

工程振动测量仪器 和测试技术

杨学山 编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程振动测量仪器和测试技术/杨学山编著. —北京:中国计量出版社, 2001.9

ISBN 7-5026-1521-0

I. 工… II. 杨… III. 振动测试仪器—实验 IV. TH825-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063371 号

内 容 提 要

本书就工程振动测量仪器和工程振动有关的实验技术作了较为系统的叙述。全书共分 18 章。主要内容包括工程测振仪基本理论;与工程测振有关的各种拾振器;与工程振动有关的各种激振设备;工程测振仪的校准;工程振动测量中的实验技术。本书侧重于土木建筑工程中的低频或超低频振动测量仪器和实验技术。

本书可作为研究生专业教材,也可供科研单位有关人员、工程技术人员和大专院校有关专业的师生参考。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm × 1092 mm 16 开本 印张 16.75 字数 401 千字

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

*

印数 1—3000 定价:25.50 元

前 言

工程领域中振动问题的研究愈来愈受到工程界的重视,因而工程振动测量仪器设备研制和实验技术的研究伴随科学技术的进步发展颇快。随着工程领域中高柔建筑结构和特殊工程结构的大量涌现,工程振动测量仪器要求向宽频带、大动态、超低频、大位移、多功能和智能化方向发展,相关的实验方法和技术研究也倍受工程界的重视。作者及工程力学研究所其他从事该领域研究的科技人员几十年致力于这方面的研究,研制成功几十种工程振动测量仪器和设备,其中包括各种伺服式拾振器、伺服式超低频振动标准,从理论和实践上解决了(超)低频、高频和测量量程的扩展,解决了与之相关的测量方法,同时也为土木工程振动测量提供了新手段。本书除反映了作者及其合作者们的研究成果,还收集和总结了国内外最新资料。特别是吸收了国内从事工程振动测量仪器和实验技术研究者在实践中取得的宝贵经验。

在振动测量、传感器等方面,国内外专家出版了各具特色的专著。编著本书的目的是试图将与工程振动有关的低频、超低频测振仪、各类伺服式拾振器、激振器、振动测量设备和工程实验技术方法融汇贯通,使得工程技术人员了解有关仪器性能原理,合理地去选择振动测量仪器。帮助从事仪器研制人员了解工程振动中的问题,以便有的放矢地研制适合工程应用的振动测量仪器。

本书共分两部分。第一部分由13章组成,重点介绍各类工程振动测量传感器、放大器、工程强震仪、各类激振设备以及各类工程测振仪的标定方法。第二部分由5章组成,主要介绍工程测振仪的系统配置和正确使用;滤波陡度和采样率的合理选择;场地振动测量、波速测量、基桩检测、基础振动测量等。

本书初稿完成于1999年8月。1999年8月至2000年10月先后在工程力学研究所和中国地震局干部培训中心为研究生和有关技术人员讲授过。现在的版本是在上述基础上经修改扩充而成。

本书所涉及到的许多工程振动测量仪器设备,在研制过程中得到了科技部、中国地震局及其他部委的资助。

在编著过程中,得到了黄振平、黄浩华、舒毓龙、黄龙生等教授的大力支持,并提出了许多宝贵的意见,在此一并表示感谢。

由于编写时间仓促,作者水平有限,难免存在不少缺点和错误,诚恳希望读者不吝赐教。

作者

2001年10月于哈尔滨

目 录

第一部分 工程振动测量仪器设备

第一章 工程测振仪的基本理论	(3)
第一节 简谐振动.....	(3)
第二节 单自由度阻尼自由振动和强迫振动.....	(6)
第三节 摆系统	(19)
第四节 弹性元件	(25)
第五节 磁路设计	(27)
第六节 阻尼器	(39)
第二章 电动式拾振器	(43)
第一节 电动式拾振器的基本原理	(43)
第二节 电动式拾振器的类型	(43)
第三节 惯性式电动拾振器的强迫振动	(45)
第四节 位移摆速度拾振器	(46)
第五节 速度摆加速度拾振器	(49)
第六节 加速度摆加速度(或加速度一次微分型)拾振器	(51)
第三章 电容式拾振器	(52)
第一节 电容式拾振器的工作原理	(52)
第二节 电容传感器的几种形式	(53)
第三节 拾振器的几种形式	(55)
第四节 电容传感式拾振器的测量线路	(56)
第四章 伺服式拾振器	(61)
第一节 无源伺服式拾振器	(61)
第二节 动圈换能有源伺服式加速度拾振器	(66)
第三节 动圈换能有源伺服式速度拾振器	(69)
第四节 电容换能伺服式加速度拾振器	(71)
第五节 电容传感伺服式三输出拾振器	(73)
第五章 电阻式拾振器	(75)
第一节 电阻应变片(又称应变计)的工作原理	(75)
第二节 电阻应变式拾振器的类型	(76)
第三节 电位器式拾振器	(81)
第六章 电涡流式拾振器	(83)
第一节 电涡流式拾振器的基本原理	(83)
第二节 电涡流式位移拾振器的结构型式	(84)

