高等学校教材

线性系统理论基础

尤昌德 编

电子工业出版社

线性系统理论基础

尤昌德 编

電子工業出版社

内 容 提 要

本书在经典控制理论的基础上系统地介绍了线性控制系统的主要内容。包括状态方程及其解、系统的能控性和能观测性、标准形、典型结构分解、李亚普诺夫第二方法、状态反馈和状态观测器、解耦控制、线性调节器等。

本书在写法上深入浅出，既有必要的数学推证又从物理概念上加以阐述。特别注意和经典控制理论的衔接和对比。书中配有较多的例题、习题和思考题，以帮助读者加深对概念的理解，提高运算技巧。

本书是高等院校电子类自动控制专业《线性系统理论基础》课程的试用教材，也可作为计算机控制、工业自动化、测量仪表、液压控制、热力过程自动化等专业师生和有关科技人员学习现代控制理论的自修读本。

线性系统理论基础

尤昌德 编

责任编辑：王明君

*

电子工业出版社出版 （北京市万寿路）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京科技印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：18.625 字数：430千字

1985年3月第1版 1985年4月第1次印刷

印数：7700 册 定价：3.80 元

统一书号：15290·101

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到"打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学"的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》。中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构。并制定了一九八二——一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材是由计算机与自动控制教材编审委员会自动控制编审小组评选审定并推荐出版的。

该教材由西安交通大学尤昌德编写，西北工业大学戴冠中副教授担任主审。编审者均是依据自动控制编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本课程的参考教学时数为50学时。本着加强基础、突出重点、注重应用的原则，本书以状态空间分析方法为主要内容，详细介绍了状态空间分析法的基本原理和基本方法并在此基础上重点介绍了状态反馈、状态观测器、解耦系统、线性二次型性能指标的最优控制系统的设计。为便于初学者特别是工科大学的学生使用，本书对现代控制理论中的一些概念，在保证理论严密性的前提下，尽可能从理论概念上加以阐述。本书还特别注意与经典控制理论的衔接与对比，突出现代控制理论的特点，使初学者不致被大量的数学推证所困惑，从而较快地掌握其中最基本的概念和原理。本书对某些非基本内容以模块形式出现，作为选学内容，教师组织教学时，可以根据实际学时数，在不打乱全书系统性的情况下灵活处理。本书附有习题和思考题，其意图是帮助读者理解和应用本书所涉及的概念和结论。

在编写本书时，作者参阅了近期国内出版的有关现代控制论的教材、讲义和资料，受益非浅。胡保生教授审阅了本书原始初稿并为本书提出许多宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　　者

一九八四年五月

目　录

绪　　论

随着科学技术的发展，控制系统理论越来越显得重要。它不但在现代工程技术领域中获得广泛的应用，而且在经济学、生物学和医学领域中也受到了极大的重视。可以预料，随着电子数字计算机的发展和广泛应用，将对控制系统理论的发展和应用起着进一步推动作用。因此，学习自动控制系统的基本原理，掌握控制系统理论分析问题的方法和思路，不仅对自动控制专业的学生是必要的，而且对其他专业的学生来说，也是应该的。

一　系统及其分类

所谓系统，是一些部件的组合，这些部件按照一定的规律组合起来完成某项特定的任务。在本书研究的范围内，系统这个概念总是指确定的物理系统。例如导弹的飞行控制系统、飞机的自动驾驶系统、加热炉的温度控制系统等都是为完成预定任务而由一些物理部件所组合起来的一个集合体。

从信息传递的角度看，控制系统是一个信息传递和信息加工的装置。它既有接受外部输入信息的能力，又有输出人们所需要信息的能力。按照系统的这种输入输出关系，系统可以分为线性系统和非线性系统。

