摩尔工程力学论文选辑

〔德〕O. 摩尔著

上海科学技术出版社

摩尔工程力学論文选輯

〔德〕O. 摩 尔 著
吳 之 翰 譯
李 国 豪 校

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本书譯自德文第三版的"摩尔工程力学論文选輯"(O. Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik; 簡称"摩尔工程力学", O. Mohr: Technische Mechanik). 除略去"土压力理論"和"水坝的应力状态"两篇論文外,余均照譯. 其中包括表达物体点应力状态的摩尔圓,摩尔的材料破坏理論,以彈性轉角荷載$\frac{M}{\varepsilon J}$的索曲綫表示直梁撓曲綫的摩尔定理,求桁架次应力的摩尔轉角法等內容的十四篇論文,俱为摩尔在工程力学方面的名著.

本书可供我国从事于工程力学者用以学习摩尔的理論,亦可供大专学校土木、机械等专业师生以及工程技术人員参考之用.

ABHANDLUNGEN AUS DEM
GEBIETE DER TECHNISCHEN
MECHANIK
O. Mohr
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn · 1928

摩尔工程力学論文选輯

吳之翰 譯 李国豪 校

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/16 印張 24 4/16 插頁 4 排版字数 536,000
1966 年 5 月第 1 版 1966 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—1,300

統一书号 15119·1849 定价(科七) 4.00 元

汉譯本序言

摩尔是十九世紀下半期德国的工程力学家，在工程力学方面作出了許多具有創造性的貢献．其中最著名的有：表达物体点应力状态的摩尔圓，摩尔的材料破坏理論，以彈性轉角荷載 $\frac{M}{\varepsilon J}$ 的索曲綫表示直梁撓曲綫的摩尔定理，求桁架次应力（剛性結点弯矩）的摩尔轉角法等．此后几十年中，工程力学这門学科在理論上和解題技巧上虽又有了新的发展，但摩尔的这些貢献仍然是彈塑性理論、材料力学、結构力学等的重要組成部分．在摩尔的論著中鮮明地反映出，他对力学問題見解新穎，思考深湛，而其几何构思与表达方法至为卓越．材料破坏理論一文，从問題的提法到具体的論証尤为精辟．

摩尔的成就，一方面是由于当时的生产实踐和科学技术的发展已向工程力学提出了新的課題，而当时的梁的撓曲理論、桁架理論、彈性理論以及对于材料破坏問題的初步认識等，虽为解决新的課題創造了条件，但仍感不足；另一方面是由于摩尔曾先后从事于鉄路工程的生产实踐和鉄路工程与工程力学的教学工作，能在前人奠定的基础上进一步发展工程力学．因而摩尔的論著也就在一定程度上反映出他所从事这一工程力学部門当时的面貌．

这本摩尔工程力学論文选輯譯自 1928 年印行的德文第三版，其中論文 VI“土压力理論”和論文 VIII“水坝的应力状态”因不属于摩尔的主要工作，故未譯出．本书在題材的选擇和內容的翻譯方面可能都有不够恰当之处，至盼讀者指正．

吳之翰　李国豪　上海，同济大学，1965 年 9 月

原　　序

第　一　版

本书汇集若干篇重新整理过的关于应用力学方面的論文．这些論文是在数十年中陆續写成的幷曾在各种期刊上发表过(其中有些期刊的发行量是不大的)．論文的內容，凡已大部分为新近出版的工程力学教本和建筑力学教本所吸收者，均未多作更动和补充．但經重加編排幷組織成十二篇独立的論文之后，把相属的內容归幷起来，旣避免了重复，也簡化了闡述．

这十二篇論文相互之間頗有联系，因此依次排列，使前后呼应而无顚倒之弊．

閱讀本书所需要的先修知識不多，除力学中的一些基本定理外，只要求具备初等数学和微积分运算的一般基础．土木和机械专业的工程技术人員及学生均可用以参考．

所有附图都已插入正文，因为这样可以对照閱讀，方便得多．同时又选擇了适当的例題帮助理解．因此，在原始論文中采用大尺寸示意图的一些例題，都加以更換．准备另就工程实例編成大型例題和习題集，单独印行．

