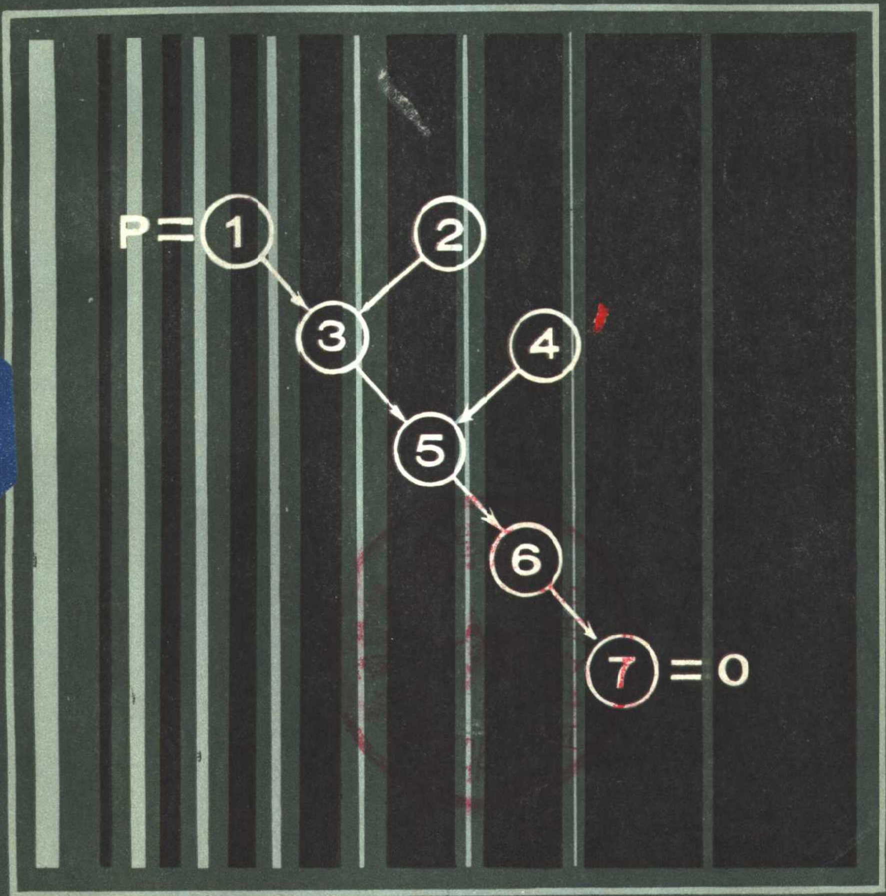
# 初中数学疑难问答

## 下 册

段云鑫 等编著




地质出版社

# 初中数学疑难问答

（下　册）

段云鑫　翟工拓　赵喜臻　编著

陈伟侯　校阅

地　质　出　版　社

初中数学疑难问答
（下　册）
段云鑫　等编著
地质矿产部书刊编辑室编辑
责任编辑：赵　薇
地质出版社出版
（北京西四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
开本：787×1092 1/32　印张：12 5/8　字数：281,000
1985年12月北京第一版·1985年12月北京第一次印刷
印数：1—44,530册　　定价：1.70元
统一书号：7038·新176

# 目　录

## 下　册　几何及数学推理常识

# 第五章　平面几何概观

## 5.1　几何学在古代是怎样产生和发展的？

几何学的产生，可以追溯到远古时代，是由人类的实践活动（丈量土地、度量物体的体积等等）的需要而产生的。

自然界本身存在着几何图形的原型。例如，十五的月亮是圆的；湖面是平的；光线是直的；将石子投入水中，激起的波纹是圆的。人类从自然界领会了这些几何图形，并逐步按照自己的要求来制造有规则形状的物体。现在发掘出来的有几何纹的陶器便是一个有力的证据。