第七章 压电式拾振器	(88)
第一节 压电效应	(88)
第二节 压电式传感器的等效电路	(90)
第三节 压电式加速度传感器	(91)
第八章 磁敏器件及其拾振器	(99)
第一节 磁敏晶体管	(99)
第二节 磁敏晶体管拾振器	(105)
第九章 光导纤维式拾振器	(107)
第一节 光纤拾振器的构成与原理	(107)
第二节 光纤位移拾振器	(107)
第三节 光纤加速度拾振器	(110)
第四节 几种新型光纤传感器介绍	(113)
第十章 工程强震仪	(116)
第一节 电流计记录式强震仪和光直记式强震仪	(116)
第二节 磁带记录式强震仪	(117)
第三节 固态存储式数字强震仪	(120)
第十一章 振动激励设备和激振技术	(123)
第一节 激振设备的用途和分类	(123)
第二节 机械式激振器和机械式振动台	(125)
第三节 电动力式振动台和电动力式激振器	(126)
第四节 闭环伺服电动力式振动台	(129)
第五节 液压式振动台和激振器	(134)
第六节 小型火箭筒	(135)
第七节 冲击力锤	(135)
第八节 冲击试验与冲击试验台	(137)
第九节 自由落锤	(138)
第十二章 测振放大器	(140)
第一节 放大器	(140)
第二节 微积分电路	(143)
第三节 滤波器	(144)
第四节 几种测振放大器	(148)
第十三章 拾振器和工程测振仪的校准	(154)
第一节 零频式拾振器的静态校准	(154)
第二节 绝对校准法	(156)
第三节 相对校准法(比较校准法)	(160)
第四节 自标定法	(162)
第五节 超低频大振幅拾振器的校准	(165)

第二部分 土木工程中的实验技术

第十四章 工程测振仪系统基础	(169)
第一节 工程测振仪的技术性能	(169)
第二节 常用工程测振仪器系统配置	(170)
第三节 土建工程振动测量中滤波陡度的合理选择	(171)
第四节 采样率的合理选择	(175)
第五节 仪器的安装固定	(178)
第十五章 工程振动测量中参量和仪器的选择	(182)
第一节 工程振动的振源	(182)
第二节 一般结构工程振动测量中参量和仪器的选择	(184)
第三节 超低频振动测量中振动参量和仪器的选择	(188)
第十六章 场地振动测量	(192)
第一节 地微振(常时微振)测试	(192)
第二节 波速测试方法	(198)
第十七章 基础振动测试	(217)
第一节 块体基础振动测试	(217)
第二节 机器基础的允许振动幅值	(227)
第十八章 桩基动测	(232)
第一节 概述	(232)
第二节 动力参数法	(234)
第三节 共振法	(238)
第四节 机械阻抗法	(241)
第五节 锤击贯入法	(248)
第六节 水电效应法	(250)
第七节 打桩分析仪法	(251)
参考文献	(259)

第一部分 工程振动测量仪器设备

第一章 工程测振仪的基本理论

第一节 简谐振动

一、简谐振动的特征

周期振动可以视为一个物体或质点相对于基准位置作往复运动,在一定的时间间隔 T (周期)后,运动自身精确地重复。周期振动可用它的振动位移 $x(t)$ 为时间 t 的函数关系来表示:

$$x(t) = x(t + T) \quad (1-1)$$

周期振动的波形可以是各种各样的。最简单形式是单自由度体系正弦或余弦振动,即简谐振动。典型例子是单摆和弹簧悬挂重荷(质量—弹簧系统)的振动,见图 1—1。

把质点 m 的位移运动规律用时间作横坐标绘成曲线,如图 1—2。

T 代表振动周期,即两个相邻的、完全相同的运动状态所经过的时间。周期的倒数称为频率。

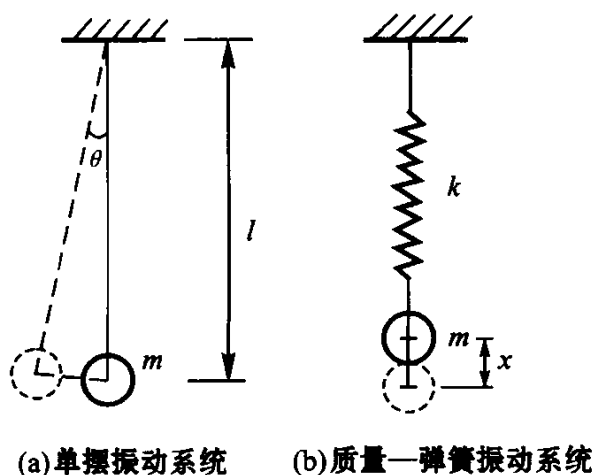


图 1—1 单自由度简谐振动

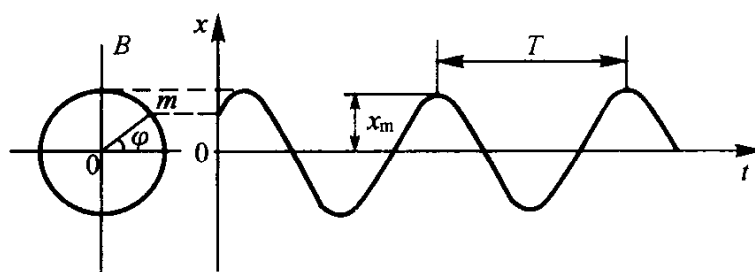


图 1—2 简谐振动曲线

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-2)$$

振动的大小可用振动的参量如位移、速度和加速度等不同量值来表征。只要是简谐振动,各参量之间就有固定的数学关系。如果位移用 x 表示,时间用 t 表示,则简谐振动数学关系式可表示为

$$x = x_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (1-3)$$

(1—3)式也可写成:

$$x = x_m \sin(2\pi f t + \varphi) = x_m \sin(n_0 t + \varphi) \quad (1-4)$$

式中： n_0 为角频率 $= 2\pi f$ ； x_m 为离开基准位置的最大位移； φ 为初相位角。
简谐振动的数学关系式也可用余弦来表示：

即
$$x = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

若图 1—2 所示的波形为正弦波形，且其初相位 $\varphi = 0$ ，这时振动方程为

$$x = x_m \sin(n_0 t) \quad (1-5)$$

由于运动物体（或质点）的速度是位移对时间的变化率，即是对时间的一次导数，所以振动过程也可以用速度表示，由式（1—5）可得

$$v = \frac{dx}{dt} = n_0 x_m \cos(n_0 t) = v_m \cos(n_0 t) = v_m \sin\left(n_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-6)$$

式中： $v_m = n_0 x_m = 2\pi f x_m$ 。

同样，运动物体（或质点）的加速度是速度对时间的变化率，即位移对时间的二次导数。

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -n_0^2 x_m \sin(n_0 t) = -a_m \sin(n_0 t) = a_m \sin(n_0 t + \pi) \quad (1-7)$$

式中： $a_m = n_0^2 x_m = 4\pi^2 f^2 x_m$ 。

从式 1—5, 6, 7 可以看出，简谐振动的位移、速度、加速度的振动形式基本上是相似的，其周期完全相同，差别只是相位角和幅值不同。它们的相位角的关系是：速度超前位移 $\frac{\pi}{2}$ （即 90° ）的相位角；加速度超前位移 π （即 180° ）相位角，也就是与位移振动方向相反；加速度超前速度 $\frac{\pi}{2}$ （即 90° ）的相位角。幅值 x_m 、 v_m 和 a_m 用以作为振动大小的特征量，可以看出：速度幅值 v_m 与位移幅值之比等于一个角频率 n_0 ；加速度幅值 a_m 与速度幅值 v_m 之比等于一个角频率 n_0 ，与位移幅值 x_m 之比为 n_0^2 。所以，只要研究的振动是简谐振动，则用峰值来描述其大小是很方便的，它可以直接用于上述方程中。

二、波形峰值、有效值和平均绝对值的关系

每一个振动量对时间坐标作出的波形，可以得到峰值、峰峰值、有效值和平均绝对值等量值，它们之间存在一定的关系。振动量的描述常用峰值表示，但在研究比较复杂的波形时，只用峰值描述振动过程是不够的。因为峰值只能描述振动大小的瞬时值，不包含产生振动的时间过程。在考虑时间过程时的进一步描述，是平均绝对值和有效（均方根）值。

峰值定义为

$$x_{\text{峰}} = x_m$$

即从波形的基线位置到波峰的距离，也可称为振幅。峰峰值是正峰到负峰间的距离。

平均绝对值的定义为

$$x_{\text{平均}} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$$

有效值定义为

$$x_{\text{有效}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

平均绝对值的使用价值较小，而有效值因与振动的能量有直接关系，所以使用价值较大，

特别是对随机振动的研究,使用价值更大。

简谐振动波形的峰值、有效值和平均绝对值示于图 1—3。

各量之间的关系为

$$x_{\text{有效}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} x_{\text{平均}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_{\text{峰}}$$