在每篇論文之后附有文献摘要，当然不能要求其完备；但可指出探本穷源的途徑．

Mohr, Dresden, 1905 年 10 月

第　二　版

在第一版序中提到准备另就工程实例編成大型例題和习題集，因患目疾不能制图，未能实現．但在第二版中作了一系列的增补，兹扼要說明如下．

論文 II 論及图解静力学的要点，就其中的第 16 节到第 20 节补充了对于空間力組的組合规則，使迄今所习用的方法大为簡化．

論文 V 闡述著者关于材料力学基础的新假設，书評中曾多次指出这还是一个不够明确的部分，需要进一步作强度实驗加以澄清；不可否认，当时所掌握的实践資料确未能在各方面都很充分．最近十年中，德、英、美各国工程师的工作已弥补了这項缺陷，且証实了著者的假設；著者以往未敢如此希冀，至深庆幸．在論文 V 的第 11 节中就这方面詳加叙述．

論文 VI 討論土压力理論，这是建筑力学中的又一不明确的部分．著者认为 Rankine 的假定优于 Coulomb 的假定，但各方面有不同的意見，因而有意加以申述，幷首先指出 Coulomb 的理論不切实际，其次指出不能期待通过土压力实驗以解决爭論．

論文 VIII “水坝的应力状态”是新增的一篇．当評論新建的 Nil 水坝时，英文期刊引起了对于大型水坝稳定計算的疑竇，同时并提出修改計算方法的建議，但所建議的方法显然将导致不利的結果．論文 VIII 証实上述疑竇缺乏根据，因而迄今在德国所慣用的假定也就沒有放弃的理由．

新增的第二篇論文 XIII 系闡明平面結构的一般理論．它試图从統一的观点出发来处理建筑力学的广大領域．設有一个鏈由若干可延伸的鏈节所組成，而这些鏈节又复各繞无摩擦鉸轉动，則当运动很小时鏈的运动将受一些簡单定律的支配．这些定律可以作出靜力学的解釋并从而有助于形象化．涉及平面結构的內力和形变的探討，都可以追溯到这些簡单的定律．只要一看目录就可以知道这个方法的多方面适用性．

Mohr, Dresden, 1913 年 10 月

第 三 版

Christian Otto Mohr 于 1918 年 10 月 3 日逝世，享年几达 83 周岁．他由教师职务退休之后，即从事于自己重要作品的編纂工作，輯成本书；第二版的修正和补充仍由他亲手处理．

本书第三版的出版工作是由 Mohr 后裔委托他的最后一班的学生 H. Spangenberg 担任的．在这項工作中，其最适当的合作者应推 K. Beyer，因为他至今在 Dresden 高等工业学校主持着当年 Mohr 任課的一部分工作．

出版第三版的目的是为了保持 Mohr 經典性著作的本来面目，作为考据之典籍．因此只就各別論文之后附加注釋，以介紹有关問題的新文献为主，并用小体字排印以区別于正文．如此不仅指出 Mohr 作品的影响迄今依然生动，并且为进一步的研究提供綫索．在論文 V “什么情况决定材料的彈性极限和破坏？”之后，Beyer 写了一篇較长的附注，使讀者結合所附的文献目录，可以看到一些最近在与此重要問題有关的理論和实驗方面的发展情况，并有利于今日来理解 Mohr 假設的意义．

在第三版中新收入 Mohr 的論文两篇：“超靜定桁架理論”和“論框架結构的計算”，刊为論文 XIIa 和 XIIIa．这两篇論文是 Mohr 在本书第二版出版之后所作．此外，刪去了第二版中最后一篇論文“关于行星运动的观察”，因为它不属于工程力学的范圍．这篇論文原来登載于 Zeitschrift für Mathematik und Mechanik 1921, S. 161.

· ·

Mohr 是工程技术界著名学者之一．他的深远影响可从本书得其梗概．本书第三版正与前两版一样，不仅仅是一教本，且可对深入研究 Mohr 理論的讀者有所教益和启发．

K. Beyer 和 H. Spangenberg, Dresden 和 München, 1928 年 5 月

目　　录

(括弧中数字系小节目所在的頁碼)

論文 I　剛体的平衡和无限小运动

1. 虚速度原理　如果一个剛体在一个力組作用下由静止状态进入运动，则在运动的每一个因而也包括第一个无限小的时間內，有动能給予該物体．动能等于各力所作出的功的代数和．当这个功等于零时，运动不能发生，因为，如果物体每一点的动能等于零，则物体的每一点必然静止．由此得出一条定理：如果对于每一个可能的无限小运动，作用于物体各力的功的和等于零，则静止的物体保持静止．这条定理是静力学的基础，并称之为虚速度原理．