量的概念——长度、面积、体积，也同样是从人类的实践活动中产生的。公元前四世纪的古希腊学者罗德的欧第姆曾经说过："几何是埃及人发现的，从测量土地中产生的。因为尼罗河水泛滥，经常冲击地界，所以，这种测量对埃及人是必需的。"当然，土地的测量不是激起古人建立几何学的唯一来源。从流传下来的史料可以断定：埃及和巴比伦人会测定最简单的面积和体积，已经知道圆周对直径的相当精确的比率，他们已经有了相当多的几何知识，但只是经验的汇集，还未发展为一门科学。这样的一个发展阶段，有些数学史家们称为实验几何学阶段。

类似的情况，在其它民族中也存在。比如，我国汉朝人写的《周髀算经》一书中，记载了一则传说，根据这个传说，估计在西周初年(相当于公元前1000年)，就已经知道了直角三角形的一个特殊性质——勾三、股四、弦五。成书于公

元前四世纪（战国时期）的"墨经"，记载了许多几何概念的定义，例如："直，参也"，参就是三，意思是三点在同一直线上；"圆，一中同长也"，中就是中心，长就是距离，圆上任意一点到中心的距离都相等，这就与现代的定义差不多了。

从公元前七世纪到公元前一世纪，几何学作为一门科学，在古希腊得到蓬勃的发展。在这个时期，人们不仅积累了大量的几何知识，还对几何的证明方法进行了研究。流传到现在的史料表明，爱多克斯的工作建立了数学上以明确的公理为依据的演绎推理。亚里斯多德认为：未经定义的名词是需要的，因为在一系列的定义里总得有个开头；一个定义只能告诉我们一件事物是什么，并不说明它一定存在。定义了的东西是否存在，还有待于证明，除非是少数几个第一性的东西，诸如点和直线，它们的存在是同公理（第一性原理）一起事先为人们所接受的。亚里斯多德还把公理和公设加以区别，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理。他把逻辑原理（矛盾律、排中律、等量加等量其和相等…）都列为公理。亚里斯多德还认为：公设无需证明，是不言自明的，但其是否为真，应受推出结果的检验；所列出的一批公理或公设，数目应该愈少愈好，只要用它们足以能证明所有的结果。

欧几里德生活在公元前300年左右（关于他的生平几乎就只知道这一点），他在前人所写的几何课本的基础上，写了"几何原本"。

这是最早的一本内容丰富的教科书，而且为所有后代人所使用。读了这本书，可以对数学本身的看法，对证明的想法，对定理按逻辑次序的排法，都学到一些东西。因此，从

历史上的结果来看，它对数学发展的影响超过任何别的书。以欧几里得的《几何原本》为标志，几何学的发展进入了推理几何学阶段，几何发展史上的实验几何学阶段也就结束了。

## 5.2 为什么现行中学几何知识都属于欧几里德几何?

欧几里德的《几何原本》成书于公元前三世纪左右。到十九世纪为止，《几何原本》一直被看作纯粹数学著作的典范。虽然在其后的两千多年的时间里，人们不断发现了一些新的几何性质，丰富了《几何原本》，但并未对它的原理添加什么东西。

在《几何原本》中，有许多个别命题的陈述方式是前人的工作，并非欧几里德的创造。但整部书的陈述方式——一开头就摆出所有的公理，明确地提出所有的定义，有条不紊地推演一系列定理——这是欧几里德的独创。特别值得一提的是，为了将当时已有的几何知识构成一个严谨的逻辑体系，欧几里德提出了第五公设：若一直线与两直线相交，并且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。第五公设充分显示了欧几里德的数学才能。

第五公设相当于现代为欧几里德几何建立的公理体系中的平行公理：设$a$是任意直线，$A$是不属于直线$a$的点，此时，在由直线$a$和点$A$所确定的平面上，至多存在一条过点$A$而不与直线$a$相交的直线。

