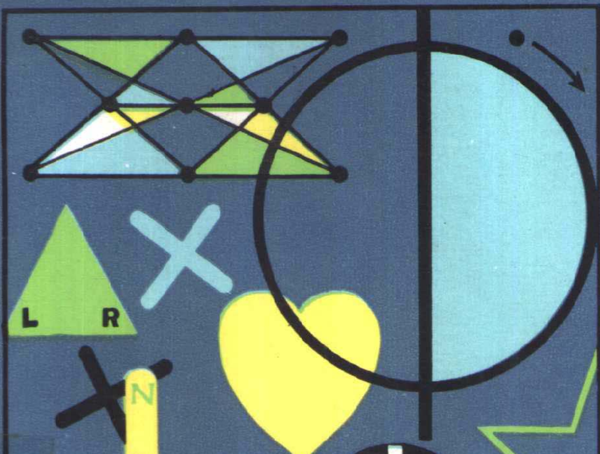
390

《自修数学》小丛书

有限数学系统

〔英〕M.S.劳顿 著



科学出版社

51

《自修数学》小丛书

有限数学系统

〔英〕M. S. 劳顿 著

徐中玲 译

聂元勋 校

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书以现实生活中经常碰到的事物为实例，说明了什么是有限数学系统以及有限系统的数学性质和运算等.

本书讲解新颖，举例和图表较多，叙述过程中采用问答式较多.

本书可供具有初中以上文化程度的学生阅读，它对于启发学生的思维、开阔学生的眼界、培养学生对数学的兴趣，能起到积极的作用.

M. Scott Norton

FINITE MATHEMATICAL SYSTEMS

John Murray, London, 1966

有 限 数 学 系 统

〔英〕M. S. 劳顿 著

徐中玲 译

秦元勋 校

责任编辑 毕颖

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年4月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年6月第二次印刷 印张：2 1/2

印数：19,901—23,100 字数：46,000

统一书号：13031·1540

本社书号：2112·13—1

定价： 0.45 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有中等文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物. 该丛书自 1964 年初版后，于 1974 年、1976 年多次再版印刷. 为开阔读者眼界，增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

ASD 99/10

数学，这个包罗万象的概念，对于研究所有抽象逻辑系统，或者抽象的数学科学及其具体解释和应用来说，都真正地证实了这样一个论点：数学是一切学科探讨真理的基础。

摘自“数学的基础”

在你开始读本书之前

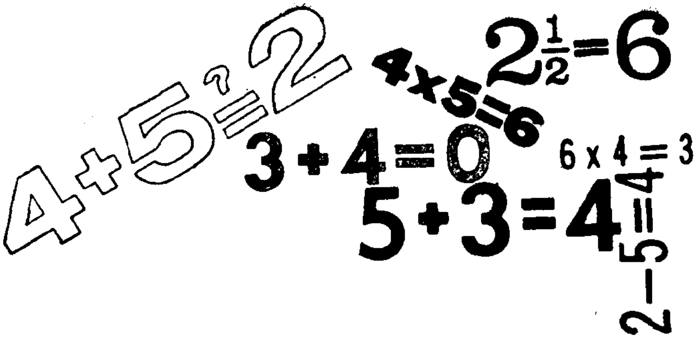
研究数学就像探险一样引人入胜，像读一本神秘的故事书或者探测一个洞穴一样令人激动.在数学里有许多的奥妙、难题、技巧和有趣的概念. 如果你打算做一些数学探讨的话，你将会为发现了新的概念而高兴. 在数学中有很多有趣的题目，研究有限数学系统就是其中的一个.

你千万不能像平时读小说那样去读这本《有限数学系统》的小册子. 开始你应当慢慢地读它，如果第一次你不能很快地明白其中某一句话和某一段的意思，你可别着急，要有耐心，养成读数学书的一个好习惯，例如在手边放着笔和纸，只要一有机会，就应当在实践中去应用它们. 如果你做了本书的练习并且很好地解决了这些疑问，这对你来说，就会更容易明白你所读的东西了.

我们希望这本小册子将有助于你来分享探讨数学的快乐.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录



一、有限数学系统的探讨

1. 数学是严格的科学吗?

你会算术吗? $4+5$ 是多少? 假如你回答是9, 那可能就错了! 有一个算术系统, 其中 $4+5=2$. 在这个系统里, 还有另外一些奇妙的算术, 如 $3+4=0$, $5\div3=4$ 和 $4\times6=6$ 等, 这仅仅是你在本书中将要看到的算术系统之一, 请注意这样的算术系统对你来说是一点也不陌生的, 因为你每天都要用很多次这种类似的系统, 如时钟算术、模算术、余数类算术等, 这都称为有限数学系统.