这些关系式更通用的形式为

$$x_{\text{有效}} = F_f x_{\text{平均}} = \frac{1}{F_c} x_{\text{峰}}$$

F_f 称为波形因数,

$$F_f = \frac{x_{\text{有效}}}{x_{\text{平均}}} \quad (1-8)$$

F_c 称为波峰因数,

$$F_c = \frac{x_{\text{峰}}}{x_{\text{有效}}} \quad (1-9)$$

F_f 和 F_c 给出了所研究振动波形的指标,对正弦振动,

$$F_f = 1.11 \approx 1\text{dB}$$

$$F_c = 1.414 \approx 3\text{dB}$$

关于波形峰值、有效值和平均绝对值之关系的分析,对位移、速度、加速度和各种信号波形都是适用的。但各种不同波形的 F_f 和 F_c 值是不一样的,有时有很大的差别。例如正弦波、三角波和方波,其 F_f 值与 F_c 值分别列于表 1—1。

表 1—1 三种波形的因数

波 形	系 数	
	波形因数 F_f	波峰因数 F_c
正弦波	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.111$	$\sqrt{2} = 1.414$
三角波	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\sqrt{3} = 1.732$
方 波	1.000	1.000

三、简谐振动方程式

如图 1—1 所示的质量—弹簧振动体系,忽略弹簧质量,根据达朗贝尔原理,可以得出无阻尼单自由度系统的自由振动运动方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1-10)$$

式中:第一项是惯性力,第二项是弹性力。

设 $n_0^2 = \frac{k}{m}$ 则(1—10)式可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n_0^2 x = 0 \quad (1-11)$$

方程(1—11)为二阶常系数线性齐次微分方程,它的解为

$$x = A_1 \cos n_0 t + A_2 \sin n_0 t \quad (1-12)$$

或

$$x = A \sin(n_0 t + \varphi) \quad (1-13)$$

与公式(1—4)比较,式中 $A = x_m$, 即最大位移。这就是简谐振动经常用的一种简单形式通解,也是无阻尼自由振动的通解。

式中:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (1-14)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1}{A_2} \quad (1-15)$$

四、初位移和初速度对简谐振动的影响

实际振动物体在振动开始往往有初位移和初速度存在,它们的影响可以通过对上述方程的解进行讨论解决。在(1—12)和(1—13)式中的常数 A_1 和 A_2 , 或者 A 与 φ , 都是解方程中的积分常数,它们由振动的初始条件决定,即由初始扰动所给予的初位移和初速度来确定。

设 $t = 0$ 时,初速度为 v_0 ,初位移为 x_0 ,则由式(1—12)及其导数方程可求得:

$$A_1 = x_0, \quad A_2 = \frac{v_0}{n_0}$$

于是(1—12、13、14、15)可写成

$$x = x_0 \cos n_0 t + \frac{v_0}{n_0} \sin n_0 t \quad (1-16)$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{n_0^2}} \sin \left(n_0 t + \arctan \frac{x_0 n_0}{v_0} \right) \quad (1-17)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{n_0^2}} \\ \varphi &= \arctan \frac{x_0 n_0}{v_0} \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

由(1—18)式可知,振幅 A 及初相位角 φ 由初位移 x_0 和初速度 v_0 决定。所以同一物体(质点)的简谐振动系统,由于初始条件不同,能够有各种振幅及各种初相位的振动,而振动频率是相同的。

第二节 单自由度阻尼自由振动和强迫振动

一、单自由度阻尼自由振动

在质量—弹簧振动系统中增加一个阻尼器,如图 1—4 中 b 以产生粘性阻尼力,即

$$F_{\text{阻}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

阻尼力的方向与速度方向相反,其大小与速度成正比例,这种阻尼称为粘性阻尼。因此,

可得出单自由度阻尼自由振动的运动方程：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1-19)$$

为书写方便,用符号 $\ddot{x}$ 代替 $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\dot{x}$ 代替 $\frac{dx}{dt}$, 并设 $n_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\epsilon = \frac{b}{m}$,

代入(1—19)得

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + n_0^2 x = 0 \quad (1-20)$$

式中: n_0 为无阻尼自由振动圆频率; ϵ 为阻尼系数。

方程(1—20)是普通的常系数线性微分方程,其解为

$$x = Ae^{rt} \quad (1-21)$$

式中: A 和 r 是系数。

将(1—21)代入(1—20)得特征方程式

$$r^2 + 2\epsilon r + n_0^2 = 0 \quad (1-22)$$

它的两个解

$$r_{1,2} = -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - n_0^2} \quad (1-23)$$

根据 ϵ 与 n_0 的数学关系可以得到 3 种情况:

即 $\epsilon = n_0$; $\epsilon < n_0$ 和 $\epsilon > n_0$ 。在讨论之前先引入一个物理概念

$$D_1 = \frac{\epsilon}{n_0} = \frac{b}{2\sqrt{mk}} \quad (1-24)$$

D_1 是一个无量纲阻尼系数之比,简称阻尼比或阻尼常数。

当 $\epsilon = n_0$ 时 $D_1 = 1$ 称为临界阻尼,这时阻尼系数称为临界阻尼系数用 ϵ_c 表示

$$\epsilon_c = n_0$$

当 $\epsilon < n_0$ 时 $D_1 < 1$,称为小阻尼;当 $\epsilon > n_0$ 时 $D_1 > 1$,称为大阻尼。

下面对这 3 种情况进行讨论。

1. 临界阻尼状态

在临界阻尼时,特征方程有两个相同的负实根 $r = -\epsilon$,则微分方程的解为

$$x = A_1 e^{-\epsilon t} + A_2 t e^{-\epsilon t} = e^{-\epsilon t} (A_1 + A_2 t) \quad (1-25)$$

这时,振动是非周期性的,其运动方式只与初始条件有关。系数 A_1, A_2 可由初始条件决定。

在 $t = 0$ 时, $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$, 则 $A_1 = x_0, A_2 = \dot{x}_0 + \epsilon x_0$

$$x = e^{-\epsilon t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \epsilon x_0)t] \quad (1-26)$$

图 1—5 中(a)、(b)、(c)、(d)4 种图形是对应 3 种初始条件时的 4 种运动情况。

图 1—5a, $\dot{x} = 0$, 故在 $t = 0$ 时, $x(t)$ 的曲线有水平切线,质量 m 从 x_0 这个位置单调减小,并逐渐回到平衡位置。

图 1—5b, $\dot{x} > 0$, 存在正向动能,质量 m 首先偏离到某一极值位置 $x_m (x_m > x_0)$, 然后逐渐回到平衡位置,不通过基线。

图 1—5c, $\dot{x} < 0$, 存在反向功能,质量 m 从 x_0 这个位置加速减小并趋于平衡位置,但不通过基线。

图 1—5d, $\dot{x}_0 \ll 0, |\dot{x}_0|$ 较大,反向动能较大,质量 m 从 x_0 位置急剧下降,并通过基线达到 $-x_m$, 然后又逐渐回复到平衡位置。