按上述定理，在一方面表达可能平衡組的綫段和另一方面表达剛体的可能运动的綫段之間，产生一些值得注意的几何关系．因为这些关系在工程力学中到处都用得上，所以要在这里循最簡捷的途徑把它們导出．

2. 軸和綫段　一条具有固定指向的直綫称为軸．因此在每一条直綫上有两个指向相反的軸重迭在一起．一个軸的指向在图中用一个箭头表示之，而在算式中则用两个字母并按字母的先后次序表示之．因此用 AB 表示一个指向为由 A 向 B 的軸．

在两点之間并具有一定指向的直綫部分称为綫段．表达綫段指向的方法与表达軸指向的方法相同．当在一个軸上表达一个綫段时，給綫段以正号或負号，視其指向与軸指向相同或相反而定．因此，在軸 AB 上的綫段 BA 是負的，即对这个軸而言，綫段具有負值．我們用小写字母表示任意一个軸，而用同样的大写字母表示在这个軸上的一个綫段．因此，綫段 P 是在軸 p 上．当 P 与 p 同指向时，P 是正的．利用綫段可以表达种种不同的量：路程，力，速度，轉动，动量，冲量，等等．对于每一种量的表达都要說明相应的比例尺．

为了便于表达和便于用几何方法图示今后所出現的各項关系，对于每一个軸給以不名数“1”的值．在必要时，可以用一个具有单位长度并与軸同样指向的綫段来表示这个值．

3. 剛体轉动速度的表达　如果为了观察一个物体繞直綫 AB 的轉动，把視綫放在这条直綫上，则因視綫由 A 向 B 或者由 B 向 A 而观察的結果有所不同．車輪在道路上从南向北的轉动，对于一个观察者看起来作为右旋轉或者作为左旋轉，按观察者立在路的右方或者立在路的左方而定，也就是說，按視綫具有东-西指向或者具有西-东指向而定．因此，上述的轉动，对于东-西軸而言是右旋轉，而对于西-东軸而言则是左旋轉．站在前方看时钟，对于与視綫一致的軸而言，时針是向右旋轉的．我們給右旋轉以正号，左旋轉以負号．

一个剛体繞一条固定的直綫 AB 旋轉的运动状态，在一个指定的时刻可以用一个在这个轉軸 AB 上的綫段 CD 来明确地表示，同时我們規定，对于綫段 CD 的指向而言轉动为右旋轉，而綫段 CD 的长度按一定的比例尺（例如 $1\,\mathrm{cm}=5\,\mathrm{sek}^{-1}$）指出在观察时刻的轉动速度或者角速度的量．因此，若 CD 具有 BA 的指向，则对于軸 AB 而言轉动是負的．綫段 CD

在軸 AB 上的位置可以不加考慮. 綫段可以在軸上任意移动，而所表达的运动状态并不因此而有所改变.

4. 軸的移动速度 当剛体作无限小运动时，在一条与物体剛接的軸上 A, B, $C\cdots$ 各点(图 1)分别走过一級无限小綫段 AA_1, BB_1, $CC_1\cdots$；这些綫段在軸 AB 上的投影 AA_2, BB_2, $CC_2\cdots$ 彼此只是相差一个二級无限小的数值，于是按指向和大小而言这些投影是彼此相等的. 这是因为 AB 和 A_1B_1 两軸的方位所形成的角 φ 是无限小，而这个角的余弦

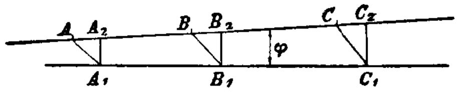

图 1

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}+\cdots$$

与1只相差一个二級无限小的量. 綫段

$$AA_2=BB_2=CC_2=\cdots$$

表示軸 AB 在它自己方位中的移动. 因此，如果把这些无限小路程綫段除以运动的无限小时間，或者把軸上任意一点的速度投影到軸上，就得軸 AB 的移动速度. 当移动速度的指向与軸的指向相反时，則移动速度为負. 衡量移动速度的单位与衡量速度的单位相同，即 $1\,\mathrm{cm\cdot sek^{-1}}$.