如果一个系统满足叠加原理和齐次性条件，那么这个系统就叫线性系统。所谓叠加原理是指当有多个输入同时作用于系统时，这个系统产生的输出等于每个输入单独作用于系统所产生的输出之和。所谓齐次性条件是指当输入放大K倍，相应的输出也放大K倍，这里$K>0$。注意，不能简单地把输入$u(t)$和输出$y(t)$有线性关系的系统都称为线性系统。例如，若$y(t)$和$u(t)$之间存在线性关系

$$y(t)=au(t)+b$$

但该系统却不是一个线性系统。因为当输入分别为$u_1(t)$和$u_2(t)$时，相应的输出为

$$y_1(t)=au_1(t)+b$$
$$y_2(t)=au_2(t)+b$$

然而，当输入为$u_1(t)+u_2(t)$时，其输出为

$$a(u_1(t)+u_2(t))+b\neq y_1(t)+y_2(t)$$

显然，不满足叠加原理。

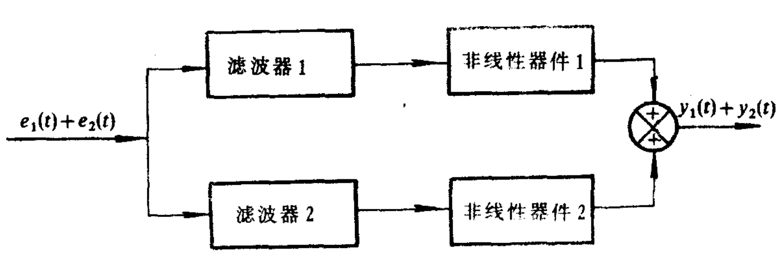

图　0-1

另外，还应说明，对线性系统所提出的叠加性和齐次性这两个要求是独立的。因为有

些非线性系统,尽管满足叠加原理，但并不满足齐次性条件。例如图 0-1 所示非线性系统,其中滤波器 1 和 2 将输入信号分为两个不重叠的频谱带。若 $e_1(t)$ 的频谱完全落在滤波器 1 的通频带以内,而 $e_2(t)$ 的频谱完全落在滤波器 2 的通频带以内,显然,这个系统尽管满足叠加原理,但不满足齐次性条件。

线性系统又分为时变系统和定常系统两类。系统的参数随时间而变化称为时变系统。这种系统常用带时变系数的线性微分方程或差分方程来描述。系统参数不随时间而变化称为定常系统。这种系统常用常系数线性微分方程或差分方程来描述。

二 研究控制系统的两种方法

有两种研究控制系统的方法。即建立在传递函数基础上的经典控制理论和建立在状态空间描述基础上的现代控制理论。经典控制理论的局限性在于：(1) 它只适用于单输入单输出线性定常系统。对于时变系统、复杂非线性系统和多输入多输出系统则是无能为力的。(2)用经典控制理论设计控制系统只能根据幅值裕度、相位裕度、超调量、调节时间等笼统的性能指标来确定校正装置。这种设计方法在很大程度上是人为的。对于同一个要求可以设计出几个性能和质量不同的系统,但无法确定哪种系统是最优的。(3) 经典控制理论在设计时无法考虑初始条件,且不便于使用计算机分析和控制。

近二十年来,科学技术的突飞猛进,特别是空间技术和各类高速飞行器的发展，对控制系统提出了极高的要求。要求控制理论解决多输入多输出、非线性以及时变系统的设计问题。这些要求是经典控制理论所无法解决的。与此同时，电子计算机在技术上又有了重大突破,计算机的成本、体积、运行的速度与可靠性等均有了惊人的进步,完全可以适应实时控制的要求。从而也需要一种适合应用数字计算机分析与设计复杂系统的理论和方法。在生产和技术的推动下,建立在状态概念之上的现代控制理论便发展了起来。

现代控制理论与经典控制理论相比较有许多突出的优点。它适用于多输入-多输出系统,这些系统可以是线性的,也可以是非线性的;可以是定常的,也可以是时变的。现代控制理论采用的分析方法是时域的。时域分析方法对于控制过程来说是直接的。现代控制理论设计系统的方法是基于确定一个控制规律或最优控制策略，采用这种控制方式可使得某个性能指标为极小。对于比较简单的系统，应用滤波器或有源网络可实现最优策略;对于复杂的系统,则需要采用数字计算机产生最优控制策略，利用从过程或对象输入数字计算机的信息,经过运算,形成一系列的最优控制策略的数字指令。另外，在现代控制理论的综合步骤中还能考虑任意初始条件。总之，现代控制理论能提供一系列的解析设计方法,设计者只需从事于分析研究,所有的数值计算都由计算机承担，并有许多标准程序可以使用。

