. 滑接的杆多边形的速度图 (75)	6. 点組的加速度图 (77)
7. 刚性点組的加速度图 (77)	8. 鉸接杆多边形的加速度图 (79)
9. 滑接杆多边形的加速度图. Coriolis 定理的应用 (80)	10. 平面机构的速度图和加速度图 (84)
11. 例題 (88)	12. 一点的路綫的曲度和它的縮閉綫 (98)
13. 一个刚性点組平面运动的二阶加速度 (100)	14. 平面机构的二阶加速度图 (101)
15. 一个与机构单元剛接的点的軌迹曲率和軌迹縮閉綫的曲率 (103)	16. 一个平面的几何运动 (104)
17. 速度极的軌迹曲率 (110)	18. 第 17 节的例 (113)
第二部分 平面机构的动力学	118
19. 机构运动的定律 (118)	20. 机构运动的分解 (118)
21. 各力 mv_0^2 的功速度 (119)	22. 机构单元的 $\sum mv_0^2$ 值 (119)
23. 机构单元各力 mv_0^2 的合力 V_2 (120)	24. 当机构运动无摩擦时各力 K 和 mv_0^2 的功速度 (121)
25. 当机构运动无摩擦时的各鉸力 (121)	26. 当运动无摩擦时鉸力的图解法 (123)
27. 机构单元的內力 (125)	28. 鉸摩擦和其对于机构加速度的影响 (125)
29. 机构的单元数、鉸数和杆数之間的关系 (126)	30. 文献摘要 (127)
論文 V 什么情况决定材料的弹性极限和破坏	130
1. 物体点的应力状态 (130)	2. 两个面 r_1, r_2 的应力 ρ_1, ρ_2 之間的关系 (130)
3. 物体点 A 的主应力 (132)	4. 用物体点 A 的主应力确定这一点的应力状态 (132)
5. 在主平面中球 A 微表面的应力 (132)	6. 一个物体点的应力状态的全图 (134)
7. 均质物体在弹性极限之內的变形图示法 (136)	8. 关于弹性极限和破坏原因的一些早期假設 (136)
9. 对于均质材料第四种新假設的論証 (139)	10. 极限曲綫的簡化表达法 (141)
11. 經驗对新假設的考核 (142)	12. 文献摘要 (155)
論文 VI 土压力理論	(未譯)
論文 VII 棱柱形梁的应力	159
1. 平衡条件 (159)	2. 法向应力 σ 的确定 (159)
3. 图解法 (161)	4. 特殊情况 (162)
5. 法向应力的另一种求法 (163)	6. 截面 F 的核心 (164)
7. 在无抗拉强度的棱柱形物体中的压应力 (166)	8. 梁截面上的剪应力 (167)
9. 梁的无限小部分上应力状态的图示法 (170)	10. 文献摘要 (171)
論文 VIII 水坝的应力状态	(未譯)
論文 IX 連續梁	172
1. 研究的对象及其前提 (172)	2. 彈性曲綫的微分方程 (172)
3. 連續梁各截面的弯矩和剪力 (173)	4. 支点弯矩的計算 (175)
5. 两等跨的常截面連續梁 (178)	6. 在对称于梁中点的四个支座上的常截面連續梁 (181)
7. 在对称于梁中点的四个等高支座上的常截面連續梁 (183)	8. 三跨梁建成后中間支座的下降 (185)
9. 支座高度偶然变化的不利后果 (187)	10. 变截面連續梁的計算 (189)
11. S, S', S'', S''' 对于一个梁跨的近似值 (190)	12. 梁截面变化的影响 (191)
13. 文献摘要 (192)	
論文 X 彈性曲綫	194
1. 直梁的彈性曲綫表达为索曲綫 (194)	2. 彈性曲綫与梁的弯矩和支力之間的关系 (195)
3. 用图解法确定直梁的彈性曲綫 (197)	4. 在两端簡支的梁上两点撓度之間的关系 (199)
5. 确定梁上某一点对于各种不同梁荷载的彈性撓度 (201)	6. 連續梁的支力 (202)
7. 影响綫 (203)	8. 常截面連續梁的三个相連支点弯矩之間的关系 (203)
9. 当只有一跨受荷载并且所有的支座在同一高度时常截面連續梁的弯矩 (204)	10. 受荷载跨的两个支点弯矩的求法 (206)
11. 在常截面連續梁上由一个集中荷载 P 所产生的弯矩 (207)	12. 常截面連續梁的弯矩影响綫 (209)
13. 在連續梁截面上由一个集中荷载 P 所产生的剪力 T (210)	14. 当荷载和支座位置为給定时常截面連續梁的弯矩图解法 (211)
15. 当只有	