5. 一个物体点的速度球和零軸 为了求出通过物体点 A 的所有各軸的同时移动速度，必須把点 A 的速度 AA_0 投影到所有这些軸上. 因而直徑为 AA_0 的球在每一个通过点 A 的軸上截出綫段 AD(图 2)，其大小和指向表达出这个軸的移动速度. 如果通过点 A 而不在同一平面上的三个軸的移动速度为已知，則物体点 A 的速度球就确定了，因为經过点 A 和三个表达移动速度的綫段的端点只能作出一个球，而这个球的直徑 AA_0 确定点 A 的速度. 当观察的时刻，移动速度等于零的点 A 各軸在平面 AE 上形成射綫束 A，这一平面 AE 与速度球相切于 A. 这些軸称为点 A 的零軸，而平面 AE 称为点 A 的零平面. 点 A 的两个零軸决定点 A 的零平面. 如果一点的三个零軸不在同一平面上，則这点当观察的时刻是靜止的. 如果一个平面上的三个零軸不交于一点而交于 A, B, C 三点，則这个平面上的每一点 D 是零点，而平面上每一个軸是零軸. 当物体繞着一个在平面 ABC 上的靜止軸旋轉时，就出现这种特殊情况.

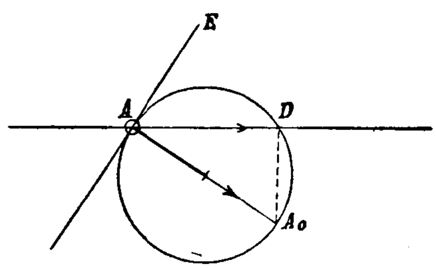

图 2

6. 两軸的矩 設 AB 和 CD(图 3 和 4)为彼此剛接的两个軸，它們的最短距离为长度 a. 为了要确定这两个軸的相对位置，可以利用图中所表示的以 a 为半徑的圆柱体. 在第一种位置中(图 3)軸 AB 与圆柱軸重迭并指向上方，而軸 CD 在前方与圆柱体相切于 F 点. 第二种位置(图 4)乃由第一种位置通过两軸的交换而产生. 为了使这两个軸由第一种位置轉变到第二种位置，先給它們一个平行移动，使 F 移到 E 和 E 移到 G，然后給予一个以 FG 为轉軸而角度为 DFB 的左向轉动，最后再繞圆柱軸轉过 180°. 在这两种位置中，可以把前方的軸当作时钟的分針而把后方的軸当作时钟的时針. 由这两个針之間的距离 a 和由时針向

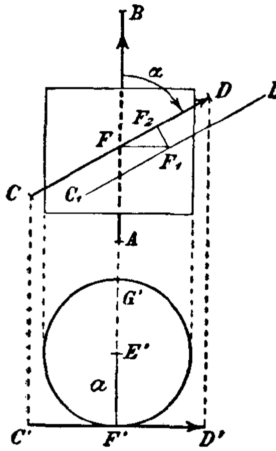

图 3

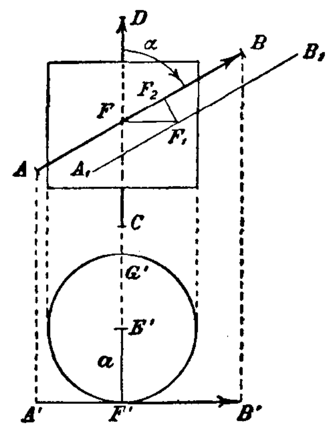

图 4

分針按时钟的指向所轉出的角 α，就能完全决定这两个軸彼此之間的相对位置．$a\cdot\sin\alpha$ 的量称为两軸的矩，并以 $[AB, CD]$ 或 $[CD, AB]$ 表示之．矩的正負号决定于角 α 的正弦．于此可見，当用这样的表达方法时，两軸的先后次序完全可以随便．如果两軸在同一平面上，則矩等于零．

7．力的功速度和靜力矩 以 p 表示 AB, CD 两軸（图 3 和 4）中的一个軸，以 q 表示另一个軸，并使軸 q 与圓柱軸按指向重迭．給物体以一个轉动速度，并以一个在軸 q 上的正綫段 Q 表示之．于是，軸 p 上的点 F 在无限小的时間 dt 內以速度 Qa 走过一段无限小的路程

$$FF_1 = Qa\,dt.$$

速度 Qa 在軸 p 上的投影为：

$$Qa\sin\alpha = Q[p,\ q].$$

如果綫段 Q 的符号改变，則軸 p 的移动速度同时也改变符号；因此，軸 p 的移动速度称为綫段 Q 对于軸 p 的矩，并以 $[p, Q]$ 或 $[Q, p]$ 表示之．当确定这个量

$$[p,\ Q] = Q[p,\ q] = Qa\sin\alpha \tag{1}$$

时，要考虑到 Q 和 $\sin\alpha$ 的符号．

如果有一个力作用在这个轉动的物体上，而这个力按大小和指向以軸 p 上綫段 P 表示之，則力 P 与軸 p 的移动速度的乘积 $PQa\sin\alpha$ 称为力 P 的功速度*；它形成两綫段 P, Q 的矩并以

$$[P,\ Q] = PQ[p,\ q] = PQa\sin\alpha \tag{2}$$

表示之．这个量的单位是 $1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sek}^{-1}$，而它的符号决定于三个量 P, Q 和 $\sin\alpha$ 的符号．当力具有軸 p 的移动速度的指向时，則力的功速度为正．