三 现代控制理论的主要内容

概括地说,现代控制理论包括如下三方面的内容:

1 系统辨识,即根据系统的输入和输出确定系统的数学模型。当模型结构已经确定，用输入输出来确定其参数的，称参数估计问题。而同时确定模型结构和参数的则称系统辨识问题。

2 最优控制，就是在给定的限制条件和性能指标函数下,寻找使系统性能指标最优的控制规律问题。在解决最优控制问题中,庞特略金（Понтрягин）的极大值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划,是其中最重要的两种方法。

3 最优估计，即在系统数学模型已经建立的基础上，从受到随机干扰的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 来求状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的问题。最优估计的早期工作是维纳（Wiener）在四十年代完成的，称之为维纳滤波器。它是对平稳随机过程按均方意义为最优的估计器。维纳滤波器的局限性在于只适用于平稳过程；并且要求知道过程的较多统计资料，因此这种滤波器适用范围窄且要求计算机具有很大的存贮容量。卡尔曼（Kalman）在 1961 年提出的最优估计理论有效地克服了上述维纳滤波器的局限性。它仅以有限时间的数据作为计算的依据，只要求较少的统计资料，不要求信号和噪声的平稳性，计算过程简单而直接，而且具有迭代的优点，因此特别适于在电子计算机上计算。

现代控制理论本身也在不断地发展，现在已形成了几个分支学科：线性系统理论、最优控制理论、自适应控制、系统辨识、大系统理论。

四 本书研究范围

尽管现代控制理论的内容极其丰富，但是作为给大学生开设的本课程来说，其目的应该使学生掌握其基础内容和基本方法，并为今后深入学习本学科的其他分支学科打下必要的基础。为此，本书以介绍线性系统的基本理论及其应用为主要目的。这是因为：(1) 大多数在其正常运行范围内工作的物理系统均能用线性模型作描述；(2) 线性系统具有完整的理论且能用标准方法求解；(3) 线性系统理论是研究非线性系统的基础。虽然本书并不详细介绍最优控制方面的内容，但是在第六章将提供学习最优控制所必需的准备知识。

全书共分六章。第一章在给出状态定义后详细介绍状态空间表达式的建立。接着运用非奇异变换将一个状态空间表达式变换为对角线标准形或约当标准形。这些技术在线性系统分析和设计中是不可缺少的，也是十分重要的。

状态方程的求解在第二章中介绍。在详细介绍状态转移矩阵的基础上给出状态方程的求解公式。并在此基础上介绍连续系统状态方程的离散化。这样安排既节省了篇幅又使两者在内容上混为一体。

系统的能控性和能观测性是本书的重点内容，在第三章中引出。首先给出它们的严格定义，然后介绍各种判别准则以及对偶原理。并在此基础上运用非奇异变换将系统进行结构分解。又在结构分解的基础上引出传递函数阵的最小实现。另外，在这一章还介绍系统状态空间表达式的能控标准形和能观测标准形。为第五章的状态反馈设计和观测器设计打下必要的基础。

第四章讨论系统的稳定性，主要介绍李亚普诺夫第二方法的基本理论。在给出李亚普诺夫关于稳定、渐近稳定、不稳定等概念的基础上介绍李亚普诺夫的几个定理。接着介绍线性定常系统李亚普诺夫函数的构成。在介绍有关定理时没有囿于数学上的严格证明，而着眼于定理内容含义的阐述和应用举例。

第五章介绍状态反馈和状态观测器的设计方法以及由状态反馈所实现的解耦系统。也可以说本章是前面各章理论的实际应用。

在第六章中简略介绍线性系统在二次型性能指标下的最优系统。主要介绍状态调节器。这样做既提供了学习最优控制问题所必须的准备知识，又可作为状态反馈的一种应用。

第一章　控制系统的状态空间描述

在现代控制理论中状态空间分析是研究最优控制、滤波问题和系统辨识的基础，而有关状态、状态空间的概念以及建立系统的状态空间表达式等问题又是状态空间分析的基本内容。因此，本章内容可以认为是学习现代控制理论所必须的基础知识。