平行公理是欧几里德几何与非欧几里德几何的分界线：以平行公理作为出发点，便是欧几里德几何；不以平行公理作为出发点，便是非欧几里德几何。

现行中学几何教材(平面几何、立体几何、解析几何)，都是在平行公理的基础上建立起来的。例如，三角形三内角之和为180°，勾股定理，直角坐标系等等，都以平行公理作为原始出发点。所以，现行中学几何课本的内容都属于欧几里德几何。

## 5.3 什么是非欧几何？

现行中学平面几何中，平行线的基本性质是："经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行"，它的作用相当于欧几里德第五公设，也简称为平行公理。这个公理是整个欧氏几何赖以建立起来的重要基石之一。

容易看出，平行公理由存在性和唯一性两部分组成。存在性是说："经过直线外一点有一条直线和这条直线平行"，唯一性是说："经过直线外一点只有一条直线和这条直线平行"。在欧几里德的公理体系中，平行线的存在性是可以证明的。关于"平行线唯一性"的正确性，由于并不那么明显，在欧几里德几何占统治地位的两千多年的时间里，许多数学家企图在欧氏几何的体系中，对此给以逻辑推理而作为定理，但这些努力终归都失败了。直到1826年2月23日，俄国著名数学家罗巴切夫斯基发表了《简要叙述平行线定理的一个严格证明》，才回答了这个问题。

总结起来，罗巴切夫斯基的回答有以下三点：

第一，第五公设是不能由欧几里德的其它公理推出的；

第二，欧几里德几何的基本命题添上第五公设的否定命题以后，可以展开一种与欧氏几何不同的、逻辑上完整而富有内容的新几何学；

第三，新几何学应当放到实践中去检验，不应该当作任

意的逻辑体系来研究，而应当作为促进物理理论的可能途径和方法来研究。

罗巴切夫斯基用下列公理——通过直线外一点，至少能引两条直线与该直线平行——来代替欧几里德的平行公理，得到下列一些结果：

三角形的各内角之和总小于两直角；

两个三角形相等，假如它们的三个角对应相等；

圆周长$l$与半径$r$不成正比。

罗巴切夫斯基的几何学是否有现实意义？1870年，德国数学家克莱因在欧几里德几何中构造了一个模型，解释了罗巴切夫斯基几何的现实意义，后来（1913年）又被用到物理学的相对论中去。

继罗巴切夫斯基之后，德国数学家黎曼在1854年发表了“关于作为几何学基础的假设”，创立了另一种非欧几何学，现在通称为黎曼几何。黎曼几何以下列两条公理代替平行公理：同一平面上的任何两条直线一定相交；直线可以无限延伸，但长度有限制。十九世纪末黎曼几何得到极大的发展。1915年，爱因斯坦在他的广义相对论中把黎曼几何应用到万有引力的理论中，这对黎曼几何具有特殊的意义。

对黎曼几何的进一步研究，使人们弄清楚了：欧几里德几何、罗巴切夫斯基几何，都可以看作是黎曼几何的特例。在人们的日常生产和生活中，所用的都是欧几里德几何学。所以，在中学阶段，我们只讲授欧几里德几何学。如果要了解罗氏几何和黎曼几何，那就必须阅读较高深的数字书籍了。

## 5.4 现行中学平面几何课本用了哪些公理？

传统的几何教材，基本上都是两千多年前欧几里德的

《几何原本》的通俗改写本，它有许多优点，但也有不可忽视的缺点：内容烦琐，占用的教学时间过多，不利于中学生早日接触现代数学，不能适应我国四个现代化的要求。

1977年，在全国统编教材中，对几何是采取下面的办法来解决的：基本上照欧氏几何来讲授；把一些对初学者来讲难以接受的基础定理作为公理；在此基础上严格地展开整个几何教材。

这个办法可以简称为扩大公理法。从科学上讲，这当然不是一种严谨的办法；但从教学上讲，却是一种有效的办法。这样，我国现行平面几何教材中，实际上把下列命题都作为公理（据1979年人民教育出版社的初中数学课本）。