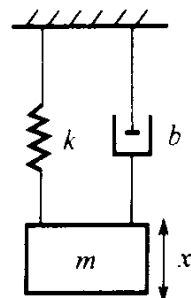


图 1—4 单自由度阻尼自由振动

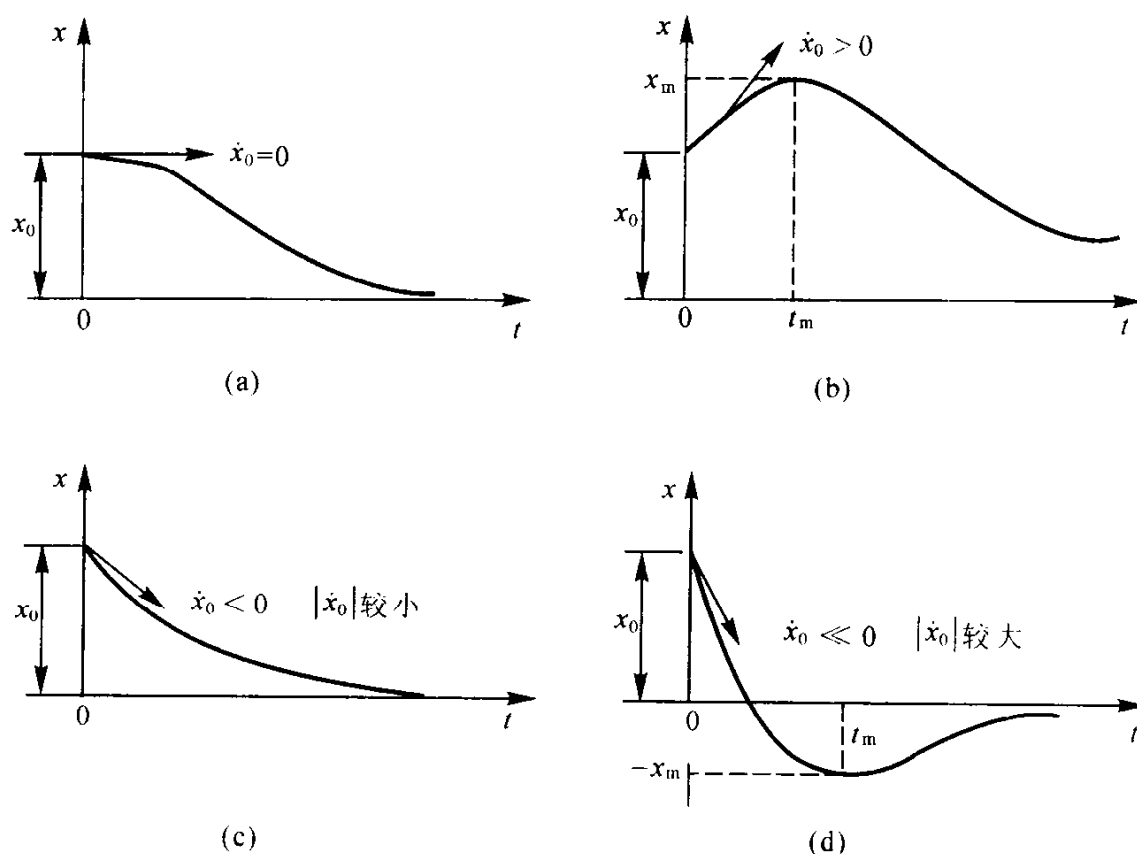


图 1—5 临界阻尼和大阻尼时的 4 种运动情况

2. 大阻尼状态

当 $\epsilon > n_0$ 时, $D_1 > 1$, 称为大阻尼情况, 这时粘性阻尼力系数 b 大于临界阻尼系数 $\epsilon_{c.c.}$ 则特征方程式(1-22)的两个根为

$$r_1 = -\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - n_0^2} \quad r_2 = -\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - n_0^2}$$

命 $B = \sqrt{\epsilon^2 - n_0^2}$ $r_1 = -\epsilon + B$ $r_2 = -\epsilon - B$

运动方程的解为

$$x = e^{-\epsilon t} (A_1 e^{Bt} + A_2 e^{-Bt}) \quad (1-27)$$

引入两个任意常数 C_1 与 C_2 代替 A_1 与 A_2

$$2A_1 = C_1 + C_2 \quad 2A_2 = C_1 - C_2$$

并且由公式

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

则(1-27)式可改写成

$$x = e^{-\epsilon t} (C_1 \operatorname{ch} Bt + C_2 \operatorname{sh} Bt) \quad (1-28)$$

式中: C_1 和 C_2 由初始条件决定。若 $t=0$ 时, $x = x_0$ $\dot{x} = \dot{x}_0$

则 $C_1 = x_0$ $C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \epsilon x_0}{B}$ 代入(1-28)式

$$x = e^{-\epsilon t} \left(x_0 \operatorname{ch} Bt + \frac{\dot{x}_0 + \epsilon x_0}{B} \operatorname{sh} Bt \right) \quad (1-29)$$

因特征方程的根是负实数, 与临界阻尼一样, x 随时间增长而不断减小, 运动是非周期性的, 它的特征也与图 1—5 曲线相似。

综上所述,无论是临界阻尼或是大阻尼状况,运动都是非周期性的。当初始扰动很小时,系统逐渐趋于平衡,从理论上讲,到达平衡位置的时间需要无限长。在特殊的初始条件时,如反向初速度很大时,系统最多能有一次移到平衡位置另一边,再逐渐回到平衡位置。上面两种情况都不发生振动。

3. 小阻尼状况

小阻尼状况是最重要的情况,因为大多数仪器和结构都是在小阻尼条件下工作。当 $\epsilon < n_0$, 即 $D_1 < 1$ 时,运动方程的解为

$$x = e^{-\epsilon t} (C_1 \cos n_0 \sqrt{1 - D_1^2} t + C_2 \sin n_0 \sqrt{1 - D_1^2} t) \quad (1-30)$$

或

$$x = A e^{-\epsilon t} \sin(n_0 \sqrt{1 - D_1^2} t + \varphi) \quad (1-31)$$

上述式中 C_1 、 C_2 和 A 、 φ 均可由运动初始条件决定。

当 $t=0$ 时: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$

则 $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \epsilon x_0}{n_0 D}$ 代入(1-30)式

$$\text{得} \quad x = e^{-\epsilon t} \left(x_0 \cos n_0 D t + \frac{\dot{x}_0 + \epsilon x_0}{n_0 D} \sin n_0 D t \right) \quad (1-32)$$

式中: $n_0 D = n_0 \sqrt{1 - D_1^2}$ 为阻尼自由振动角频率。

同样可以求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \epsilon x_0}{n_0 D} \right)^2} \quad (1-33)$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_0 n_0 D}{\dot{x}_0 + \epsilon x_0} \quad (1-34)$$

用公式(1-31)和(1-32)表示的振动是指数衰减振动,也就是阻尼自由振动。它的运动图形表示在图 1—6 中。

从图中可以看出, x 周期性的改变符号,它表示质量 m 在平衡位置附近作往复运动,具有振动的性质。这种指数衰减振动不是简谐振动,除了通过平衡位置经历的时间间隔相等外,振