力 P 对于軸 q 的虛矩或靜力矩以 $[q, P]$ 或 $[P, q]$ 表示之．若以不名数 $+1$（就是說以軸 q 的值）代替轉动速度 Q，則由功速度 $[P, Q]$ 产生出力 P 对于軸 q 的虛矩或靜力矩．因此，这个矩的量为：

* 校者注：确切的名称应当是功率．

$$[q,\ P]=P[p,\ q]=Pa\sin\alpha, \tag{3}$$

它的单位为 1 kg·cm.

剛体的各力之間的关系为一方面而这一物体的各无限小运动之間的关系为另一方面，彼此之間所以存在着相似性，乃由于力和轉动速度的两个基本概念以同样形式包含在功速度 $PQ[p,\ q]$ 的概念中．如果給力 P 或轉动速度 Q 以 $+1$ 的値，則可以从功速度概念中导出移动速度 $Q[p,\ q]$ 和靜力矩 $P[p,\ q]$ 两个概念．这两个概念在那些关系中是并列的．对于在剛体运动的几何定律中賦予移动速度的每一特性，在靜力学中有一靜力矩的相应特性与之对等．

8．在組合运动中的移动速度和一个力組的靜力矩　設先后給予一个剛体繞固定軸 $q_1,\ q_2,\ q_3\cdots$ 以无限小轉动．于是物体点 A 在空間描繪出一个无限小多边形 $ABCDE$ (图 5)．当第一次轉动时物体点由 A 到 B，当第二次轉动时由 B 到 C，依此类推．总的路程綫段 AE 为各綫段的几何和，这些綫段是分别由点 A 当第一次轉动时、由点 B 当第二次轉动时……等等所描繪的．由于 $A,\ B,\ C\cdots$ 各点的距离都是一級无限小的量，因此，当一次无限小轉动时，由这些点所描繪的路程綫段的方向和大小彼此只相差一个二級无限小的量，也就是說，这些綫段的方向相同，大小相等．所以，如果让点 A 每次都从它的原始位置出发作各个单独轉动，然后把它的各个路程綫段几何地加起来，亦就产生多边形 $ABCDE$．因此，物体点的位置变动是与各无限小轉动的次序无关，而且当各轉动不是先后而是同时进行时，結果仍然相同．此时，物体点 A 的总速度为設想这点当每一单独轉动时所得的速度的几何和．由此得出：当各个轉动同时进行时，軸 p 的移动速度等于它当各个单独轉动时所产生的各移动速度的代数和，也就是說：

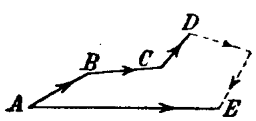

图 5

$$[p,(Q)]=[p,\ Q_1]+[p,\ Q_2]+[p,\ Q_3]+\cdots, \tag{4}$$

其中 (Q) 表示轉动速度綫段組 $Q_1,\ Q_2,\ Q_3\cdots$；物体的組合运动就是由这个綫段組形成的．

按照同样的方式，由力 $P_1,\ P_2,\ P_3\cdots$ 所組成的力組 (P) 对于軸 q 的靜力矩为各单独矩的代数和：

$$[q,(P)]=[q,\ P_1]+[q,\ P_2]+[q,\ P_3]+\cdots. \tag{5}$$

9．作用于一个剛体的力組的矩綫段　力組 (P) 对于軸 q 的靜力矩 $[q,(P)]$ 以軸 q 上的綫段 Q 表示之．Q 的长度按所选定的矩比例尺决定矩的大小，而 Q 的指向与看矩为右轉的視綫一致．如果把第 5 节中所闡述的移动速度的特性移用于力矩，則得出如下的一些关系：

設在通过点 A 的每一个軸 q 上由点 A 出发作綫段(图 2)

$$Q=[q,(P)]=AD,$$

它按指向和大小表示力組的靜力矩，則所有这些矩綫段的端点 D 在一个球上，这就是点 A 的矩球．球直徑 AA_0 表示点 A 的主矩．設物体作无限小运动，而这一运动可由綫段組 (P) 表示，則点 A 的速度相当于点 A 主矩 AA_0．

点 A 的各个力矩为零的軸 AE 形成平面的射綫束，而这一平面与矩球相切于点 A．

点 A 的两个零軸确定点 A 的零平面．

如果点A的三个零軸不在一个平面上，則所有通过A的軸都是零軸，而A是每一个通过A的平面的零点.

