研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 随机海浪理论

# Theory of Random Ocean Waves

徐德伦　于定勇　编著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

# 随机海浪理论

# Theory of Random Ocean Waves

徐德伦　于定勇　编著

高等教育出版社

## 内容提要

本书是教育部研究生工作办公室审定的研究生教学推荐用书。

全书共分六章。第一章为后五章的论述提供必要的随机过程理论基本知识。第二章至第六章依次论述随机海浪模型、海浪特征量的统计分布、海浪研究的谱方法、随机波群和深水风浪破碎的统计特征。书后附有习题和中英文对照索引。

本书或其中部分内容可作为物理海洋、海洋气象和海洋工程等专业的研究生教材，也可供这些专业的本科生、研究人员、技术人员和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机海浪理论/徐德伦，于定勇编著. —北京：高等教育出版社，2001.8

ISBN 7-04-009922-5

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①徐… ②于… Ⅲ. 海浪-随机水文学 Ⅳ. P731.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第035086号

随机海浪理论

徐德伦　于定勇　编著

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　话 | 010－64054588 | 传　真 | 010－64014048 |
| 网　址 | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn | | |
| 经　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 排　版 | 高等教育出版社照排中心 | | |
| 印　刷 | 高等教育出版社印刷厂 | | |
| 开　本 | 787×960　1/16 | 版　次 | 2001年8月第1版 |
| 印　张 | 25.25 | 印　次 | 2001年8月第1次印刷 |
| 字　数 | 400 000 | 定　价 | 34.60元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

# 前　言

现有主要海浪理论大体可分为两类:一类属水波理论,其特点是将海浪运动视为确定的函数形式,通过流体动力学分析揭示各种情况下海浪的动力学性质和运动规律;另一类可称为随机海浪理论,其特点是将海浪运动视为随机过程(函数),通过随机过程理论分析给出各种情况下海浪运动的统计特征。前者的研究始于19世纪,至今常兴不衰,总的趋势是由线性理论向非线性和湍流理论发展;后者的研究兴起于20世纪50年代,由于此类理论便于直接应用而迅速发展。两类理论虽各有特点但本质上是相互联系的,两者的发展也是相辅相成的。将两者有机结合已成为海浪研究发展的趋势。

20世纪80年代中后期以来,在国家自然科学基金的支持下,我国研究者在海浪谱、海浪特征量统计分布、随机波群和深水海浪破碎统计特征等方面取得许多研究成果(包括作者的成果),其中大部分已分散发表于国内外多种学术刊物。这些成果虽也涉及水波理论,但主要属随机海浪理论范畴。

本书的目的在于紧密联系随机过程的理论原理,通过有代表性的研究成果较系统地论述随机海浪理论的发展。其中以较大的篇幅论述20世纪80年代中后期以来在国家自然科学基金支持下取得的有关研究成果。这并非出于偏爱,而是由于这些成果在随机海浪理论的发展中占有相当的地位。本书在教育部"研究生教学用书"审定时,曾定命为《随机过程与随机海浪理论》,后经考虑,改为《随机海浪理论》。

本书第一章以随机过程基本理论知识为内容。设此内容的目的主要不在于系统讨论随机过程理论本身,而在于为后几章的理论推导提供随机过程理论基础和依据;在内容选择和讨论方式上除考虑保持一定的系统性外,尽可能照顾后几章直接应用的需要。第二章至第六章依次讨论随机海浪的数学模型、海浪特征量的统计分布、海浪谱、随机波群和深水海浪破碎统计特征。