一跨受荷载和所有支座在一条水平线上时图解法的应用(213) 16. 支座标高的影响(215) 17. 文献摘要(216)

論文 XI 具有脚铰的实腹拱217

1. 引言(217) 2. 分析的步骤(217) 3. 拱结构的内力和变形(219) 4. 綫段 v 的图解法(220) 5. 綫段 u 的图解法(222) 6. 当组合荷载时水平推力的图解法(223) 7. 拱脚压力綫(224) 8. 支座位置变化和温度变化的影响(224) 9. 文献摘要(225)

論文 XII 平面桁架226

1. 說明(226) 2. 桁架理論的主要方程(226) 3. 简单桁架和复杂桁架(227) 4. 应用速度图求简单桁架的杆力(228) 5. 一个特殊情况的例(230) 6. 矩方程应用于简单桁架的杆力计算(231) 7. 在荷载的大小和方位都已給定时求简单桁架杆力的图解法(233) 8. 影响数和影响綫(236) 9. 用索多边形表达影响綫(238) 10. 简单桁架的变形计算(242) 11. 用速度图确定简单桁架的变形(242) 12. 挠曲綫(245) 13. 挠曲綫的作法(247) 14. 复杂桁架中各多余杆的长度和长度变化(249) 15. 复杂桁架的杆力(250) 16. 复杂桁架的变形功(251) 17. 简单桁架或复杂桁架中每两个彈性变形之間的一般关系(254) 18. 具有脚铰的桁拱(256) 19. 連續桁梁(264) 20. 无脚铰的桁拱(268) 21. 平面桁架中的次应力(277) 22. 文献摘要(285)

論文 XIIa 超靜定桁架理論286

1. 說明和記号(286) 2. 桁架理論的主要方程(286) 3. 靜定桁架的杆力(287) 4. 特殊情况(287) 5. 超靜定桁架的变形定律(287) 6. 超靜定桁架中各多余杆的杆力(288) 7. 一个桁架的两个彈性运动之間的相互关系(289) 8. 超靜定桁架的变形功(290) 9. 变形功 A 与任何一个結点荷载 K_1 的功程 w_1 之間的关系(290) 10. 最小变形功原理(291) 11. 超靜定主网(292) 12. 桁架理論应用于超靜定梁、拱結構和框架結構的计算(292) 13. 方程(26)中各个总和的计算(294) 14. 数字例题(295) 15. 連續梁的支点弯矩(297) 16. 連續梁的三个相邻支点弯矩之間的关系(300) 17. 嵌支拱結構(300)

論文 XIII 平面結構的一般理論302

1. 由可延伸鏈节所組成的鏈的微小运动(302) 2. 鏈运动的靜力表达法(304) 3. 由可延伸鏈节所組成的閉合鏈(304) 4. 由不可延伸鏈节所組成的鏈(305) 5. 由不可延伸鏈节所組成的閉合鏈(305) 6. 简单桁架的杆力影响数(309) 7. 桁架的变形(311) 8. 复杂桁架中多余杆的杆力(313) 9. 直梁的彈性曲綫(316) 10. 空腹桁架的计算(319) 11. 桥梁框架的计算(331) 12. 嵌支实腹拱結構的计算(339) 13. 在具有剛性結点的桁架中次应力的计算(342) 14. 文献摘要(346)

論文 XIIIa 論框架結構的计算347

1. 計算的程序(347) 2. 由于框架荷载而产生的轉动重量 G' (349) 3. 由六个力 Z 所产生的轉动重量 G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 (352) 4. 求力 Z 的代数解法(354) 5. 求力 Z 的图解法(354) 6. 当框架对称时計算的簡化(355) 7. 框架荷载对于力 Z 的影响数(356) 8. 杆件延伸的影响(356) 9. 在框架四个角点上的弯矩 M_1, M_2, M_3, M_4 (357) 10. 任意一个杆截面的杆力 S 、剪力 Q 和弯矩 M (357) 11. 嵌支的豎杆脚(358) 12. 鉸式的豎杆脚(358) 13. 有伸臂的框架結構(358) 14. 五边形框架和拱形框架(358) 15. 变形定律的导出(359) 16. 框架变形的計算(360)

論文 XIV 空間桁架362

1. 引言(362) 2. 空間桁架的支座(362) 3. 必要杆的总数和安排(362) 4. 平衡条件(362) 5. 由各結点的平衡条件計算简单空間桁架的杆力(363) 6. 第一例:計算一个 Zimmermann 式圓頂的杆力(363) 7. 第二例:計算一个 Schwedler 式圓頂的杆力(370) 8. 当桁架形状不規則时平衡条件的解法(373) 9. 用运动学的方法确定杆力(373) 10. 简单空間桁架变形的計算(377) 11. 文献摘要(378)

論文 I 剛体的平衡和无限小运动

1. 虚速度原理 如果一个刚体在一个力组作用下由静止状态进入运动,则在运动的每一个因而也包括第一个无限小的时间内,有动能给予该物体. 动能等于各力所作出的功的代数和. 当这个功等于零时,运动不能发生,因为,如果物体每一点的动能等于零,则物体的每一点必然静止. 由此得出一条定理:如果对于每一个可能的无限小运动,作用于物体各力的功的和等于零,则静止的物体保持静止. 这条定理是静力学的基础,并称之为虚速度原理.