有限数学系统是数学中的一个有趣的学科分支. 一般来说, 有限数学系统只包括有限个元素, 而元素的个数必须是0或者是一个自然数. 这类系统当然不同于由全体自然数组成

的系统，因为自然数有无限多个元素，这就不是有限数学系统了。

有限数学系统的例子：

一打苹果；

钟上的 12 个数；

你的体重在磅秤上的读数；

0 和 20 之间的奇数；

0 和 1。

无限数学系统的例子：

所有分数的集合；

所有平方数的集合；

一个平面上的线条的数目。

同样还可举出不少例子，一些数学系统是有限的，而另一些是无限的。

本书将探讨一些和有限数学系统有关的概念。通过研究这个主题，你将学会鉴赏数学的结构，并进一步掌握和运用数学的逻辑。

2. 一周七天是一个有趣的有限算术系统

毕尔问道："这会儿离足球赛恰好还有七天，是在星期五举行，今天是星期几啦？"约翰回答说："那么，今天应当是星期五啰！"

约翰说这话时，是注意到了"一周"这个有趣概念，他发现

星期五之后的七天总是下一个星期五. 我们可以用指定的数表示一周七天的每一天,则能展成一个有趣的有限数学系统.

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	2	3	4	5	6	7

周 日 表

例如用 6 代表星期五,作为一周的第六天,数下去是星期六、星期日、星期一、星期二、星期三、星期四和星期五. 你将能看到,星期五加上七天是下一个星期五. 同样,星期一之后的七天又是下一个星期一.

星期五之后的三天是哪一天? 你回答是星期一, 那就对了. 如果数 6(代表星期五)加上 3 用周日表计算, 结果是 2, 即表示星期一.

星期三过了 4 天是哪一天?或用指定的数表示星期三,即在周日表上要问 4 + 4 等于什么数? 因为从星期三算起, 过 4 天以后总是星期日. 从指定的数,我们容易知道 $4+4=1$.

我们还可再看有限系统的另一个例子, 即考虑一个用数 0、1、2、3、4、5 和 6 作记号的号码盘.

我们是如何用这个号码盘(即钟)来获得下面这些结果的呢?

$$2+4=6,$$

$$5+6=4,$$

$$5+2=0,$$

$$2+6=1,$$

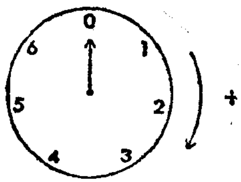


图 1

$$3+4=0.$$

这些答案是怎样得到的？我们可以看出，他们全是用同一个方法得来的，这个算法与前面讨论过的周日表上的加法是一样的道理。只不过现在是把这些元素排列在钟上，并用元素 0 代替 7 的位置。在这个系统里，我们用在钟上从 0 顺时针旋转的方法来加这些元素。 例如： 为了得到 $2+4$ 的答案，首先从 0 顺时针旋转 2 格，然后再接着转 4 格，其结果就是箭头所指的 6，因此 $2+4=6$。 假如我们用周日的概念，我们就说：星期一之后的 4 天是星期五，或者说，星期一加星期四是星期五。

在图 1 所示的钟上，6 以后的数是 0，因此，当旋转一周后，我们再接着往下数或者接着旋转。

0 也可以解释为“不旋转”。 因此，$6+0=6$，$0+4=4$ 和 $3+0=3$。因为这个系统有 7 个元素，并且是连续循环

加数

加数

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

图 2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的模型，所以这个有限系统叫模 7 系统，也叫“模 7 算术”.

这里出一个习题留给读者： 试用模 7 系统加法的定义，来作图 2 中的加法表.

3. 数学中的答案总是有的吗？

两个自然数相加，例如 $3+5$，结果是一个唯一的自然数 8. 3 和 5 的和决不可能是另外的数. 因为两个自然数的和总还是一个自然数，所以我们说：自然数对于加法运算是封闭的，意即两个自然数相加不能得到自然数以外的数. 对于加法运算，并不是所有的集合都是封闭的. 例如考虑一个奇数集. 那么奇数集对加法运算是不是封闭的呢？ 3 和 5 都是奇数，但它们的和是 8 就不再是奇数了，所以奇数集对加法运算就不是封闭的了.

下面让我们来研究乘法、除法和减法的运算，这些运算对自然数是封闭的吗？ 先看看除法运算对自然数是封闭的吗？ $8\div 2=4$，4 是自然数，所以这个等式倒是满足了封闭的性质. 但是，$8\div 3$ 是 $2\frac{2}{3}$，它就不是自然数了. 所以除法对自然数并不封闭，但我们可以验证乘法对自然数是封闭的，而减法对自然数又不是封闭的了.

这样一来你就会看到，在对一个给定的集合里的元素作某个运算时，如果限制答案仍在该集合内，那么这个答案就不一定总是有的.