衷心感谢文圣常院士、孙孚教授和田纪伟教授对本书的编写给予的关心、指导、支持和帮助;也向那些曾经帮助我们的朋友和同事表示衷心

的感谢。

由于海浪本身的复杂和理论研究上的困难，书中阐述的理论多有一定的局限性，有些则有不够严格甚至不协调之处，对此本书作者大多以自己的见解加以简评。

由于作者水平有限，编写时间仓促，书中的错误在所难免，望读者批评指正。

作者

2000年于青岛海洋大学

# 目　录


第一章　随机过程的基本知识 …… 1

§1.1　随机过程的基本概念 …… 1

1.1.1　概述 …… 1

1.1.2　随机过程的概率密度函数 …… 2

1.1.3　随机过程的特征函数 …… 4

1.1.4　随机过程的均值、相关函数、协方差函数和方差 …… 4

1.1.5　复随机过程 …… 6

1.1.6　平稳随机过程 …… 7

1.1.7　随机过程的变换(系统) …… 8

1.1.8　线性系统的有关知识 …… 14

1.1.9　随机连续、随机导数和随机积分 …… 16

§1.2　平稳和非平稳随机过程 …… 24

1.2.1　平稳过程的相关函数 …… 24

1.2.2　平稳过程的功率谱 …… 26

1.2.3　线性系统中的平稳过程 …… 33

1.2.4　非平稳过程的相关函数和平均能量谱 …… 38

1.2.5　平稳过程的二阶谱(bi-spectrum) …… 44

1.2.6　二维和三维平稳过程的波数－频率谱 …… 44

1.2.7　随机过程的谐和分析 …… 45

1.2.8　随机过程的线性均方估计 …… 52

§1.3　正态过程 …… 63

1.3.1　正态过程的定义 …… 64

1.3.2　正态过程的概率密度函数 …… 64

1.3.3　平稳正态过程的跨零问题 …… 67

1.3.4　正态过程的条件概率密度函数 …… 73

§1.4　Markov 过程 …… 75

1.4.1　Markov 序列 …… 76

1.4.2　Markov 链 …… 77

1.4.3　Markov 过程 …… 80

参考文献 …… 86

第二章　随机海浪模型 …… 87

§2.1 几点说明 …… 87
§2.2 海浪的线性模型 …… 90
2.2.1 Pierson 模型 …… 90
2.2.2 Longuet-Higgins 模型 …… 92
2.2.3 Fourier-Stieltjes 的积分模型 …… 94
2.2.4 以广义 Fourier 变换表示的模型 …… 96
2.2.5 海浪波面位移铅直速度和铅直加速度模型 …… 100
§2.3 海浪的非线性模型 …… 103
§2.4 以局部振幅和相位函数表示的海浪模型 …… 106
参考文献 …… 109
**第三章 海浪特征量的统计分布** …… 111
§3.1 正态海浪特征量的分布 …… 111
3.1.1 波高的分布 …… 112
3.1.2 波面位移极大值的分布 …… 115
3.1.3 波高与周期的联合分布 …… 120
3.1.4 周期的分布 …… 131
3.1.5 条件周期分布 …… 135
3.1.6 波长的分布 …… 140
3.1.7 波高与波长的联合分布 …… 143
3.1.8 波陡的分布 …… 145
3.1.9 波面斜率的分布 …… 148
3.1.10* 波面水质点速度和加速度的分布 …… 153
3.1.11 波面极大值处质点水平速度的分布 …… 154
3.1.12 波速与波面水质点速度的联合分布 …… 156
3.1.13 三维海浪要素的基本分布 …… 158
3.1.14 非窄谱海浪特征量的分布 …… 160
§3.2 波面位移的非正态分布 …… 163
3.2.1 Gram-Charlier 级数形式的分布 …… 164
3.2.2 窄谱非线性海浪波面位移的分布 …… 172
3.2.3 beta 分布 …… 173
§3.3 波面斜率的非正态分布 …… 178
3.3.1 Gram-Charlier 级数形式的分布 …… 179
3.3.2 一种新的级数形式的分布 …… 181
§3.4 波高的非 Rayleigh 分布 …… 182
3.4.1 Weibull 分布 …… 182
3.4.2 一种理论非 Rayleigh 波高分布 …… 183