按上述定理,在一方面表达可能平衡组的綫段和另一方面表达刚体的可能运动的綫段之間,产生一些值得注意的几何关系. 因为这些关系在工程力学中到处都用得上,所以要在這裡循最簡捷的途徑把它們导出.

2. 軸和綫段 一条具有固定指向的直綫称为軸. 因此在每一条直綫上有两个指向相反的軸重迭在一起. 一个軸的指向在图中用一个箭头表示之,而在算式中則用两个字母并按字母的先后次序表示之. 因此用 AB 表示一个指向为由 A 向 B 的軸.

在两点之間并具有一定指向的直綫部分称为綫段. 表达綫段指向的方法与表达軸指向的方法相同. 当在一个軸上表达一个綫段时,給綫段以正号或負号,視其指向与軸指向相同或相反而定. 因此,在軸 AB 上的綫段 BA 是負的,即对这个軸而言,綫段具有負值. 我們用小写字母表示任意一个軸,而用同样的大写字母表示在这个軸上的一个綫段. 因此,綫段 P 是在軸 p 上. 当 P 与 p 同指向时, P 是正的. 利用綫段可以表达种种不同的量:路程,力,速度,轉动,动量,冲量,等等. 对于每一种量的表达都要說明相应的比例尺.

为了便于表达和便于用几何方法图示今后所出現的各项关系,对于每一个軸給以不名数“1”的值. 在必要时,可以用一个具有单位长度并与軸同样指向的綫段来表示这个值.

3. 剛体轉动速度的表达 如果为了观察一个物体繞直綫 AB 的轉动,把視綫放在这条直綫上,則因視綫由 A 向 B 或者由 B 向 A 而观察的結果有所不同. 車輪在道路上从南向北的轉动,对于一个观察者看起来作为右旋轉或者作为左旋轉,按观察者立在路的右方或者立在路的左方而定,也就是說,按視綫具有东-西指向或者具有西-东指向而定. 因此,上述的轉动,对于东-西軸而言是右旋轉,而对于西-东軸而言則是左旋轉. 站在前方看时钟,对于与視綫一致的軸而言,时針是向右旋轉的. 我們給右旋轉以正号,左旋轉以負号.

一个剛体繞一条固定的直綫 AB 旋轉的运动状态,在一个指定的时刻可以用一个在这个轉軸 AB 上的綫段 CD 来明确地表示,同时我們規定,对于綫段 CD 的指向而言轉动为右旋轉,而綫段 CD 的长度按一定的比例尺 (例如 $1\text{ cm} = 5\text{ sek}^{-1}$) 指出在观察时刻的轉动速度或者角速度的量. 因此,若 CD 具有 BA 的指向,則对于軸 AB 而言轉动是負的. 綫段 CD

在軸 AB 上的位置可以不加考慮。綫段可以在軸上任意移動，而所表達的運動狀態並不因此而有所改變。

4. 軸的移動速度 當剛體作無限小運動時，在一條與物體剛接的軸上 $A, B, C \dots$ 各

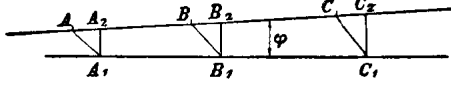


圖 1

點(圖 1)分別走過一級無限小綫段 $AA_1, BB_1, CC_1 \dots$; 這些綫段在軸 AB 上的投影 $AA_2, BB_2, CC_2 \dots$ 彼此只是相差一個二級無限小的數值，於是按指向和大小而言這些投影是彼此相等的。這是因為 AB 和 A_1B_1 兩軸的方位所形成的角 φ 是無限小，而這個角的余弦

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

與 1 只相差一個二級無限小的量。綫段

$$AA_2 = BB_2 = CC_2 = \dots$$

表示軸 AB 在它自己方位中的移動。因此，如果把这些無限小路程綫段除以運動的無限小時間，或者把軸上任意一點的速度投影到軸上，就得軸 AB 的移動速度。當移動速度的指向與軸的指向相反時，則移動速度為負。衡量移動速度的單位與衡量速度的單位相同，即 $1 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ 。