封闭性是怎样用于模 7 时钟算术系统里的呢？在模 7 算术里，我们先来作它的加法表，如图 3 所示。

加数

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

加数

图 3

现在我们来仔细地观察一下这个加法表，可以看出，系统里每一种可能有的加法，如 $3+4=0$，它的结果都是唯一的，也是这个系统里的一个元素．不管这些元素的具体数值，我们用一个一般表达式 $a+b$ 来表示，它的唯一结果用 c 表示，那么，c 也是这个系统里 7 个元素中的一个．因此，对这个有限的模 7 系统，加法运算当然是封闭的。

练习1　模 12 的时钟算术

1．在一个普通的 12 小时时钟里，早上九点以后的 4 小时是几点？下午七点以后的 6 小时是几点？

在这个普通钟里，$9+4=1$ 和 $7+6=1$．用前面加法运算的定

义，对模 12 时钟算术系统，运用加法运算完成下面图 5 的表格。

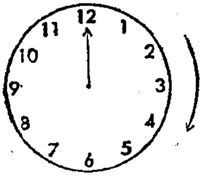


图 4

加数

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
2	3	4										
3	4		6									
4	5			8								
5	6				10							
6	7					12						
7	8						2					
8	9							4				
9	10								6			
10	11									8		
11	12										10	
12	1											12

加数

图 5

2. 模 12 系统里，可能有的加法组合有多少？这个系统对加法运算是封闭的吗？

3．在模12系统里，下面的表达式是正确的吗？

a. $6+7=7+6$,

b. $8+12=12+8$,

c. $1+9=9+1$,

d. $11+5=5+11$,

e. $12+2=2+12$.

二、有限系统的数学性质

1. 7+6一定等于6+7吗？

约翰要和毕尔比赛一种“倒序”游戏，毕尔问：“我们怎样玩法呢？”约翰回答说：“我做两件事情，而你按相反的次序做同样的两件事情.”毕尔同意比赛.你如果是毕尔，你愿意接受约翰的这个挑战吗？

假如约翰是先打开包着巧克力糖的纸，然后把糖吃了.你想你能接受他的“倒序”挑战吗？又假如约翰先从椅子上拔出一个钉子，然后坐下.显然，若按相反的次序去做这两件事，就不可想像了. 要是考虑自然数6和7相加的问题，将加法作“倒序”，交换加法中加数的次序，得到的结果有何差别呢？你准是回答说没有差别，那确实是对了，因为$7+6$和$6+7$两者都等于13. 如果你交换减法的次序呐？如$7-6=6-7$对吗？显然，除了特殊情况如$5-5$或$0-0$外，减数和被减数的次序是不允许交换的.

倘若，改变加法里加数的次序，对于所有可能的情况，其和不变，例如$6+3=3+6$，那么，我们说该运算是可交换的. 但要注意，在自然数作减法和除法的运算情况里，显然，可交换的性质是不能用的. 如$5-3\neq3-5$和$8\div4\neq$

$4 \div 8$.

于是，你能看到，一些系统对于特定的运算是可交换的。但它不一定对所有的运算都是可交换的。

让我们再回过头来看看模 7 时钟算术系统吧，该系统是可交换的吗？在模 7 里，$6+2=2+6$ 对吗？查看图 2 完成的加法表，就能很快回答这个问题。

由图 2 得出，$6+2=1$ 和 $2+6=1$。

在下面的例子里，用符号 $\stackrel{?}{=}$ 表示一个问题。例如：$a+b \stackrel{?}{=} b+a$，应读成"a 加 b 等于 b 加 a 吗？"

a. $5+4 \stackrel{?}{=} 4+5$，	*e*. $2+5 \stackrel{?}{=} 5+2$，
b. $2+1 \stackrel{?}{=} 1+2$，	*f*. $3+0 \stackrel{?}{=} 0+3$，
c. $0+6 \stackrel{?}{=} 6+0$，	*g*. $6+5 \stackrel{?}{=} 5+6$，
d. $1+3 \stackrel{?}{=} 3+1$，	*h*. $4+1 \stackrel{?}{=} 1+4$。

从上面模 7 系统的例子里，你能总结出关于可交换的性质吗？

为了完全确定一个系统是否可交换，你需要做多少次验证呢？假如你只有一种情况没有验证，其它每一种情况都验证对了，也不能下一个肯定是可交换系统的结论。因为这一种未被验证的情况，也说不定正好就和前面发现的可交换的结论相矛盾呢！所以，每一个可能有的组合都必须考查到。

仔细地查看模 7 时钟算术的加法表(图6)，对于要检验一个系统的可交换性，我们将指出一个有趣的简单方法。

你注意到这个表里的某些数吗？从加法表的左上角到右

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com