§3.5 关于混合浪波高和周期的分布 …… 187
参考文献 …… 189
**第四章 海浪研究的谱方法** …… 193
§4.1 引言 …… 193
§4.2 几种有代表性的风浪频谱模式 …… 194
4.2.1 Neumann 谱 …… 195
4.2.2 Bretschneider 谱 …… 198
4.2.3 Pierson-Moscowitz(P－M)谱 …… 199
4.2.4 JONSWAP 谱 …… 200
4.2.5 Wallops 谱 …… 203
4.2.6 文氏谱 …… 205
§4.3 内频谱与外频谱 …… 215
4.3.1 外频谱的定义 …… 215
4.3.2 外频谱与 P－M 谱的比较 …… 217
4.3.3 线性理论下内频谱与外频谱的关系 …… 218
§4.4 风浪谱饱和(平衡)范围与 TMA 谱 …… 219
4.4.1 Phillips 饱和范围 …… 219
4.4.2 浅水谱饱和范围 …… 221
4.4.3 TMA 谱 …… 222
§4.5 谱矩 …… 224
4.5.1 关于海浪谱的高阶矩问题 …… 225
4.5.2 通过滑动时间平均估计高阶谱矩 …… 228
4.5.3 时间平均尺度 …… 229
4.5.4 P－M 谱和 JONSWAP 谱的高阶矩 …… 230
4.5.5 海浪平均波长与平均周期的关系 …… 232
§4.6 谱宽度 …… 235
4.6.1 谱宽度参量 $\varepsilon$ …… 235
4.6.2 谱宽度参量 $v$ …… 239
4.6.3 其它几种谱宽度参量 …… 240
§4.7 海浪的方向谱 …… 241
4.7.1 方向谱的基本形式 …… 242
4.7.2 几种常用海浪方向谱或方向函数 …… 243
4.7.3 文氏方向谱 …… 244
§4.8 二阶谱 …… 249
§4.9 海浪频谱估计 …… 253
4.9.1 采样间隔的选取 …… 253

4.9.2 常用的两种谱估计方法 …… 254
4.9.3 粗谱的平滑 …… 256
4.9.4 平滑谱的统计分布与置信区间 …… 259
4.9.5 参量的选取与谱估计的质量 …… 261
4.9.6 最大熵谱估计 …… 263
§4.10 交叉谱的估计 …… 273
4.10.1 有限离散 Fourier 变换方法 …… 273
4.10.2 交叉相关函数法 …… 275
4.10.3 交叉谱估计的置信区间 …… 276
4.10.4 交叉谱估计在海浪研究中的应用 …… 277
§4.11 海浪方向谱的估计 …… 280
4.11.1 Fourier 级数法 …… 281
4.11.2 本征矢法 …… 286
§4.12 海浪二阶谱估计 …… 290
4.12.1 周期图法 …… 291
4.12.2 TOR 法 …… 292
§4.13 随机海浪的模拟 …… 294
4.13.1 随机海浪的信号模拟 …… 294
4.13.2 实验室不规则波的产生 …… 298
4.13.3 实验室极端波的模拟 …… 302
§4.14 关于海浪预测模式 …… 304
参考文献 …… 306
**第五章 随机波群** …… 313
§5.1 波群研究的包络方法 …… 313
5.1.1 正态过程的有关结果 …… 314
5.1.2 波群长度和连长 …… 315
5.1.3 高波连 …… 316
5.1.4 包络的计算 …… 317
5.1.5 波包谱 …… 321
§5.2 波群研究的 Markov 链方法 …… 328
5.2.1 二阶 Rayleigh 分布 …… 328
5.2.2 波群连长和高波连长的统计性质 …… 331
§5.3 波群研究的波能过程线(SIWEH)法 …… 334
5.3.1 SIWEH 的定义 …… 334
5.3.2 SIWEH 谱及 SIWEH 与波包的关系 …… 336
§5.4 非线性对波包的影响 …… 337