如果在一个平面上的三个零軸不交于一点而交于三点，則平面上的每一个軸都是力組(P)的一个零軸. 在这些关系中，不用考虑各力在它們軸上的位置，亦就是不用考虑各作用点的位置. 力的作用点可以在力軸上任意移动，并不因此而改变靜力矩.

10. 等值綫段組 有两个綫段組(Q)和(S)表示一个剛体的两种同时的轉动速度. 如果它們确定物体相同的运动状态，也就是說，如果两种运动給予每一个与物体剛接的軸u以同样的移动速度

$$[u,(Q)]=[u,(S)], \tag{6}$$

則这两个綫段組称为等值的. 于是，在这两种运动中每一个物体点的速度按大小、方位和指向都是相等的. 这种特性以

$$(Q)\equiv(S) \tag{7}$$

表示之.

如果作用于一个剛体的两个力組(P), (R)对于每一个軸u的靜力矩是相等的，即

$$[u,(P)]=[u,(R)],$$

則这两个力組(P), (R)同样称为等值的:

$$(P)\equiv(R). \tag{8}$$

11. 一个綫段組的坐标 不在一条直綫上的三个物体点A, B, C确定一个剛体的位置. 因此，A, B, C三点在每一时刻的速度确定所有其余各物体点的同时刻速度. 如果有一个与物体剛接的任意四面体$ABCD$，其六条边的移动速度为已知，則一个剛体的运动状态是已知的，亦就是所有各物体点的同时刻速度全部为已知. 这六边的移动速度对于作出三个物体点A, B, C的速度球是足够的，而且也是必要的. 三个軸DA, DB, DC的移动速度又确定第四个物体点D的速度球，并且由于在第五个物体点E连接到四面体四頂点的四个軸EA, EB, EC, ED中无論如何至少有三个軸不在同一平面上，所以可以由那四个軸的移动速度作出速度球E，而那四个軸的移动速度是由四个速度球A, B, C, D所規定的. 因此，如果两个轉动速度組(Q), (S)給四面体的六边中的每一边以相等的移动速度，則这两个組是等值的.

如果作用于一个剛体的两个力組(P), (R)对于四面体六边中的每一边的靜力矩相等，則这两力組(P), (R)同样是等值的. 与物体剛接的四面体的形状和位置可以随意选定. 对于解析方法的探討而言，最合适的是由三个坐标平面和一个无限远的平面所形成的无限大的四面体. 但是，对于几何的表达而言，反而以有限大小的四面体为宜. 通常采用一个如图6和7所示的形式. 以x, y, z, x', y', z'依次表示与四面体各边AB, AC, AD, CD, DB, BC連同指向相重迭的各軸. 四面体的三条边AB, AC, AD相互垂直并同样各具有$\sqrt{2}$倍的

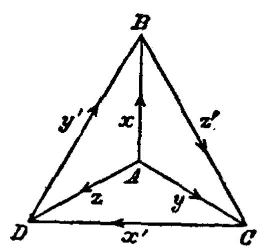

图 6

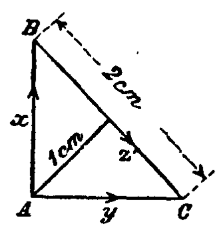

图 7

单位长度，即 1.414 cm. 因此，CD, DB, BC 各边的长度为 2 cm，而相互垂直的各軸 x 和 x', y 和 y', z 和 z' 之間的最短距离都是 1 cm. 各軸指向的选擇，以使三个矩 $[x, x']$, $[y, y']$, $[z, z']$ 的値各为正値 $+1$ cm 为准. 必須注意的是，所有其余軸偶的矩，例如 $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, y']\cdots$ 等，都等于零，因为每两个軸都在同一个平面上. 因此，一个由六个綫段 X, Y, Z, X', Y', Z' 所組成的 (K) 組对于 x, y, z, x', y', z' 各軸的矩为：

$$\left.\begin{array}{ll} [x,(K)]=[x, X']=X'\cdot 1\,\mathrm{cm}, & [y,(K)]=[y, Y']=Y'\cdot 1\,\mathrm{cm}, \\ [z,(K)]=[z, Z']=Z'\cdot 1\,\mathrm{cm}, & [x',(K)]=[x', X]=X\cdot 1\,\mathrm{cm}, \\ [y',(K)]=[y', Y]=Y\cdot 1\,\mathrm{cm}, & [z',(K)]=[z', Z]=Z\cdot 1\,\mathrm{cm}. \end{array}\right\} \tag{9}$$