5. 一個物體點的速度球和零軸 為了求出通過物體點 A 的所有各軸的同時移動速度，必須把點 A 的速度 AA_0 投影到所有這些軸上。因而直徑為 AA_0 的球在每一個通過點 A 的軸上截出綫段 AD (圖 2)，其大小和指向表達出這個軸的移動速度。如果通過點 A 而不在同一平面上的三個軸的移動速度為已知，則物體點 A 的速度球就確定了，因為經過點 A 和三個表達移動速度的綫段的端點只能作出一個球，而這個球的直徑 AA_0 確定點 A 的速度。當觀察的時刻，移動速度等於零的點 A 各軸在平面 AE 上形成射綫束 A ，這一平面 AE 與速度球相切於 A 。這些軸稱為點 A 的零軸，而平面 AE 稱為點 A 的零平面。點 A 的兩個零軸決定點 A 的零平面。如果一點的三個零軸不在同一平面上，則這點當觀察的時刻是靜止的。如果一個平面上的三個零軸不交於一點而交於 A, B, C 三點，則這個平面上的每一點 D 是零點，而平面上每一個軸是零軸。當物體繞着一個在平面 ABC 上的靜止軸旋轉時，就出現這種特殊情況。

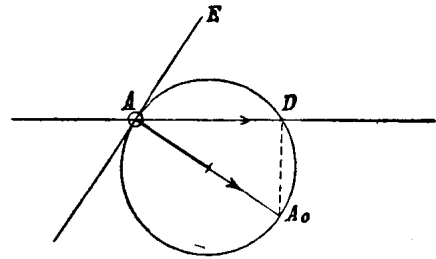


圖 2

6. 兩軸的矩 設 AB 和 CD (圖 3 和 4)為彼此剛接的兩個軸，它們的最短距離為長度 a 。為了要確定這兩個軸的相對位置，可以利用圖中所表示的以 a 為半徑的圓柱體。在第一種位置中(圖 3)軸 AB 與圓柱軸重迭并指向上方，而軸 CD 在前方與圓柱體相切於 F 點。第二種位置(圖 4)乃由第一種位置通過兩軸的交換而產生。為了使這兩個軸由第一種位置轉變到第二種位置，先給它們一個平行移動，使 F 移到 E 和 E 移到 G ，然後給予一個以 FG 為轉軸而角度為 DFB 的左向轉動，最後再繞圓柱軸轉過 180° 。在這兩種位置中，可以把前方的軸當作時鐘的分針而把後方的軸當作時鐘的時針。由這兩個針之間的距離 a 和由時針向

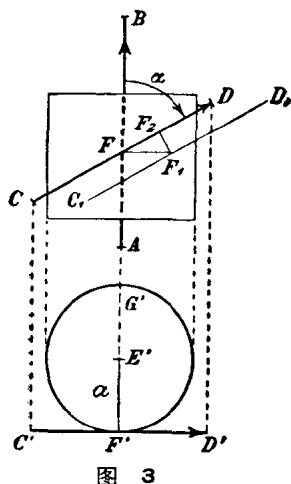


图 3

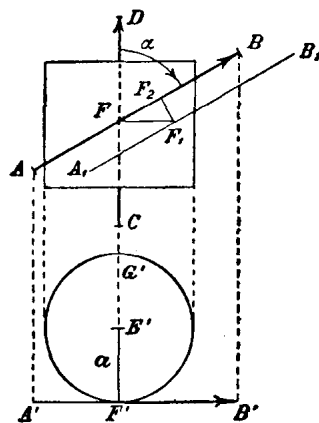


图 4

分針按時鐘的指向所轉出的角 α ，就能完全決定這兩個軸彼此之間的相對位置。 $a \cdot \sin \alpha$ 的量稱為兩軸的矩，並以 $[AB, CD]$ 或 $[CD, AB]$ 表示之。矩的正負號決定於角 α 的正弦。于此可見，當用這樣的表達方法時，兩軸的先后次序完全可以隨便。如果兩軸在同一平面上，則矩等於零。