§5.5　波群的特征因子…… 340
§5.6　随机波群的模拟…… 342
参考文献 …… 347
**第六章　深水风浪破碎的统计特征** …… 349
§6.1　波浪破碎的判据…… 349
§6.2　白浪覆盖率与风速的经验关系式…… 350
§6.3　解析导出的白浪覆盖率模式…… 352
§6.4　破碎波概率模式…… 358
6.4.1　固定点破碎波概率模式…… 358
6.4.2　三维海浪破碎波概率模式…… 360
§6.5　深水波浪破碎统计特征与风的关系…… 361
6.5.1　白浪覆盖率与风速和风区的关系…… 361
6.5.2　波浪破碎波概率与风速和风区的关系…… 364
参考文献 …… 366
**习题** …… 369
**索引(中英文对照)** …… 379

# 第一章　随机过程的基本知识

## §1.1　随机过程的基本概念

### 1.1.1　概述

概率论和随机过程都是研究自然界随机现象的数学理论，其区别在于：前者的研究对象是随机变量而后者是随机过程；后者是在前者的基础上推广和发展的。这里我们只讨论随机过程，假定读者对概率论的基本概念和基本定理是了解的。

为说明什么是随机过程，首先回顾一下什么是随机变量。给定一实验，对此实验的每个结果 $\zeta_i$，我们按照一定的规则指定一个数 $X(\zeta_i)$代表之，这样就形成一依赖于实验结果 $\zeta$ 的变量 $X(\zeta)$，这种变量称为随机变量。现在我们将随机变量的概念加以延伸：给定一实验，对实验的每个结果 $\zeta_i$，按照一定的规则指定一时间函数 $X(\zeta_i;t)$代表之，这样便形成一依赖于实验结果 $\zeta$ 的函数族 $X(\zeta;t)$。这种函数族称为随机过程或随机函数。随机过程论就是研究这种函数族统计性质的理论。

随机过程 $X(\zeta;t)$可看作两个变量的函数。$\zeta$ 的域是所有实验结果形成的空间，而 $t$ 的域是一实数集。本书除特加说明外，均把后者看成是整个时间轴。对给定的实验结果 $\zeta_i$，$X(\zeta_i;t)$是一确定的时间函数（有时称为实现、信号或过程曲线）；对给定的时刻 $t_i$，$X(\zeta;t_i)$是一随机变量；如果实验结果和时刻都给定，则 $X(\zeta_i;t_i)$只是一个数。在以下的讨论中，为叙述方便，总是把随机过程 $X(\zeta;t)$中的符号 $\zeta$ 省略而简写为 $X(t)$；有时还用 $X(t)$代表 $X(\zeta_i;t)$、$X(\zeta;t_i)$或 $X(\zeta_i;t_i)$三件不同事情中的一件。在文中的一具体场合，究竟记号 $X(t)$代表哪一件事，一般可以从上下文明确地判断，否则将加以说明。

**例：** 我们的实验是在海上一固定点用测波仪测量波面位移。每测一次得一电压信号（结果 $\zeta_i$）。将此信号乘以率定系数然后减去其平均

值(规则),便得到一时间函数 $X(\zeta_i;t)$。我们按这样的规则指定此时间函数代表测量结果 $\zeta_i$。不断重复测量便得到一函数族 $X(\zeta,t)$,这个函数族就是作为随机过程的固定点波面位移。图 1.1.1 给出其示意。

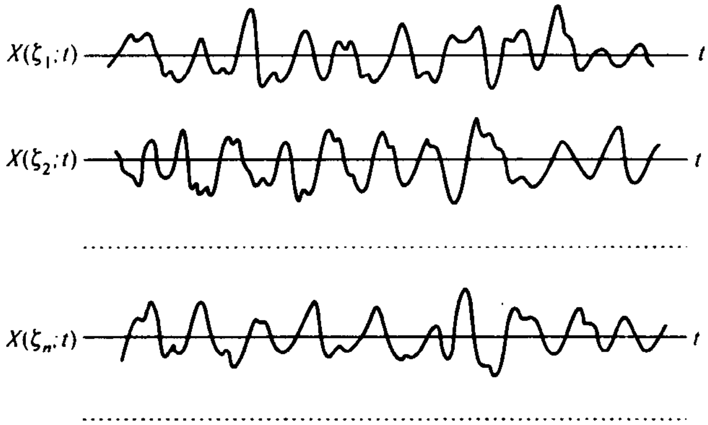


图 1.1.1

作为随机过程的海浪波面位移的每个时间函数 $X(t)$ 一般都很复杂,以致于不能由 $X(t_i)$ 预测 $X(t_{i+1})$。但是,随机过程的随机性并不在于组成这个过程的函数如何复杂,而在于出现哪个函数是随机的。强调这一点对理解随机过程的基本概念是重要的。为此再举一极端化的例子。