如果 (K) 組和已知綫段組 (Q) 滿足下列六个条件：

$$\left.\begin{array}{lll} [x,(K)]=[x,(Q)], & [y,(K)]=[y,(Q)], & [z,(K)]=[z,(Q)], \\ [x',(K)]=[x',(Q)], & [y',(K)]=[y',(Q)], & [z',(K)]=[z',(Q)], \end{array}\right\} \tag{10}$$

則 (K) 組与 (Q) 組是等値的，即

$$(K)\equiv(Q).$$

因此，(K) 組的綫段具有下列各値：

$$\left.\begin{array}{lll} X'=\dfrac{[x,(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}, & Y'=\dfrac{[y,(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}, & Z'=\dfrac{[z,(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}, \\ X=\dfrac{[x',(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}, & Y=\dfrac{[y',(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}, & Z=\dfrac{[z',(Q)]}{1\,\mathrm{cm}}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

在四面体各边 x, y, z, x', y', z' 上的六个綫段 X, Y, Z, X', Y', Z' 称为綫段組 (Q) 的**四面体坐标**. 显然，这六个綫段与 (Q) 組的各綫段是同类的. 如果 (Q) 組的各綫段表示剛体的无限小运动，則这六个綫段就表示繞四面体各边同时轉动的速度；如果 (Q) 为一个作用于剛体的力組，則这六个綫段就表示六个力.

如果两个同类綫段組 (P) 和 (R) 对于同一个四面体具有相等的坐标，或者，換句話說，如果这两个綫段組与一个坐标組 (K) 等値，則按以上所述这两个綫段組是等値的.

12. 力組的功速度 設有一已知力組 (P) 作用于一剛体，在一个已知的时刻給予这个剛体以运动 (Q)，就是說給以一組已知的轉动速度. 力組 (P) 的功速度为各个力的功速度的代数和，即两个綫段組 (P), (Q) 的矩，因而以 $[(P),(Q)]$ 表示之. 此外，再以 X, Y, Z, X', Y', Z' 表示运动 (Q) 的坐标，以 X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1, Z'_1 表示力組 (P) 的坐标. 当运动 (Q) 时，一个集中力 P 具有移动速度

$$[p,(Q)]=[p, X]+[p, Y]+[p, Z]+[p, X']+[p, Y']+[p, Z'],$$

因而也就具有一个其量为 $P[p,(Q)]$ 的功速度. 如果注意到：

$$P[p, X]=PX[p, x]=X[x, P],$$
$$P[p, Y]=PY[p, y]=Y[y, P],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則可得出：

$$P[p,(Q)]=X[x, P]+Y[y, P]+Z[z, P]+X'[x', P]+Y'[y', P]+Z'[z', P].$$

如果按这个公式把組成(P)組的各个集中力$P_1, P_2, P_3\cdots$的功速度写出来，并考慮到力組(P)的各靜力矩是由下列方程式所确定：

$$[x,(P)]=[x, P_1]+[x, P_2]+\cdots=1\,\mathrm{cm}\cdot X'_1,$$
$$[y,(P)]=[y, P_1]+[y, P_2]+\cdots=1\,\mathrm{cm}\cdot Y'_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則力組(P)的功速度的值为：

$$[(P),(Q)]=1\,\mathrm{cm}(XX'_1+YY'_1+ZZ'_1+X'X_1+Y'Y_1+Z'Z_1). \tag{12}$$

这个方程指出：各等值力組对于各等值运动具有相等的功速度.

按方程(12)，每一个矩可以用形成矩的各軸和各綫段的坐标来表示.