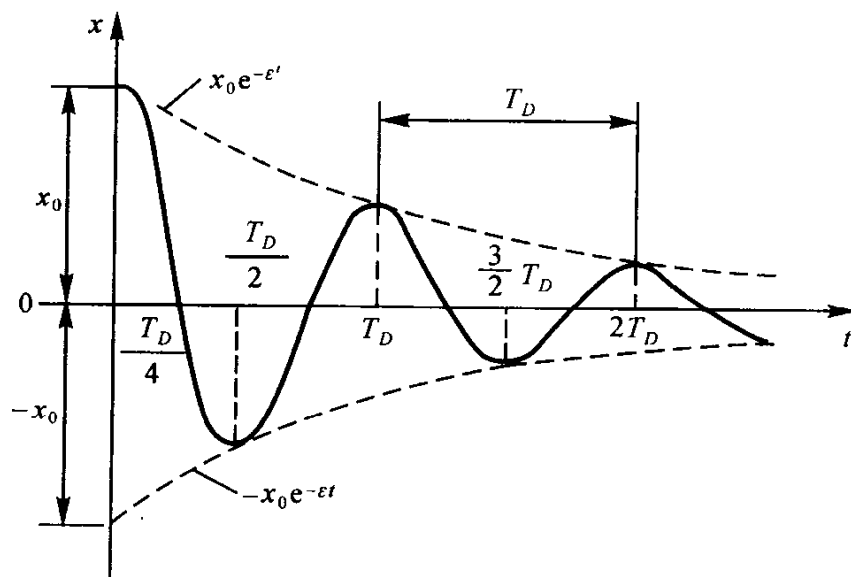


图 1—6 小阻尼自由振动

幅和速度是非周期性的。严格地说,振幅这个名词在这里是不适用的,因为在正弦项前面 $Ae^{-\epsilon t}$ 是逐渐减小的,为了叙述方便起见,我们将 $Ae^{-\epsilon t}$ 称为有阻尼自由振动的振幅,简称振幅。它随时间的增长按指数规律递减,逐渐趋于零。振动衰减曲线的外包络线表示振幅 $Ae^{-\epsilon t}$ 随时间的变化规律。

4. 阻尼自由振动的周期(或频率)和阻尼的计算

由前述知道,阻尼自由振动的周期(或频率)与无阻尼自由振动时的周期(或频率)存在一定的关系,它的变化量与阻尼比 D_1 有关。

(1) 阻尼自由振动的周期(或频率)计算

阻尼自由振动的周期为

$$T_{D1} = \frac{2\pi}{\sqrt{n_0^2 - \epsilon^2}} = \frac{2\pi}{n_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{n_0}\right)^2}} = T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - D_1^2}} = \frac{1}{f_{D1}} \quad (1-35)$$

式中: f_{D1} 为阻尼振动频率。

把阻尼振动频率与无阻尼振动频率之比 u 作纵坐标,用阻尼比 D_1 作横坐标,作出 $f_{D1} = f \sqrt{1 - D_1^2}$ 曲线,其相互关系是一个以 1 为半径的圆弧曲线(图 1—7)。

从图中可以看出,在小阻尼比 $D_1 < 0.2$ 时,有阻尼和无阻尼自振频率是近似相等的。

在 $D_1 < 1$ 时,可以把周期 T_{D1} 的计算式(1—35)用级数展开。

$$T_{D1} = T \left(1 + \frac{1}{2} D_1^2 + \dots \right) \quad (1-36)$$

当阻尼较小时,后面高阶小量可以忽略,故可取级数的前两项。

$$T_{D1} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} D_1^2 \right) \quad (1-37)$$

在 $D_1 = 0.2$ 时,这时阻尼对周期的影响不大。这对测定小阻尼时的结构物自振频率和周期的数据处理是很有意义的。

当然,如果要精确求得无阻尼时的自振频率,可用式(1—35)反推求得。

(2) 阻尼计算

单自由度系统的阻尼计算,在结构和测振仪器的分析中是很重要的。阻尼的计算常常通过衰减振动的过程曲线(波形)振幅的衰减比例来进行计算。衰减振动波形示于图 1—8。用衰减波形求阻尼可以通过半个周期 $\frac{T_{D1}}{2}$ 的相邻两个振幅绝对值之比,或经过一个周期 T_{D1} 的两个同方向相邻振幅之比,这两种基准方式进行计算。通常以相隔半个周期的相邻两个振幅绝对值之比为基准来计算的较多。两个相邻振幅绝对值之比,称为波形衰减系数 ψ 。

a. 对经过半周期为基准的阻尼计算

每经过半周期的振幅的比值为一常量,

$$\psi = \frac{|A_K|}{|A_{K+1}|} = \frac{Ae^{-\epsilon t}}{Ae^{-\epsilon \left(t - \frac{T_{D1}}{2}\right)}} = e^{\frac{1}{2}\epsilon T_{D1}} = e^{\pi \frac{D_1}{\sqrt{1 - D_1^2}}} \quad (1-38)$$