**例:** 我们的实验是掷硬币。如果出现币值面,指定 $X(t)=2t$,如果出现国徽面,则指定 $X(t)=\sin t$。重复实验便形成一函数族 $X(t)$。尽管这个族中只有两种函数,而且每种都很简单,但这个函数族不失为一随机过程,因为它符合随机过程的定义。

### 1.1.2 随机过程的概率密度函数

任给两个实数 $x$ 和 $t$,事件 $\{X(t)\leqslant x\}$ 的概率 $P\{X(t)\leqslant x\}$ 称为随机过程 $X(t)$ 的一阶分布函数,并记为

$$F(x;t)=P\{X(t)\leqslant x\} \tag{1.1.1}$$

即 $F(x;t)$ 给出过程 $X(t)$ 于任意时刻 $t$ 不超过任意给定数 $x$ 的概率。

$F(x;t)$ 对 $x$ 的偏导数

$$f(x;t)=\frac{\partial F(x;t)}{\partial x} \tag{1.1.2}$$

称为过程 $X(t)$ 的一阶概率密度函数(以下简称概率密度或密度函数)。

任给两个时刻 $t_1,t_2$ 和两个数 $x_1,x_2$,事件 $\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}$ 的联合概率 $P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}$ 称为过程 $X(t)$ 的二阶分布函数,并记为

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\} \tag{1.1.3}$$

相应地,$X(t)$ 的二阶概率密度为

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2} \tag{1.1.4}$$

随机过程 $X(t)$ 的一阶和二阶分布函数有如下关系:

$$F(x;t)=F(x_1;t_1)=F(x_1,\infty;t_1,t_2)=F(\infty,x_2;t_1,t_2) \tag{1.1.5}$$

相应地

$$\begin{aligned} f(x,t)=f(x_1,t_1)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_2 \\ &=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1 \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

即 $X(t)$ 的一阶概率密度等于其二阶概率密度关于 $x_1$ 或 $x_2$ 的全域积分。

参照随机过程的一阶和二阶分布函数和概率密度函数,我们可定义其 $n$ 阶分布函数和概率密度函数。只有对任意的 $n$ 和 $t_1,\cdots,t_n$,过程 $X(t)$ 的 $n$ 阶分布函数

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\} \tag{1.1.7}$$

为已知,这个过程才是统计上确定的。

任给两个时刻 $t_1$ 和 $t_2$,事件 $\{X(t_1)\leqslant x,Y(t_2)\leqslant y\}$ 的联合概率 $P\{X(t_1)\leqslant x,Y(t_2)\leqslant y\}$ 称为过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合分布函数,并记为

$$F(x,y;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x,Y(t_2)\leqslant y\} \tag{1.1.8}$$

$F(x,y;t_1,t_2)$ 对 $x$ 和 $y$ 的混合偏导数

$$f(x,y;t_1,t_2)=\frac{\partial F(x,y;t_1,t_2)}{\partial x\partial y} \tag{1.1.9}$$

称为过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合概率密度函数。

类似地,还可定义过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的 $n$ 阶联合分布函数

$$
\begin{aligned}
&F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_n,t_{1'},\cdots,t_{n'})\\
&=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n,Y(t_{1'})\leqslant y_1,\cdots,Y(t_{n'})\leqslant y_n\}
\end{aligned}
\tag{1.1.10}
$$

