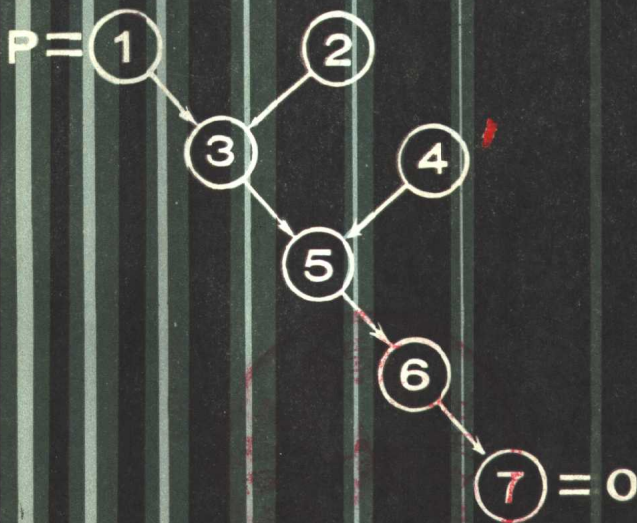


初中数学疑难问答

下 册

段云鑫 等 编 著



地 质 出 版 社

初中数学疑难问答

(下 册)

段云鑫 翟工拓 赵喜臻 编著

陈伟侯 校阅

地 质 出 版 社

初中数学疑难问答

(下 册)

段云鑫 等编著

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：赵 薇

地质出版社出版

(北 京 西 四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092¹/₃₂ 印张：12⁵/₈ 字数：281,000
1985年12月北京第一版·1985年12月北京第一次印刷

印数：1—44,530册 定价：1.70元

统一书号：7038·新176

目 录

下 册 几何及数学推理常识

第五章 平面几何概观	1
5.1 几何学在古代是怎样产生和发展的?	1
5.2 为什么现行中学几何知识都属于欧几里德几何?	3
5.3 什么是非欧几何?	4
5.4 现行中学平面几何课本用了哪些公理?	5
5.5 什么是希尔伯特公理体系?	7
5.6 我国最早的绘图工具是什么?	12
5.7 为什么一定要限用圆规和直尺进行几何作图?	13
5.8 为什么用圆规、直尺不能解决古代的几何作图三大 问题?	14
5.9 基本的作图共有哪些?	17
5.10 几何作图题一定有解吗?	19
5.11 解作图题为什么要进行分析?	23
5.12 作图题中的分析能不能代替证明?	25
5.13 什么是“三角形奠基法”?	26
5.14 轨迹定义为什么必须满足纯粹性和完备性?	29
5.15 怎样解轨迹探求题?	30
5.16 什么是“轨迹交接法”?	34
5.17 为什么画几何图形必须准确?	38
5.18 怎样判断所证的几何题是否需要添加辅助线?	39
5.19 证明平面几何命题时怎样添辅助线?	43

第六章 直线形	53
6.1 角是怎样定义的?	54
6.2 平角就是一条直线吗?	53
6.3 “线段”、“线段的长”、“线段的量数”这三个概念有什么区别	54
6.4 为什么平行线的定义中要强调“在同一平面内”?	55
6.5 怎样证明平行线的基本判定方法?	56
6.6 性质定理与判定定理有什么区别?	57
6.7 两边不等的三角形中, 不相等两边所夹的角的平分线, 必位于底边上的中线与高之间吗?	59
6.8 怎样证明三角形全等的判定定理?	60
6.9 除了“边角边”、“角边角”、“边边边”这三个定理以外, 判定两个三角形全等还有哪些定理?	64
6.10 两个三角形中, 若有两边及第三边上的高线对应相等, 这两个三角形一定全等吗?	66
6.11 面积相等并且周长也相等的两个三角形是否全等?	67
6.12 使用符号“ $\sim$ ”和“ $\cong$ ”时应注意些什么?	68
6.13 怎样找全等三角形中的对应元素?	69
6.14 怎样证明三角形四心的存在性?	72
6.15 怎样利用三角形中的四心证题?	76
6.16 怎样证明正弦定理?	82
6.17 正弦定理与余弦定理可以互相推导出来吗?	84
6.18 三角形的外心、垂心、重心三点共线吗?	86
6.19 勾股定理是什么时候发现的?	87
6.20 勾股定理有多少种证法?	90
6.21 勾股定理的逆定理有多少种证法?	96
6.22 怎样从勾股定理推广到余弦定理?	100
6.23 从勾股定理怎样发展到斯梯瓦定理?	103
6.24 勾股数的一般表示公式是什么?	107