用状态空间分析系统，首当其冲的任务是选取状态变量和建立系统的数学模型——状态空间表达式。对于同一个系统，其状态变量的选取不是唯一的，从而系统的状态空间表达式也是非唯一的。状态变量的不同选取在一定程度上可以看作是状态空间的线性变换。因此，借助线性变换可以获得状态空间表达式的各种标准形。本章将详细介绍对角线标准形和约当标准形。至于其他一些标准形，留在后面几章中介绍。

状态空间分析是一种时域分析。为了建立多输入多输出系统的频域描述，在本章§1-8将讨论如何从系统的状态空间表达式导出多输入多输出系统的传递函数阵。

§1-1　动力学系统中状态的基本概念

一　动力学系统

从理论上说，动力学系统的概念是十分抽象的，并且其说法也不完全一样。就本书来说可以把动力学系统解释为一个能贮存输入信息的系统。

自然界存在输入输出关系完全不同的两类系统。一类系统是只要知道了输入信息，便可立即获得输出信息，即输入输出关系是一个代数方程。图 1-1 所示的电阻电路便属于这一类系统。若给出输入电压 $u(t)$，其输出电流 $i(t)$ 为：

$$i(t)=\frac{u(t)}{R_1+R_2} \tag{1.1-1}$$

另一类系统则不然。若只给出输入信息，并不能确定输出信息，为了获得确定的输出信息，除给定输入信息外，还必须知道该系统的一组初始信息。或者说，描述这类系统输入输出关系的数学表达式是一个微分方程。图 1-2 所示的电感电路属于这类系统。

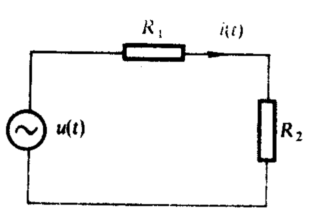

图 1-1　电阻电路

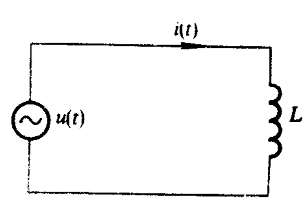

图 1-2　电感电路

该电路的微分方程是

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \tag{1.1-2}$$

故输出电流 $i(t)$ 和输入电压的关系为

$$i(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{L}u(\tau)\mathrm{d}\tau+I_0 \tag{1.1-3}$$

式中 I_0 是初始时刻 t_0 在电感 L 中流过的初始电流。

从物理上看，式(1.1-3)中的初始电流 I_0 是由于电感元件具有贮存信息的能力，它把初始时刻 t_0 以前的输入信息以磁能的形式贮存在电感线圈中。按照这个看法，其初始电流 I_0 为

$$I_0=\int_{-\infty}^{t_0}\frac{1}{L}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1-4}$$

把上式代入式(1.1-3)，有

$$\begin{aligned}i(t)&=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{L}u(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{t_0}\frac{1}{L}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{L}u(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.1-5}$$

显然，对于诸如图 1-2 电感元件的这类系统来说，在 t 时刻上的输出信息，不但依赖于 $[t_0, t]$ 时间区间内所施加的输入信息 $u(t)$，而且还依赖于初始时刻 t_0 以前的输入信息。在自动控制理论中，把这种能够贮存信息的系统称为动力学系统。

动力学系统这个名词是沿用力学中的术语，在力学中把研究力和运动关系的学科叫做动力学。对于一个质量为 m 的质点，其运动方程由牛顿第二定律所描述

$$ma(t)=f(t) \tag{1.1-6}$$

即

$$m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=f(t)$$

$$V(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau+V_0 \tag{1.1-7}$$

式中

m——质点的质量

$a(t)$——质点在 t 时刻的加速度

$V(t)$——质点在 t 时刻的速度

$f(t)$——在 $[t_0, t]$ 时间区间内作用在质点 m 上的作用力。

对比式(1.1-3)和式(1.1-7)，图 1-2 所示的电感电路和这个质点的力学模型具有一样的输入输出关系。所以，把能够贮存输入信息的系统称为动力学系统是十分恰当的。