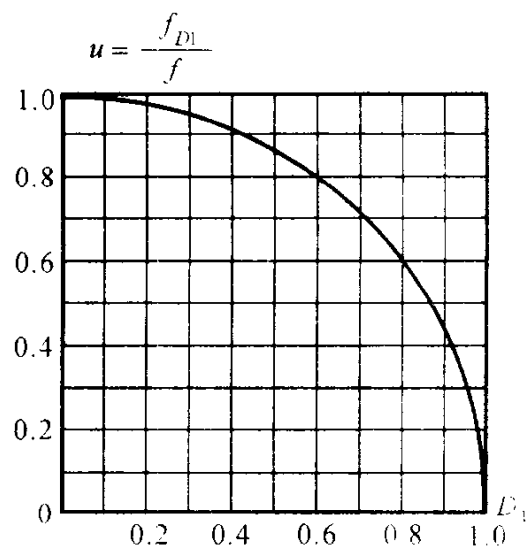


图 1—7 振动频率比 u 与阻尼比的关系曲线
 f_{D1} —阻尼振动频率; f —无阻尼自振频率; u —频率比

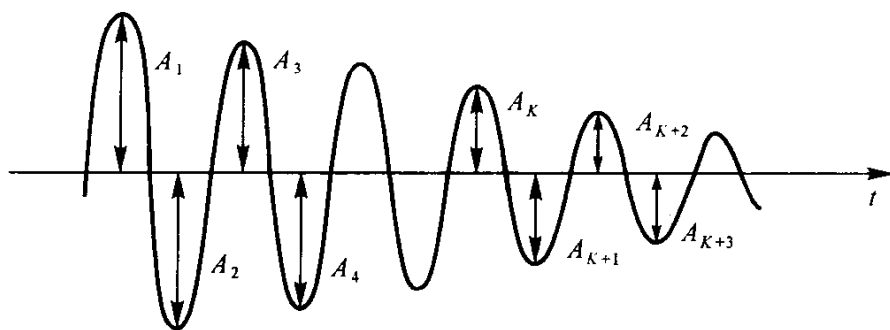


图 1—8 衰减振动波形

这个比例系数 ψ 表示阻尼振动的振幅(最大位移)按几何级数递减。衰减系数 ψ 常用来表示振幅的减小速率。

如果用衰减系数 ψ 的自然对数来表示振幅的衰减则更加方便。

$$\delta = \ln \psi = \ln \frac{|A_K|}{|A_{K+1}|} = \frac{1}{2} \varepsilon T_{D1} = \frac{\pi D_1}{\sqrt{1 - D_1^2}} \quad (1-39)$$

δ 称为振动的对数衰减率。可以利用 δ 来求得阻尼比 D_1 。

$$D_1 = \frac{\delta}{\sqrt{\pi^2 + \delta^2}}$$

引入常用对数

$$\delta_{10} = \lg \psi = \delta \lg e = \ln \psi \lg e$$

$$\lg e = 0.4343, \quad \delta = \frac{\delta_{10}}{\lg e} = 2.303 \delta_{10}$$

便得

$$D_1 = \frac{0.733 \lg \psi}{\sqrt{1 + (0.733 \lg \psi)^2}} = \frac{\lg \psi}{\sqrt{1.862 + (\lg \psi)^2}} \quad (1-40)$$

阻尼比的通常求法就是用式(1—40)来进行计算,为使用方便起见,已将 ψ 和 D_1 的关系系数值列成一套表格,称为 $\psi-D_1$ 表(见文献 2)。因此,只要从衰减振动图上量出 A_K 、 A_{K+1} 之后算出 ψ ,查表就可得出所需之 D_1 值。

b. 在小阻尼时,由于 ψ 很小,这样读数和计算误差较大,所以一般地取相隔若干个波峰序号的振幅比来计算对数衰减率和阻尼比。

$$\psi^n = \frac{|A_K|}{|A_{K+n}|} = e^{\frac{1}{2} n \varepsilon T_{D1}} \quad (1-41)$$

所以

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \psi = \frac{1}{n} \ln \frac{|A_K|}{|A_{K+n}|} \quad (1-42)$$

在实际阻尼波形振幅读数时,由于基线很难处理,阻尼较大时,基线差一点, ψ 就相差很大,所以往往读取相邻两个波形的峰峰值之比,

$$\frac{|A_K| + |A_{K+1}|}{|A_{K+1}| + |A_{K+2}|}$$

在 $\frac{|A_K|}{|A_{K+1}|} = \frac{|A_{K+1}|}{|A_{K+2}|}$ 时,

$$\psi = \frac{|A_K|}{|A_{K+1}|} = \frac{|A_K| + |A_{K+1}|}{|A_{K+1}| + |A_{K+2}|} \quad (1-43)$$

这样,实际阻尼波形读取数值就大为方便,求得阻尼比也更加正确。