6.25	等腰三角形有多少种定义方法？	109
6.26	已知一个三角形的两内角平分线相等，怎样证明它是等腰三角形？	110
6.27	什么是施瓦兹三角形问题？	114
6.28	什么是托罗玫定理，它是怎样转化为欧拉定理的？	115
6.29	什么是塞瓦定理？	118
6.30	什么是梅涅劳斯定理？	119
6.31	三角形中有关不等量的定理有哪些？	123
6.32	海伦公式是怎样证明的？	125
6.33	计算三角形的面积有哪些公式？	128
6.34	怎样用等积变形证(解)题？	131
6.35	为什么两线段的比与所采用的长度单位无关？	134
6.36	怎样证明平行线分线段成比例的定理？	134
6.37	怎样证明两个三角形相似？	137
6.38	怎样找相似三角形中的对应元素？	140
6.39	三角形角平分线的性质定理有几个？	142
6.40	怎样利用三点定形法找相似三角形？	146
6.41	中心对称与轴对称有什么异同？	149
6.42	位似形有什么特性？	151
6.43	为什么说两种轴对称图形没有本质的区别？	155
6.44	怎样运用轴对称的概念解题？	156
6.45	已知两边及其中一边的对角，能确定多少个三角形？	158
6.46	“梯形两底之和等于零”错在哪里？	162
6.47	怎样判定特殊的四边形？	163
第七章	圆	168
7.1	几个条件确定一个圆？	168
7.2	圆是轴对称图形吗？	169
7.3	$\angle \alpha = \widehat{AB}$ 能写成 $\angle \alpha = \widehat{AB}$ 吗？	170
7.4	$\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 能写成 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ 吗？	170

7.5	怎样度量圆内角和圆外角的度数？	171
7.6	垂径定理的推论包含多少条定理？	173
7.7	圆幂定理包括几个定理？	176
7.8	一条直线和圆会不会有三个交点？	179
7.9	两个圆会不会有三个交点？	180
7.10	怎样判断直线与圆相交、相切、相离？	180
7.11	切线可以看成是割线的特殊情况吗？	181
7.12	两圆有几条公切线？	184
7.13	怎样判断两圆相交、相切或相离？	185
7.14	怎样判定一条直线是圆的切线？	188
7.15	怎样分辨多边形和圆之间的“接”与“切”？	191
7.16	多边形指的是“面”还是“框”？	192
7.17	全等多边形有没有判定定理？	193
7.18	怎样判定一个四边形有内切圆？	194
7.19	外切于圆的四边形也内接于圆的充要条件是什么？	195
7.20	怎样等分圆周？	198
7.21	用圆规和直尺能作的正多边形有哪些？	199
7.22	什么是黄金分割？	200
7.23	用圆规、直尺怎样把圆五等分？	203
7.24	等边多边形与等角多边形一定是正多边形吗？	206
7.25	等边或等角的圆内接多边形或外切多边形一定是正多边形吗？	206
7.26	已知圆的内接(或外切)正 n 边形的边长 a ，如何计算其内接(或外切)正 $2n$ 边形的边长 a_{2n} ？	210
7.27	怎样计算 π 的近似值？	211
7.28	怎样证明四点共圆？	215
7.29	下面的证法错在哪儿(一)？	219
7.30	下面的证法错在哪儿(二)？	220
7.31	怎样证 $ab+cd=ef$ 型的几何等式？	222

7.32 怎样寻找几何定值问题中的定值?	224
第八章 数学推理常识	232
8.1 怎样定义数学概念?	232
8.2 什么是命题?	236
8.3 什么是原子命题? 什么是复合命题?	238
8.4 怎样由原子命题的真假来规定由四个基本逻辑联结 词所构成的复合命题的真假?	242
8.5 怎样求复合命题的真值?	245
8.6 怎样判定两个复合命题的同真同假?	247
8.7 怎样否定含“并且”“都是”的命题?	249
8.8 怎样否定含“或者”“至少有一个”的命题?	250
8.9 怎样否定含有“如果……那么……”的命题?	251
8.10 什么是恒真命题? 什么是恒假命题?	253
8.11 怎样分清数学命题的条件和结论?	254
8.12 什么是充分条件? 什么是必要条件?	256
8.13 什么是充分必要条件?	257
8.14 为什么要研究假言命题的四种形式?	258
8.15 一个假言命题的逆命题有多少个?	259
8.16 为什么原命题和逆否命题等价?	263
8.17 一个假言命题的逆否命题的形式只有一个吗?	265
8.18 什么是数学推理? 数学推理怎样分类?	266
8.19 常用的数学推理格式有哪些?	269
8.20 什么是推理规则? 常用的推理规则有哪几条?	273
8.21 在数学中, 常用的归纳推理有哪几种形式?	274
8.22 真命题、定理、推论是一回事吗?	276
8.23 数学定理为什么要证明?	276
8.24 什么样的证明才是正确的?	278
8.25 怎样证明一个假言命题为假?	280
8.26 什么是综合法?	281
8.27 什么是分析法?	283