为叙述简单起见，今后把输入信息简称输入，用符号 $u(t)$ 表示；输出信息简称输出，用符号 $y(t)$ 表示。

二　动力学系统的状态

从“状态”这个词的字面意思上看，就是指系统过去，现在和将来的运动状况。例如上述质点的运动，其路程 $S(t)$ 为

$$S(t)=S(t_0)+V(t_0)t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1.1-8}$$

从式(1.1-8)可以看出,若要确定某一时刻的 $S(t)$,除必须给出作用力 $f(t)$ 外,还必须知道初始位置 $S(t_0)$ 和初始速度 $V(t_0)$。或者说,该质点每一时刻的状况,必须用该时刻的位置和速度这两个物理量才能完全地加以描述。于是,位置 $S(t)$ 和速度 $V(t)$ 这两个变量便可用来完全地表征该质点的运动状态。下面给出状态,状态向量和状态空间的定义。

定义 1.1　所谓动力学系统的状态,是指完全地描述系统时域行为的一个最小变量组。该变量组中的每个变量称为状态变量。

所谓完全地描述,是指如果给定了 $t=t_0$ 时刻这组变量的值,和 $t \geqslant t_0$ 时输入的时间函数,那么系统在 $t \geqslant t_0$ 的任何瞬时的行为就完全确定了。所谓最小,是指这个变量组中的每个变量是相互独立的。

若一个系统有 n 个状态变量,$x_1(t)$, $x_2(t) \cdots x_n(t)$,用这 n 个状态变量作为分量所构成的向量 $\boldsymbol{x}(t)$,就称为该系统的状态向量,即

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.1-9}$$

状态向量的所有可能值的集合称为状态空间。或者说,以状态变量 x_1, x_2, $\cdots x_n$ 为坐标轴所组成的 n 维空间,称为状态空间。状态空间中的每一点,代表了状态变量特定的一组值,即系统的某个特定的状态。如随着时间的推移,状态不断地变化,那么 $t \geqslant t_0$ 各瞬时的状态在状态空间构成一条轨迹,称为状态轨线。显然,这条轨线的形状完全由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geqslant t_0$ 时的输入以及系统动力学特性所唯一决定。在经典控制理论中所讨论的相平面,就是一个特殊的二维状态空间。

[例 1-1]　图 1-1 所示电路中的电流 $i(t)$ 是否是该电路的状态变量?

考虑到图 1-1 所示电路中没有贮能元件,在 t 时刻的输出 $i(t)$ 完全由该时刻的输入 $u(t)$ 所确定。或者说,该电路是没有记忆能力的,故电流 $i(t)$ 不是状态变量。

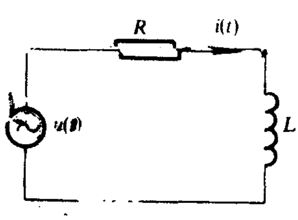

图 1—3　例 1-2 中的 RL 电路

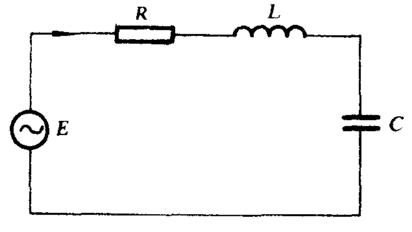

图 1—4　例 1-3 中的 RLC 电路

[例 1-2]　试确定图 1-3 所示 RL 电路的状态变量。

首先列写该电路的微分方程

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \tag{1.1-10}$$

解之,得

$$i(t)=\frac{u}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)+i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{1.1-11}$$

可以看出,初始时刻的电流 $i(0)$ 确定了系统的初始状态;如果一旦输入 $u(t)$ 和初始电流

$i(0)$ 已知，则系统在以后任一时刻的状态即可完全唯一地被确定下来，所以 $i(t)$ 是完全地描述该电路时域行为的一个变量，故 $i(t)$ 可取为该电路的状态。