7. 力的功速度和靜力矩 以 p 表示 AB, CD 兩軸 (圖 3 和 4) 中的一個軸，以 q 表示另一個軸，並使軸 q 與圓柱軸按指向重迭。給物體以一個轉動速度，並以一個在軸 q 上的正綫段 Q 表示之。於是，軸 p 上的點 F 在無限小的時間 dt 內以速度 Qa 走過一段無限小的路程

$$FF_1 = Qa dt.$$

速度 Qa 在軸 p 上的投影為：

$$Qa \sin \alpha = Q[p, q].$$

如果綫段 Q 的符號改變，則軸 p 的移動速度同時也改變符號；因此，軸 p 的移動速度稱為綫段 Q 對於軸 p 的矩，並以 $[p, Q]$ 或 $[Q, p]$ 表示之。當確定這個量

$$[p, Q] = Q[p, q] = Qa \sin \alpha \quad (1)$$

時，要考慮到 Q 和 $\sin \alpha$ 的符號。

如果有一個力作用在這個轉動的物體上，而這個力按大小和指向以軸 p 上綫段 P 表示之，則力 P 與軸 p 的移動速度的乘積 $PQa \sin \alpha$ 稱為力 P 的功速度*；它形成兩綫段 P, Q 的矩並以

$$[P, Q] = PQ[p, q] = PQa \sin \alpha \quad (2)$$

表示之。這個量的單位是 $\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ ，而它的符號決定於三個量 P, Q 和 $\sin \alpha$ 的符號。當力具有軸 p 的移動速度的指向時，則力的功速度為正。

力 P 對於軸 q 的虛矩或靜力矩以 $[q, P]$ 或 $[P, q]$ 表示之。若以不名數 $+1$ (就是說以軸 q 的值) 代替轉動速度 Q ，則由功速度 $[P, Q]$ 產出力 P 對於軸 q 的虛矩或靜力矩。因此，這個矩的量為：

* 校者注：確切的名称应当是功率。

$$[q, P] = P[p, q] = Pa \sin \alpha, \quad (3)$$

它的单位为 $1 \text{ kg} \cdot \text{cm}$.

刚体的各力之间的关系为一方面而这一物体的各无限小运动之间的关系为另一方面，彼此之间所以存在着相似性，乃由于力和转动速度的两个基本概念以同样形式包含在功速度 $PQ[p, q]$ 的概念中。如果给力 P 或转动速度 Q 以 $+1$ 的值，则可以从功速度概念中导出移动速度 $Q[p, q]$ 和静力矩 $P[p, q]$ 两个概念。这两个概念在那些关系中是并列的。对于在刚体运动的几何定律中赋予移动速度的每一特性，在静力学中有一静力矩的相应特性与之对等。

8. 在组合运动中的移动速度和一个力组的静力矩

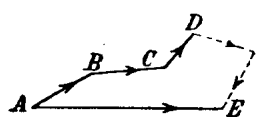


图 5

设先后给予一个刚体绕固定轴 $q_1, q_2, q_3 \dots$ 以无限小转动。于是物体点 A 在空间描绘出一个无限小多边形 $ABCDE$ (图 5)。当第一次转动时物体点由 A 到 B ，当第二次转动时由 B 到 C ，依此类推。总的路程线段 AE 为各线段的几何和，这些线段是分别由点 A 当第一次转动时、由点 B 当第二次转动时……等等所描绘的。由于 $A, B, C \dots$ 各点的距离都是一级无限小的量，因此，当一次无限小转动时，由这些点所描绘的路程线段的方向和大小彼此只相差一个二级无限小的量，也就是说，这些线段的方向相同，大小相等。所以，如果让点 A 每次都从它的原始位置出发作各个单独转动，然后把它的各个路程线段几何地加起来，亦就产生多边形 $ABCDE$ 。因此，物体点的位置变动是与各无限小转动的次序无关，而且当各转动不是先后而是同时进行时，结果仍然相同。此时，物体点 A 的总速度为设想这点当每一单独转动时所得的速度的几何和。由此得出：当各个转动同时进行，轴 p 的移动速度等于它当各个单独转动时所产生的各移动速度的代数和，也就是说：

$$[p, (Q)] = [p, Q_1] + [p, Q_2] + [p, Q_3] + \dots, \quad (4)$$

其中 (Q) 表示转动速度线段组 $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ ；物体的组合运动就是由这个线段组形成的。

按照同样的方式，由力 $P_1, P_2, P_3 \dots$ 所组成的力组 (P) 对于轴 q 的静力矩为各单独矩的代数和：

$$[q, (P)] = [q, P_1] + [q, P_2] + [q, P_3] + \dots. \quad (5)$$

9. 作用于一个刚体的力组的矩线段 力组 (P) 对于轴 q 的静力矩 $[q, (P)]$ 以轴 q 上的线段 Q 表示之。 Q 的长度按所选定的矩比例尺决定矩的大小，而 Q 的指向与看矩为右转的视线一致。如果把第 5 节中所阐述的移动速度的特性移用于力矩，则得出如下的一些关系：