8.28 分析法与综合法究竟哪个好?	285
8.29 直接证明和间接证明怎样区分?	286
8.30 什么是反证法(归谬法)?	289
8.31 什么是穷举法?	293
8.32 什么是穷举反证法?	295
8.33 怎样求分断式定理的逆定理?	297
8.34 什么是同一法?	298
参考材料 整数的性质	303
第一节 整数	303
第二节 唯一分解定理	312
第三节 线性不定方程	324
第四节 同余式	332
第五节 一次同余式	340
第六节 费尔马定理和威尔逊定理	350
第七节 一个整数的因数	359
第八节 完全数	366
第九节 欧拉定理与欧拉函数	373
第十节 毕达哥拉斯三角形	383

第五章 平面几何概观

5.1 几何学在古代是怎样产生和发展的？

几何学的产生，可以追溯到远古时代，是由人类的实践活动（丈量土地、度量物体的体积等等）的需要而产生的。

自然界本身存在着几何图形的原型。例如，十五的月亮是圆的；湖面是平的；光线是直的；将石子投入水中，激起的波纹是圆的。人类从自然界领会了这些几何图形，并逐步按照自己的要求来制造有规则形状的物体。现在发掘出来的有几何纹的陶器便是一个有力的证据。

量的概念——长度、面积、体积，也同样是从人类的实践活动中产生的。公元前四世纪的古希腊学者罗德的欧第姆曾经说过：“几何是埃及人发现的，从测量土地中产生的。因为尼罗河水泛滥，经常冲击地界，所以，这种测量对埃及人是必需的。”当然，土地的测量不是激起古人建立几何学的唯一来源。从流传下来的史料可以断定：埃及和巴比伦人会测定最简单的面积和体积，已经知道圆周对直径的相当精确的比率，他们已经有了相当多的几何知识，但只是经验的汇集，还未发展为一门科学。这样的—一个发展阶段，有些数学史家们称为实验几何学阶段。

类似的情况，在其它民族中也存在。比如，我国汉朝人写的《周髀算经》一书中，记载了一则传说，根据这个传说，估计在西周初年（相当于公元前1000年），就已经知道了直角三角形的一个特殊性质——勾三、股四、弦五。成书于公

元前四世纪（战国时期）的“墨经”，记载了许多几何概念的定义，例如：“直，参也”，参就是三，意思是三点在同一直线上；“圆，一中同长也”，中就是中心，长就是距离，圆上任意一点到中心的距离都相等，这就与现代的定义差不多了。

从公元前七世纪到公元前一世纪，几何学作为一门科学，在古希腊得到蓬勃的发展。在这个时期，人们不仅积累了大量的几何知识，还对几何的证明方法进行了研究。流传到现在的史料表明，爱多克斯的工作建立了数学上以明确的公理为依据的演绎推理。亚里斯多德认为：未经定义的名词是需要的，因为在一系列的定义里总得有个开头；一个定义只能告诉我们一事物是什么，并不说明它一定存在，定义了的东西是否存在，还有待于证明，除非是少数几个第一性的东西，诸如点和直线，它们的存在是同公理（第一性原理）一起事先为人们所接受的。亚里斯多德还把公理和公设加以区别，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理。他把逻辑原理（矛盾律、排中律、等量加等量其和相等…）都列为公理。亚里斯多德还认为：公设无需证明，是不言自明的，但其是否为真，应受推出结果的检验；所列出的一批公理或公设，数目应该愈少愈好，只要用它们足以能证明所有的结果。