[例 1-3] 试确定图 1-4 所示 RLC 电路的状态变量

该电路的微分方程为

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t = u(t) \tag{1.1-12}$$

由电路知识可知，要唯一地确定 t 时刻的输出电流 $i(t)$，除要知道输入电压 $u(t)$ 外，还必须给出电感 L 中的初始电流 $i(t_0)$ 和电容上的初始电压 $u_c(t_0)$。或者说，$i(t)$ 和 $u_c(t)$ 这两个变量所构成的变量组能够完全地描述该电路的时域行为，且它们之间是独立的，故 $i(t)$ 和 $u_c(t)$ 这两个变量所组成的变量组是该电路的状态。记为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix}$$

对于图 1-4 中 RLC 电路，倘若给定的初始条件不是 $i(t_0)$ 和 $u_c(t_0)$，而是 $i(t_0)$ 和电容器上的电量 $q(t_0)$，在输入电压 $u(t)$ 为已知时，也能唯一地确定其输出电流 $i(t)$。于是，$i(t)$ 和 $q(t)$ 所组成的变量组也是该系统的状态。由上可以看出，在同一个系统中，究竟选取哪些变量作为状态变量并不是唯一的。即状态变量具有非唯一性。关于这一点读者将在今后的学习中逐渐体会到。

应该指出，系统的输出和系统的状态在概念上是不同的。输出是人们希望从系统中所要获得的信息，而状态是完全地描述系统动力学行为的一组信息。以图 1-4 的 RLC 电路为例，回路中的电流 $i(t)$ 是人们所希望从系统中获得的信息，故为输出；$i(t)$ 和 $u_c(t)$（或者 $i(t)$ 和 $q(t)$）这两个变量是完全地确定该电路的动力学行为的信息，故为状态。通常，输出是状态的函数。在线性系统中，输出可以是状态变量中的某一个变量或者某几个变量的线性组合。另外，在物理上输出总是可以测取的，而状态变量并不一定是可以测取的，而且也经常是不能完全测取到的。在后几章中读者将会看到，为了便于构成状态反馈，在选取状态变量时应尽量选择在物理上易于测取的变量作为状态变量。

§1-2 动力学系统的状态空间表达式

状态空间表达式是一种采用状态描述系统动力学行为的数学模型。它包含状态方程和输出方程。状态方程是一个一阶向量微分方程，输出方程是一个代数变换方程。这种把系统的输入输出关系分为两段来描述的数学模型正是状态空间描述法与传递函数描述法区别的显著特征之一。

考虑到状态空间表达式的模拟结构图能充分反映各状态变量间的相互关系，可作为状态空间表达式的一种直观表示，这一部分内容也在这一节介绍。

一 状态方程和输出方程

1 状态方程

既然状态是完全地描述系统时域行为的一个最小变量组，倘若这个变量组中的所有状态变量的时间响应都已获得，那么该系统的整个运动过程也就被充分描述出来。因此，采用状态空间分析系统的任务就是要寻求待分析系统中每个状态变量对时间的变化关

系，要求出这个变化关系，就必须列写出每个状态变量对时间的一阶导数的表达式。

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ u) \tag{1.2-1}$$

这是一个一阶微分方程组，方程的左端是每一个状态变量的一阶导数，右端是状态变量 $x_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots n)$ 和输入变量 u 所组成的代数多项式。这个描述系统状态变量变化率的一阶微分方程组称为状态方程。

仍以图 1-3 所示 RLC 电路为例，其回路方程为

$$Ri(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t = u(t) \tag{1.2-2}$$

根据状态变量的定义，取 $i(t)$ 和 $\int i(t)\mathrm{d}t$ 为状态变量，并用符号 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 表示，即

$$x_1(t) = i(t) \tag{1.2-3a}$$

$$x_2(t) = \int i(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-3b}$$

为了求得状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 对时间的一阶导数的表达式，将上两式分别对时间 t 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2-4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = i(t) \tag{1.2-4b}$$