### 1.1.3 随机过程的特征函数

随机过程 $X(t)$的一阶特征函数被定义为

$$\Phi_1(\omega;t)=E\{e^{i\omega X(t)}\} \tag{1.1.11}$$

其中 $E\{\ \}$表示取期望值,即

$$\Phi_1(\omega;t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}f(x;t)dx \tag{1.1.12}$$

由此可见,$\Phi_1(\omega;t)$为过程 $X(t)$的一阶概率密度函数的 Fourier 逆变换。其反演为

$$f(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(\omega;t)e^{-i\omega x}d\omega \tag{1.1.13}$$

由于 $f(x;t)\geqslant 0$,故有

$$|\Phi_1(\omega;t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}f(x;t)dx\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}f(x;t)dx=1 \tag{1.1.14}$$

随机过程 $X(t)$的二阶特征函数被定义为

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)&=E\{e^{i[\omega_1X(t_1)+\omega_2X(t_2)]}\}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_1x_1+\omega_2x_2)}f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
\tag{1.1.15}
$$

其反演为

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2;t_1,t_2)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega_1x_1+\omega_2x_2)}\Phi_2(\omega_1,\omega_2;t_1,t_2)d\omega_1d\omega_2
\end{aligned}
\tag{1.1.16}
$$

即随机过程的二阶特征函数与二阶概率密度函数成 Fourier 二维变换对。

### 1.1.4 随机过程的均值、相关函数、协方差函数和方差

任给一时刻,随机变量 $X(t)$的期望值 $E\{X(t)\}$称为随机过程的均值,并记为 $\eta(t)$,即

$$\eta(t)=E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;t)dx \tag{1.1.17}$$

它一般为 $t$ 的函数。随机过程的均值给出这个过程于任意时刻(为随机变量)的期望值。

任给两个时刻 $t_1$ 和 $t_2$,随机变量 $X(t_1)$和 $X(t_2)$乘积的期望值 $E\{X(t_1)X(t_2)\}$称为过程 $X(t)$的自相关函数,并记为

$$R(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1.1.18}$$

它一般是 $t_1$ 和 $t_2$ 的函数。

随机过程 $X(t)$的自协方差函数被定义为

$$C(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\eta(t_1)][X(t_2)-\eta(t_2)]\} \tag{1.1.19}$$

比较以上两式得

$$C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-\eta(t_1)\eta(t_2) \tag{1.1.20}$$

在海浪研究中,记住自相关函数与自协方差函数的区别与联系是必要的。

随机过程 $X(t)$的方差被定义为

$$\sigma^2(t)=E\{[X(t)-\eta(t)]^2\} \tag{1.1.21}$$

显然,

$$\sigma^2(t)=C(t,t)=R(t,t)-\eta^2(t) \tag{1.1.22}$$

在随机过程的讨论中,常常将 $E\{X(t_1)\cdots X(t_n)\}$称为过程 $X(t)$的 $n$ 阶原点矩(统计矩),将 $E\{[X(t_1)-\eta(t_1)]\cdots[X(t_n)-\eta(t_n)]\}$称为 $n$ 阶中心矩。显然,过程的均值为一阶原点矩;自相关函数和自协方差函数分别为二阶原点矩和二阶中心矩。

两个随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$的交叉相关函数和交叉协方差函数分别被定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.23}$$

和

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1,t_2)&=E\{[X(t_1)-\eta_X(t_1)][Y(t_2)-\eta_Y(t_2)]\}\\&=R_{XY}(t_1,t_2)-\eta_X(t_1)\eta_Y(t_2)\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

对于任意时刻 $t_1$ 和 $t_2$,如果

$$C_{XY}(t_1,t_2)=0 \text{ 或 } R_{XY}(t_1,t_2)=\eta_X(t_1)\eta_Y(t_2) \tag{1.1.25}$$