欧几里德生活在公元前300年左右（关于他的生平几乎就只知道这一点），他在前人所写的几何课本的基础上，写了“几何原本”。

这是最早的一本内容丰富的教科书，而且为所有后代人所使用。读了这本书，可以对数学本身的看法，对证明的想法，对定理按逻辑次序的排法，都学到一些东西。因此，从

历史上的结果来看，它对数学发展的影响超过任何别的书。以欧几里得的《几何原本》为标志，几何学的发展进入了推理几何学阶段，几何发展史上的实验几何学阶段也就结束了。

5.2 为什么现行中学几何知识都属于欧几里德几何？

欧几里德的《几何原本》成书于公元前三世纪左右。到十九世纪为止，《几何原本》一直被看作纯粹数学著作的典范。虽然在其后的两千多年的时间里，人们不断发现了一些新的几何性质，丰富了《几何原本》，但并未对它的原理添加什么东西。

在《几何原本》中，有许多个别命题的陈述方式是前人的工作，并非欧几里德的创造。但整部书的陈述方式——一开头就摆出所有的公理，明确地提出所有的定义，有条不紊地推演一系列定理——这是欧几里德的独创。特别值得一提的是，为了将当时已有的几何知识构成一个严谨的逻辑体系，欧几里德提出了第五公设：若一直线与两直线相交，并且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。第五公设充分显示了欧几里德的数学才能。

第五公设相当于现代为欧几里德几何建立的公理体系中的平行公理：设 a 是任意直线， A 是不属于直线 a 的点，此时，在由直线 a 和点 A 所确定的平面上，至多存在一条过点 A 而不与直线 a 相交的直线。

平行公理是欧几里德几何与非欧几里德几何的分界线；以平行公理作为出发点，便是欧几里德几何；不以平行公理作为出发点，便是非欧几里德几何。

现行中学几何教材(平面几何、立体几何、解析几何),都是在平行公理的基础上建立起来的。例如,三角形三内角之和为 180° ,勾股定理,直角坐标系等等,都以平行公理作为原始出发点。所以,现行中学几何课本的内容都属于欧几里德几何。

5.3 什么是非欧几何?

现行中学平面几何中,平行线的基本性质是:“经过直线外一点,有且只有一条直线和这条直线平行”,它的作用相当于欧几里德第五公设,也简称为平行公理。这个公理是整个欧氏几何赖以建立起来的重要基石之一。

容易看出,平行公理由存在性和唯一性两部分组成。存在性是说:“经过直线外一点有一条直线和这条直线平行”,唯一性是说:“经过直线外一点只有一条直线和这条直线平行”。在欧几里德的公理体系中,平行线的存在性是可以证明的。关于“平行线唯一性”的正确性,由于并不那么明显,在欧几里德几何占统治地位的两千多年的时间里,许多数学家企图在欧氏几何的体系中,对此给以逻辑推理而作为定理,但这些努力终归都失败了。直到1826年2月23日,俄国著名数学家罗巴切夫斯基发表了《简要叙述平行线定理的一个严格证明》,才回答了这个问题。

总结起来,罗巴切夫斯基的回答有以下三点:

第一,第五公设是不能由欧几里德的其它公理推出的;

第二,欧几里德几何的基本命题添上第五公设的否定命题以后,可以展开一种与欧氏几何不同的、逻辑上完整而富有内容的新几何学;

第三,新几何学应当放到实践中去检验,不应该当作任

意的逻辑体系来研究，而应当作为促进物理理论的可能途径和方法来研究。

罗巴切夫斯基用下列公理——通过直线外一点，至少能引两条直线与该直线平行——来代替欧几里德的平行公理，得到下列一些结果：

三角形的各内角之和总小于两直角；

两个三角形相等，假如它们的三个角对应相等；

圆周长 l 与半径 r 不成正比。

罗巴切夫斯基的几何学是否有现实意义？1870年，德国数学家克莱因在欧几里德几何中构造了一个模型，解释了罗巴切夫斯基几何的现实意义，后来（1913年）又被用到物理学的相对论中去。

继罗巴切夫斯基之后，德国数学家黎曼在1854年发表了“关于作为几何学基础的假设”，创立了另一种非欧几何学，现在通称为黎曼几何。黎曼几何以下列两条公理代替平行公理：同一平面上的任何两条直线一定相交；直线可以无限延伸，但长度有限制。十九世纪末黎曼几何得到极大的发展。1915年，爱因斯坦在他的广义相对论中把黎曼几何应用到万有引力的理论中，这对黎曼几何具有特殊的意义。

对黎曼几何的进一步研究，使人们弄清楚了：欧几里德几何、罗巴切夫斯基几何，都可以看作是黎曼几何的特例。在人们的日常生产和生活中，所用的都是欧几里德几何学。所以，在中学阶段，我们只讲授欧几里德几何学。如果要了解罗氏几何和黎曼几何，那就必须阅读较高深的数学书籍了。