由回路方程 (1.2-2) 有

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{LC}\int i(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{L}u(t)$$

将上式代入式 (1.2-4a)，有

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{LC}\int i(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{L}u(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{LC}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \tag{1.2-5}$$

将式 (1.2-3a) 代入式 (1.2-4b)，有

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) \tag{1.2-6}$$

式 (1.2-5) 和式 (1.2-6) 便是该电路状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的对时间变化率的表达式，写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

为书写方便，今后均用 x_i 表示 $x_i(t)$，于是上式写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{1.2-7}$$

2 输出方程

所谓输出方程是在指定输出变量的情况下，该输出变量与状态变量以及输入变量之间的函数关系式。

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \cdots x_n, u) \quad j = 1, 2, \cdots m \tag{1.2-8}$$

式中 y_j 表示所指定的第 j 个输出变量。

在上述 RLC 电路中，若指定回路电流 i 为输出，即

$$y = i$$

亦即

$$y = x_1$$

写成矩阵形式，有

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.2-9}$$

若指定电容器上的电压 u_c 为输出，则输出方程为

$$y = u_c$$

亦即

$$y = \frac{1}{C} x_2$$

写成矩阵形式，有

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.2-10}$$

若指定回路电流 i 和电容器上的电压 u_c 同为输出，则输出方程为

$$y_1 = i = x_1$$

$$y_2 = u_c = \frac{1}{C} x_2$$

写成矩阵形式，有

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.2-11}$$

由上可知，状态方程和输出方程的组合

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n, u) \quad i = 1, 2, \cdots n \tag{1.2-12a}$$

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \cdots x_n, u) \quad j = 1, 2, \cdots m \tag{1.2-12b}$$

构成了一个对系统动力学行为的完整描述——状态空间表达式。但是，这样的表达式不够简洁，为此，将它写成向量的形式。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{1.2-13a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{1.2-13b}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.2-14}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{1.2-15}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.2-16}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1\ (x_1,\ x_2\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \\ f_2\ (x_1,\ x_2\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \\ \vdots \\ f_n\ (x_1,\ x_2\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \end{bmatrix} \tag{1.2-17}$$

$$\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} g_1\ (x_1,\ x_2\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \\ g_2\ (x_1,\ x_2\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \\ \vdots \\ g_m\ (x_1,\ x_2,\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots u_r) \end{bmatrix} \tag{1.2-18}$$

可以看出，这种描述系统动力学行为的方法和经典控制理论中的传递函数不同，它把输入输出间的信息传递分为两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态发生变化，第二段是系统内部的状态变化引起系统输出的变化。前者用状态方程描述，后者用输出方程描述。由于这种描述方法可以深入到系统的内部，故称之为内部描述，而传递函数只能描述系统外部的输入输出关系，并不能反映内部状态的变化，故称之为外部描述。图 1-5 是说明这两种描述方法特点的示意图。

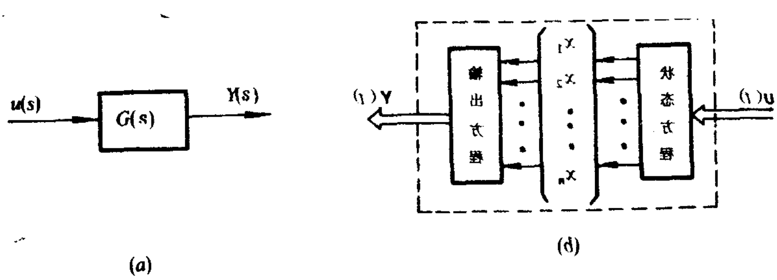

图 1-5 两种描述方法的示意图

(a) 传递函数描述法；(b) 状态空间描述法

二 线性系统状态空间表达式的一般形式

对于线性系统，其状态方程组中的 $f_i(x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots u_r)$ 以及输出方程组中的 $g_i(x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots u_r)$ 都是关于 $x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots u_r$ 的一次线性函数，即

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \\
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r
\end{aligned}$$