设在通过点 A 的每一个轴 q 上由点 A 出发作线段 (图 2)

$$Q = [q, (P)] = AD,$$

它按指向和大小表示力组的静力矩，则所有这些矩线段的端点 D 在一个球上，这就是点 A 的矩球。球直径 AA_0 表示点 A 的主矩。设物体作无限小运动，而这一运动可由线段组 (P) 表示，则点 A 的速度相当于点 A 主矩 AA_0 。

点 A 的各个力矩为零的轴 AE 形成平面的射线束，而这一平面与矩球相切于点 A 。

点 A 的两个零轴确定点 A 的零平面。

如果点 A 的三个零轴不在一个平面上, 则所有通过 A 的轴都是零轴, 而 A 是每一个通过 A 的平面的零点。

如果在一个平面上的三个零轴不交于一点而交于三点, 则平面上的每一个轴都是力组 (P) 的一个零轴。在这些关系中, 不用考虑各力在它们轴上的位置, 亦就是不用考虑各作用点的位置。力的作用点可以在力轴上任意移动, 并不因此而改变静力矩。

10. 等值綫段組 有两个綫段組 (Q) 和 (S) 表示一个刚体的两种同时的转动速度。如果它们确定物体相同的运动状态, 也就是说, 如果两种运动给予每一个与物体刚接的轴 u 以同样的移动速度

$$[u, (Q)] = [u, (S)], \quad (6)$$

则这两个綫段組称为等值的。于是, 在这两种运动中每一个物体点的速度按大小、方位和指向都是相等的。这种特性以

$$(Q) \equiv (S) \quad (7)$$

表示之。

如果作用于一个刚体的两个力组 $(P), (R)$ 对于每一个轴 u 的静力矩是相等的, 即

$$[u, (P)] = [u, (R)],$$

则这两个力组 $(P), (R)$ 同样称为等值的:

$$(P) \equiv (R). \quad (8)$$

11. 一个綫段組的坐标 不在一条直线上的三个物体点 A, B, C 确定一个刚体的位置。因此, A, B, C 三点在每一时刻的速度确定所有其余各物体点的同时刻速度。如果有一个与物体刚接的任意四面体 $ABCD$, 其六条边的移动速度为已知, 则一个刚体的运动状态是已知的, 亦就是所有各物体点的同时刻速度全部为已知。这六边的移动速度对于作出三个物体点 A, B, C 的速度球是足够的, 而且也是必要的。三个轴 DA, DB, DC 的移动速度又确定第四个物体点 D 的速度球, 并且由于在第五个物体点 E 连接到四面体四顶点的四个轴 EA, EB, EC, ED 中无论如何至少有三个轴不在同一平面上, 所以可以由那四个轴的移动速度作出速度球 E , 而那四个轴的移动速度是由四个速度球 A, B, C, D 所规定的。因此, 如果两个转动速度组 $(Q), (S)$ 给四面体的六边中的每一边以相等的移动速度, 则这两个组是等值的。

如果作用于一个刚体的两个力组 $(P), (R)$ 对于四面体六边中的每一边的静力矩相等, 则这两力组 $(P), (R)$ 同样是等值的。与物体刚接的四面体的形状和位置可以随意选定。对于解析方法的探讨而言, 最合适的是由三个坐标平面和一个无限远的平面所形成的无限大的四面体。但是, 对于几何的表达而言, 反而以有限大小的四面体为宜。通常采用一个如图 6 和 7 所示的形式。以 x, y, z, x', y', z' 依次表示与四面体各边 AB, AC, AD, CD, DB, BC 连向指向相重迭的各轴。四面体的三条边 AB, AC, AD 相互垂直并同样各具有 $\sqrt{2}$ 倍的

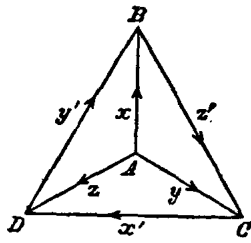


图 6

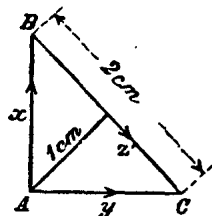


图 7

体。但是, 对于几何的表达而言, 反而以有限大小的四面体为宜。通常采用一个如图 6 和 7 所示的形式。以 x, y, z, x', y', z' 依次表示与四面体各边 AB, AC, AD, CD, DB, BC 连向指向相重迭的各轴。四面体的三条边 AB, AC, AD 相互垂直并同样各具有 $\sqrt{2}$ 倍的