5.4 现行中学平面几何课本用了哪些公理？

传统的几何教材，基本上都是两千多年前欧几里德的

《几何原本》的通俗改写本，它有许多优点，但也有不可忽视的缺点：内容烦琐，占用的教学时间过多，不利于中学生早日接触现代数学，不能适应我国四个现代化的要求。

1977年，在全国统编教材中，对几何是采取下面的办法来解决的：基本上照欧氏几何来讲授；把一些对初学者来讲难以接受的基础定理作为公理；在此基础上严格地展开整个几何教材。

这个办法可以简称为扩大公理法。从科学上讲，这当然不是一种严谨的办法；但从教学上讲，却是一种有效的办法。这样，我国现行平面几何教材中，实际上把下列命题都作为公理（据1979年人民教育出版社的初中数学课本）。

1. 经过两点有一条直线、并且只有一条直线（简称为两点决定一直线）；

2. 在所有连结两点的线中，以线段为最短（简称为：两点之间，线段最短）；

3. 经过一点，有且只有一条直线垂直于已知直线；

4. 从直线外一点到这条直线的所有线段中，以垂直线段为最短；

5. 经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行；

6. 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行（简称为：同位角相等，则两直线平行）；

7. 两直线平行，则被第三条直线所截的同位角相等（简称为：两直线平行，则同位角相等）；

8. 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（简称为：边、角、边）；

9. 有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（简

称为：角、边、角）；

10.有三边对应相等的两个三角形全等（简称为：边、边、边）。

5.5 什么是希尔伯特公理体系？

欧几里德的《几何原本》，实际上提出了一个公理体系，就当时的水平来说，这是最完美的了。但随着时间的推移、人类认识的发展，人们发现欧氏公理体系有许多不容忽视的缺点。例如，在三角形内取定一点 P ，在三角形外取定一点 Q ，那么，连结 P 、 Q 两点的线段 PQ ，被认为当然一定与三角形的一条边交于一点。现在的中学平面几何中，这个结论也是一种建立在直观图形上的默认的真理，但作为一门严谨的演绎科学来说，则是一种不容忽视的缺点了。类似这样的未加阐明的假定，后人发现了十来处，这些假定都是从图形上来看是显然的，未加严格的证明而无意中用进去的。

十九世纪中叶，当非欧几何问世以后，数学家们感到，非常有必要重建欧氏几何的基础，把那些不严谨的东西去掉。在十九世纪的最后三十年中，有许多人从事这项工作。其中，陈述最简单、最接近于欧几里德原本中的公理体系的，是由德国大数学家希尔伯特在1899年给出来的，后又经过多次修改，成为世界公认的欧氏几何基础。我们介绍如下：

希尔伯特的几何公理体系

I.从属公理 这组公理是确定各种几何基本概念之间的从属关系的。

I—1. 对于任意两点 A 和 B ，存在着通过这两个点的直

• 此处全文抄录《中学数学手册》271页—275页，苏联 $A\cdot I\cdot$ 齐普金编著，李万年等译，知识出版社，1983。

线 a 。

- I—2. 对于任意两个不同的点 A 、 B ，至多存在一条直线通过这两个点。
- I—3. 在每一直线上至少有两个点。至少存在着不在同一直线上的三点。
- I—4. 对于不在同一直线上的任意三点 A 、 B 、 C ，存在着包含三个已知点 A 、 B 、 C 的平面 α 。对于任何平面，总存在着属于它的点。
- I—5. 对于不在一直线上的任意三点 A 、 B 、 C ，至多存在一个平面通过这三个点。这个平面记作 ABC ，即该平面通过这三点。
- I—6. 如果直线 a 的两点 A 、 B 在平面 α 上，那么直线 a 的任何点都在平面 α 上。
- I—7. 如果两个平面 α 与 β 有一个公共点 A ，那么它们至少还有一个公共点 B 。
- I—8. 至少存在着不在一个平面上的四点。

公理 I—1 ~ I—3 称为平面公理，其余的公理称为空间公理。

II. 顺序公理 这一组公理确定“在…之间”的概念，这些概念用来描述直线上点的次序关系，以及空间中平面的次序关系。

直线上的各点有确定的相互关系。我们用“在…之间”这一说法来描述这种关系。

- II—1. 如果点 B 在点 A 与点 C 之间，那么 A 、 B 、 C 是直线上三个不同的点，而且点 B 也在 C 与 A 之间。
- II—2. 对于直线 AC 上的任意两个不同的点 A 、 C ，至少存在着一点 B ，使点 C 在 A 与 B 之间。