1.经过两点有一条直线、并且只有一条直线（简称为两点决定一直线）；

2.在所有连结两点的线中，以线段为最短（简称为：两点之间，线段最短）；

3.经过一点，有且只有一条直线垂直于已知直线；

4.从直线外一点到这条直线的所有线段中，以垂直线段为最短；

5.经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行；

6.两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行（简称为：同位角相等，则两直线平行）；

7.两直线平行，则被第三条直线所截的同位角相等（简称为：两直线平行，则同位角相等）；

8.有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（简称为：边、角、边）；

9.有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（简

称为：角、边、角）；

10.有三边对应相等的两个三角形全等（简称为：边、边、边）.

## *5.5 什么是希尔伯特公理体系？

欧几里德的《几何原本》，实际上提出了一个公理体系，就当时的水平来说，这是最完美的了．但随着时间的推移、人类认识的发展，人们发现欧氏公理体系有许多不容忽视的缺点．例如，在三角形内取定一点$P$，在三角形外取定一点$Q$，那么，连结$P$、$Q$两点的线段$PQ$，被认为当然一定与三角形的一条边交于一点．现在的中学平面几何中，这个结论也是一种建立在直观图形上的默认的真理，但作为一门严谨的演绎科学来说，则是一种不容忽视的缺点了．类似这样的未加阐明的假定，后人发现了十来处，这些假定都是从图形上来看是显然的，未加严格的证明而无意中用进去的．

十九世纪中叶，当非欧几何问世以后，数学家们感到，非常有必要重建欧氏几何的基础，把那些不严谨的东西去掉．在十九世纪的最后三十年中，有许多人从事这项工作．其中，陈述最简单、最接近于欧几里德原本中的公理体系的，是由德国大数学家希尔伯特在1899年给出来的，后又经过多次修改，成为世界公认的欧氏几何基础．我们介绍如下*：

希尔伯特的几何公理体系

Ⅰ.从属公理　这组公理是确定各种几何基本概念之间的从属关系的．

Ⅰ—1．对于任意两点$A$和$B$，存在着通过这两个点的直

* 此处全文抄录《中学数学手册》271页—275页．苏联$A$·$\Gamma$·齐普金编著，李万年等译．知识出版社．1983．

线$a$。

I—2. 对于任意两个不同的点$A$、$B$，至多存在一条直线通过这两个点。

I—3. 在每一直线上至少有两个点。至少存在着不在同一直线上的三点。

I—4. 对于不在同一直线上的任意三点$A$、$B$、$C$，存在着包含三个已知点$A$、$B$、$C$的平面$\alpha$。对于任何平面，总存在着属于它的点。

I—5. 对于不在一直线上的任意三点$A$、$B$、$C$，至多存在一个平面通过这三个点。这个平面记作$ABC$，即该平面通过这三点。

I—6. 如果直线$a$的两点$A$、$B$在平面$\alpha$上，那么直线$a$的任何点都在平面$\alpha$上。

I—7. 如果两个平面$\alpha$与$\beta$有一个公共点$A$，那么它们至少还有一个公共点$B$。

I—8. 至少存在着不在一个平面上的四点。

公理I-1～I-3称为平面公理，其余的公理称为空间公理。

Ⅱ.顺序公理　这一组公理确定“在…之间”的概念，这些概念用来描述直线上点的次序关系，以及空间中平面的次序关系。

直线上的各点有确定的相互关系。我们用“在…之间”这一说法来描述这种关系。

Ⅱ—1. 如果点$B$在点$A$与点$C$之间，那么$A$、$B$、$C$是直线上三个不同的点，而且点$B$也在$C$与$A$之间。

Ⅱ—2. 对于直线$AC$上的任意两个不同的点$A$、$C$，至少存在着一点$B$，使点$C$在$A$与$B$之间。