单位长度, 即 1.414 cm. 因此, CD , DB , BC 各边的长度为 2 cm, 而相互垂直的各轴 x 和 x' , y 和 y' , z 和 z' 之间的最短距离都是 1 cm. 各轴指向的选择, 以使三个矩 $[x, x']$, $[y, y']$, $[z, z']$ 的值各为正值 +1 cm 为准. 必须注意的是, 所有其余轴偶的矩, 例如 $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, y']$... 等, 都等于零, 因为每两个轴都在同一个平面上. 因此, 一个由六个线段 X, Y, Z, X', Y', Z' 所组成的 (K) 组对于 x, y, z, x', y', z' 各轴的矩为:

$$\left. \begin{aligned} [x, (K)] &= [x, X'] = X' \cdot 1 \text{ cm}, & [y, (K)] &= [y, Y'] = Y' \cdot 1 \text{ cm}, \\ [z, (K)] &= [z, Z'] = Z' \cdot 1 \text{ cm}, & [x', (K)] &= [x', X] = X \cdot 1 \text{ cm}, \\ [y', (K)] &= [y', Y] = Y \cdot 1 \text{ cm}, & [z', (K)] &= [z', Z] = Z \cdot 1 \text{ cm}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

如果 (K) 组和已知线段组 (Q) 满足下列六个条件:

$$\left. \begin{aligned} [x, (K)] &= [x, (Q)], & [y, (K)] &= [y, (Q)], & [z, (K)] &= [z, (Q)], \\ [x', (K)] &= [x', (Q)], & [y', (K)] &= [y', (Q)], & [z', (K)] &= [z', (Q)], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则 (K) 组与 (Q) 组是等值的, 即

$$(K) \equiv (Q).$$

因此, (K) 组的线段具有下列各值:

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{[x, (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Y' &= \frac{[y, (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Z' &= \frac{[z, (Q)]}{1 \text{ cm}}, \\ X &= \frac{[x', (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Y &= \frac{[y', (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Z &= \frac{[z', (Q)]}{1 \text{ cm}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在四面体各边 x, y, z, x', y', z' 上的六个线段 X, Y, Z, X', Y', Z' 称为线段组 (Q) 的四面体坐标. 显然, 这六个线段与 (Q) 组的各线段是同类的. 如果 (Q) 组的各线段表示刚体的无限小运动, 则这六个线段就表示绕四面体各边同时转动的速度; 如果 (Q) 为一个作用于刚体的力组, 则这六个线段就表示六个力.

如果两个同类线段组 (P) 和 (R) 对于同一个四面体具有相等的坐标, 或者, 换句话说, 如果这两个线段组与一个坐标组 (K) 等值, 则按以上所述这两个线段组是等值的.

12. 力组的功速度 设有一已知力组 (P) 作用于一个刚体, 在一个已知的时刻给予这个刚体以运动 (Q) , 就是说给以一組已知的转动速度. 力组 (P) 的功速度为各个力的功速度的代数和, 即两个线段组 $(P), (Q)$ 的矩, 因而以 $[(P), (Q)]$ 表示之. 此外, 再以 X, Y, Z, X', Y', Z' 表示运动 (Q) 的坐标, 以 $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1, Z'_1$ 表示力组 (P) 的坐标. 当运动 (Q) 时, 一个集中力 P 具有移动速度

$$[p, (Q)] = [p, X] + [p, Y] + [p, Z] + [p, X'] + [p, Y'] + [p, Z'],$$

因而也就具有一个其量为 $P[p, (Q)]$ 的功速度. 如果注意到:

$$\begin{aligned} P[p, X] &= PX[p, x] = X[x, P], \\ P[p, Y] &= PY[p, y] = Y[y, P], \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

则可得出:

$$P[p, (Q)] = X[x, P] + Y[y, P] + Z[z, P] + X'[x', P] + Y'[y', P] + Z'[z', P].$$

如果按这个公式把組成(P)組的各个集中力 $P_1, P_2, P_3 \dots$ 的功速度写出来, 并考虑到力組(P)的各靜力矩是由下列方程式所确定:

$$\begin{aligned} [x, (P)] &= [x, P_1] + [x, P_2] + \dots = 1 \text{ cm} \cdot X'_1, \\ [y, (P)] &= [y, P_1] + [y, P_2] + \dots = 1 \text{ cm} \cdot Y'_1, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

則力組(P)的功速度的值为:

$$[(P), (Q)] = 1 \text{ cm} (X X'_1 + Y Y'_1 + Z Z'_1 + X' X_1 + Y' Y_1 + Z' Z_1). \quad (12)$$

这个方程指出: 各等值力組对于各等值运动具有相等的功速度.

按方程(12), 每一个矩可以用形成矩的各軸和各綫段的坐标来表示.