13. 等值綫段組到一个平面上或者到一个軸上的直角投影 以(P_1)，(Q_1)表示两个等值組(P)，(Q)到一个平面α上的直角投影，并选擇一个坐标四面体$ABCD$，它的各边CD, DB, BC或x', y', z'在平面α上，而AB, AC, AD或x, y, z各边与α成直角方向，也就是相交于无限远的点A. 对于x, y, z中每一个軸而言，一个綫段P的矩等于它的投影P_1的矩；因此，四个綫段組(P)，(Q)，(P_1)，(Q_1)对于这三个軸的矩都是相等的. 此外，对于x', y', z'中的每一軸而言，两綫段組(P_1)，(Q_1)的矩都等于零. 由此得出：等值綫段組的直角投影是等值的，即

$$(P_1)\equiv(Q_1).$$

如果在任何一个軸v的方位中給剛体以一个速度为V的平行移动，則作用于物体的一个力組(P)的功速度是等于速度V与各力P到軸v上投影代数和的乘积. 因此，各等值力組对于每一个軸具有相等的投影.

若把这种特性移用于轉动組，則得出：各等值綫段組对于每一个軸具有相等的投影，因而亦具有相等的几何和. 今后就用如下的記号

$$(Q)\equiv(S)\equiv G \tag{13}$$

来表示两个同类型的綫段組(Q)和(S)具有同一的几何和G. 为了确定几何和G，作出六个坐标到彼此成直角的軸x, y, z上的投影：

$$\left.\begin{aligned}G_x&=X+(Y'-Z')\sqrt{\frac{1}{2}},\\ G_y&=Y+(Z'-X')\sqrt{\frac{1}{2}},\\ G_z&=Z+(X'-Y')\sqrt{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

于是，由公式

$$G=\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2} \tag{15}$$

求出几何和的长度.

14. 一个綫段和一个軸的坐标 如果力P所作用的物体圍繞靜止軸p旋轉，則力P不完成任何功. 因此，不管綫段P表达一个力或者一个轉动速度，它的坐标是相互关联的，并

可按照方程(12)由下述条件来表达:

$$[P, P]=2\,\mathrm{cm}(XX'+YY'+ZZ')=0$$

或者

$$XX'+YY'+ZZ'=0. \tag{16}$$

由此可見,一个綫段P是被五个坐标 X, Y, Z, X', Y'所确定的，而第六个坐标則由方程

$$Z'=-\frac{XX'+YY'}{Z} \tag{17}$$

求得.

如果以P的值去除綫段P的坐标,則产生六个不名数:

$$\frac{X}{P}=x,\quad \frac{Y}{P}=y,\quad \frac{Z}{P}=z,\quad \frac{X'}{P}=x',\quad \frac{Y'}{P}=y',\quad \frac{Z'}{P}=z', \tag{18}$$

它們形成一个綫段的坐标,这个綫段是在軸p上,而其値为:

$$\frac{P}{P}=+1;$$

与第2节相一致,这些坐标称为軸p的坐标. 一个軸的六个坐标是由两个条件彼此相联系着的. 由于这六个坐标表达一个单独綫段,所以按方程(16)是:

$$xx'+yy'+zz'=0, \tag{19}$$

且因它們的几何和等于 $+1$, 所以按方程(14)和(15)必然是:

$$\left[x+(y'-z')\sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2+\left[y+(z'-x')\sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2+\left[z+(x'-y')\sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2=1. \tag{20}$$

15. 力偶和轉偶 如果一个綫段組的几何和等于零,則它的六个坐标按方程(14)必須滿足下列三个条件:

$$\left.\begin{aligned} X+(Y'-Z')\sqrt{\frac{1}{2}}=0,\\ Y+(Z'-X')\sqrt{\frac{1}{2}}=0,\\ Z+(X'-Y')\sqrt{\frac{1}{2}}=0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

所以，这样一个綫段組要由三个与这些条件无关的坐标加以确定. 如果这里暂不考虑六个坐标中每一个都是等于零的特殊情况,則綫段組与一个单独綫段U等値,因为条件(16)已包含在方程(21)中. 綫段U的量等于零,但是它的距离无限大, 因为它的一些矩, 例如对于各坐标軸而言的矩, 具有有限値. 所以U称为一个无限小而无限远的綫段. 这样一个轉动速度組确定对于一个物体所能給予的最簡单运动,这就是圍繞一个无限远軸u的轉动,亦即一个平行移动, 此时所有各物体点具有等値等向的速度V. 速度V的方位是垂直于在无限远相交于軸u的各平行平面. 共同速度V的大小和方位可由四面体上一个頂点的速度球来确定,也就是例如由相交于頂点A的x, y, z三軸的移动速度$X'\cdot 1\,\mathrm{cm}$, $Y'\cdot 1\,\mathrm{cm}$, $Z'\cdot 1\,\mathrm{cm}$来