则说 $X(t)$与 $Y(t)$是不相关的;如果

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0 \tag{1.1.26}$$

则说 $X(t)$与 $Y(t)$是正交的。

由此可推论:两个过程之一的均值为 0,如果这两个过程是不相关的也必为正交的,反之亦然。

如果于任意时刻 $t_1,\cdots,t_n,t_{1'},\cdots,t_{n'}$,随机变量群

$$X(t_1),\cdots,X(t_n)$$

独立于

$$Y(t_{1'}),\cdots,Y(t_{n'})$$

则说过程 $X(t)$与 $Y(t)$是独立的。

如果过程 $X(t)$与 $Y(t)$是独立的,则(1.1.23)可表示为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x;t_1)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty} yf(y;t_2)\mathrm{d}y\\&=\eta_X(t_1)\eta_Y(t_2)\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

由此可见,两个过程是独立的也必为不相关的;反之则未必成立。

### 1.1.5 复随机过程

以上讲到的随机过程都是实过程。现在定义复随机过程。

由两个随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$分别作为实部和虚部构成的复函数族

$$Z(t)=X(t)+\mathrm{i}Y(t) \tag{1.1.28}$$

称为复随机过程。

复过程 $Z(t)$的自相关函数和自协方差函数分别被定义为

$$R(t_1,t_2)=E\{Z(t_1)Z^*(t_2)\} \tag{1.1.29}$$

和

$$\begin{aligned}C(t_1,t_2)&=E\{[Z(t_1)-\eta_Z(t_1)][Z^*(t_2)-\eta_Z^*(t_2)]\}\\&=R(t_1,t_2)-\eta_Z(t_1)\eta_Z^*(t_2)\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

其中 $Z^*(t_2)$,$\eta_Z^*(t_2)$分别表示 $Z(t_2)\eta_Z(t_2)$的复共轭

两个复过程 $X(t)$和 $Y(t)$的交叉相关函数和交叉协方差函数被定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} \tag{1.1.31}$$

和

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\eta_X(t_1)][Y^*(t_2)-\eta_Y^*(t_2)]\}$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-\eta_X(t_1)\eta_Y^*(t_2) \tag{1.1.32}$$

两个复过程 $X(t)$和 $Y(t)$,如果对任意 $t_1$ 和 $t_2$ 有

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\eta_X(t_1)\eta_Y^*(t_2)\text{或 }C_{XY}(t_1,t_2)=0 \tag{1.1.33}$$

则说这两个过程是不相关的;如果对任意时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 有

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0 \tag{1.1.34}$$

则说这两个过程是正交的。

### 1.1.6　平稳随机过程

由于本书的讨论多集中于平稳随机过程,为便于讨论,本节先给出它的定义。至于其它种类随机过程的定义留待后面有关章节中给出。

平稳随机过程有几种意义下的定义,这里只给出其中最常用的两种。

#### 1.1.6.1　严格意义的平稳

如果随机过程 $X(t)$的统计性质不随时间变化,即对任意 $\varepsilon$,$X(t)$与 $X(t+\varepsilon)$具有相同的统计性质,则说 $X(t)$是严格意义平稳的。

由上述定义可推论:如果过程 $X(t)$是严格意义平稳的,则其 $n$ 阶概率密度函数有如下性质

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=f(x_1,\cdots,x_n;t_1+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon) \tag{1.1.35}$$

在上式中取 $n=1$,得

$$f(x;t)=f(x;t+\varepsilon)=f(x) \tag{1.1.36}$$

即严格意义平稳过程的一阶密度函数不依赖于时间 $t$。于是

$$E\{X(t)\}=\eta\ (\text{常量}) \tag{1.1.37}$$

在(1.1.35)中取 $n=2$,得

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon) \tag{1.1.38}$$

即严格意义平稳过程的二阶密度函数不依赖于时间 $t$,但依赖于时间间隔 $\tau=t_2-t_1$:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=f(x_1,x_2;\tau) \tag{1.1.39}$$

密度函数具有(1.1.36)和(1.1.38)所示性质的过程称为一阶和二阶平稳过程。

将(1.1.39)代入(1.1.18),得

$$R(\tau)=E\{X(t+\tau)X(t)\}=R(-\tau) \tag{1.1.40}$$

相应地有