13. 等值綫段組到一个平面上或者到一个軸上的直角投影 以 $(P_1), (Q_1)$ 表示两个等值組 $(P), (Q)$ 到一个平面 α 上的直角投影, 并选择一个坐标四面体 $ABCD$, 它的各边 CD, DB, BC 或 x', y', z' 在平面 α 上, 而 AB, AC, AD 或 x, y, z 各边与 α 成直角方向, 也就是相交于无限远的点 A . 对于 x, y, z 中每一个軸而言, 一个綫段 P 的矩等于它的投影 P_1 的矩; 因此, 四个綫段組 $(P), (Q), (P_1), (Q_1)$ 对于这三个軸的矩都是相等的. 此外, 对于 x', y', z' 中的每一軸而言, 两綫段組 $(P_1), (Q_1)$ 的矩都等于零. 由此得出: 等值綫段組的直角投影是等值的, 即

$$(P_1) \equiv (Q_1).$$

如果在任何一个軸 v 的方位中給剛体以一个速度为 V 的平行移动, 則作用于物体的一个力組 (P) 的功速度是等于速度 V 与各力 P 到軸 v 上投影代数之和的乘积. 因此, 各等值力組对于每一个軸具有相等的投影.

若把这种特性移用于轉动組, 則得出: 各等值綫段組对于每一个軸具有相等的投影, 因而亦具有相等的几何和. 今后就用如下的記号

$$(Q) \equiv (S) \equiv G \quad (13)$$

来表示两个同类型的綫段組 (Q) 和 (S) 具有同一的几何和 G . 为了确定几何和 G , 作出六个坐标到彼此成直角的軸 x, y, z 上的投影:

$$\left. \begin{aligned} G_x &= X + (Y' - Z') \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ G_y &= Y + (Z' - X') \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ G_z &= Z + (X' - Y') \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

于是, 由公式

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} \quad (15)$$

求出几何和的长度.

14. 一个綫段和一个軸的坐标 如果力 P 所作用的物体圍繞靜止軸 p 旋轉, 則力 P 不完成任何功. 因此, 不管綫段 P 表达一个力或者一个轉动速度, 它的坐标是相互关联的, 并

可按照方程(12)由下述条件来表达:

$$[P, P] = 2 \text{ cm}(XX' + YY' + ZZ') = 0$$

或者

$$XX' + YY' + ZZ' = 0. \quad (16)$$

由此可見,一个綫段 P 是被五个坐标 X, Y, Z, X', Y' 所确定的, 而第六个坐标则由方程

$$Z' = -\frac{XX' + YY'}{Z} \quad (17)$$

求得.

如果以 P 的值去除綫段 P 的坐标, 則产生六个不名数:

$$\frac{X}{P} = x, \quad \frac{Y}{P} = y, \quad \frac{Z}{P} = z, \quad \frac{X'}{P} = x', \quad \frac{Y'}{P} = y', \quad \frac{Z'}{P} = z', \quad (18)$$

它們形成一个綫段的坐标, 这个綫段是在軸 p 上, 而其值为:

$$\frac{P}{P} = +1;$$

与第2节相一致, 这些坐标称为軸 p 的坐标. 一个軸的六个坐标是由两个条件彼此相联系着的. 由于这六个坐标表达一个单独綫段, 所以按方程(16)是:

$$xx' + yy' + zz' = 0, \quad (19)$$

且因它們的几何和等于 +1, 所以按方程(14)和(15)必然是:

$$\left[x + (y' - z')\sqrt{\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[y + (z' - x')\sqrt{\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[z + (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}} \right]^2 = 1. \quad (20)$$

15. 力偶和轉偶 如果一个綫段組的几何和等于零, 則它的六个坐标按方程(14)必須滿足下列三个条件:

$$\left. \begin{aligned} X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0, \\ Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0, \\ Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

所以, 这样一个綫段組要由三个与这些条件无关的坐标加以确定. 如果这里暫不考虑六个坐标中每一个都是等于零的特殊情况, 則綫段組与一个单独綫段 U 等值, 因为条件(16)已包含在方程(21)中. 綫段 U 的量等于零, 但是它的距离无限大, 因为它的一些矩, 例如对于各坐标軸而言的矩, 具有有限值. 所以 U 称为一个无限小而无限远的綫段. 这样一个轉动速度組确定对于一个物体所能給予的最简单运动, 这就是圍繞一个无限远軸 u 的轉动, 亦即一个平行移动, 此时所有各物体点具有等值等向的速度 V . 速度 V 的方位是垂直于在无限远相交于軸 u 的各平行平面. 共同速度 V 的大小和方位可由四面体上一个頂点的速度球来确定, 也就是例如由相交于頂点 A 的 x, y, z 三軸的移动速度 $X' \cdot 1 \text{ cm}, Y' \cdot 1 \text{ cm}, Z' \cdot 1 \text{ cm}$ 来