Sanwei

知识 方法 能力

总策划 王后雄
本册主编 郑小玲

# 三维

## 高效学习法

# 数学 高中 第二册（下）

（适用人教版试验修订本·必修）

华中师范大学出版社

三
SAN WEI
维

知识 方法 能力

总策划 王后雄

本册主编 郑小玲

# 三维

# 高效学习法

## 高中 第二册（下） 数学

（适用人教版试验修订本·必修）

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

**图书在版编目(CIP)数据**

数学(高中第二册下)/郑小玲主编.
一武汉:华中师范大学出版社,2002.11
(知识·方法·能力三维高效学习法)
ISBN 7-5622-2412-9/G·1216
Ⅰ.数… Ⅱ.郑… Ⅲ.数学-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 040257 号

知识·方法·能力三维高效学习法
数 学
(高中第二册下)
© 郑小玲 主编

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山 邮编:430079)

新华书店湖北发行所经销
武汉大学出版社印刷总厂印刷

责任编辑:彭守权 吴小岸
责任校对:罗 艺
封面设计:新视点
督 印:方汉江

开本:880mm × 1230mm 1/16
版次:2001 年 11 月第 1 版
印数:25001 ~ 55100
印张:8.375 字数:225 千字
2002 年 11 月第 4 次印刷
定价:8.50 元

# 寄语读者

《三维高效学习法》丛书是在"夯实基础，教会方法，培养能力"的三维教法研究成果的基础上，经过我省一批长期从事一线教学和学法研究的特级、高级教师共同设计、编著而成，它融合了国内外教法、学法的最新成果，让学生在高效学习中充分地激活思维，真正体现了实用、好用、高效的编撰思想。

## ☞ 创新策划 学考诠释

丛书与新教材同步，按节(课、单元)分层讲解。每节(课)由 4 大栏目全程指点：

**知识篇** 对各节重点、难点、疑点、考点、易混淆知识逐条讲解，透析课本知识与延伸知识，突出夯实基础，体现知识层面目标。

**方法篇** 挖掘与本节知识和解题有关的思维方法、解题思想、解题技巧等，帮助学生改进学习方法，激发他们的学习兴趣。

**能力篇** 从知识、方法到能力层级递进，着重探讨能力层面上的问题和方法，体现综合能力、实践能力和创新能力。

**三级检测** 围绕各节知识、方法、能力三级目标，精心编选知识检测、方法检测、能力检测，各级试题相互印照，功能显著。

各大栏目真正体现了本丛书"教材诠注、教参例释、创新学案"的多重功能。

## ☞ 双栏对照 一目了然

丛书在处理讲解和例题的版式设计上，采用了双栏对应，讲例对照的新颖版式，其目的及特点是：

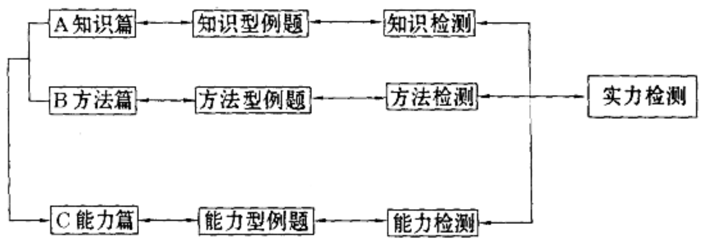
**讲例融通** 左栏为解题的依据或答题要点，右栏为从各类考试中精选的样板名题。每讲有例，讲例相互点击，解题依据更加凸现。

**轻松学考** 丛书摒弃传统流水叙述、讲例脱节、读之枯燥的弊端，双栏排版，一目了然，有效地降低学习和考试的认知难度，学考轻松无限。

**优化高效** 让学生一看就懂、一学就会，让差生学好、中等生学优、优等生学尖，这就是本丛书对广大读者的承诺。

## ☞ 名家金言　科学指点

《三维高效学习法》是科学设计、高效学习、轻松应考的必备书。我们建议在使用本书时按以下图示过程学习：




学习者最易学好的书，乃著书者最难撰写的书，一套最难编著的《三维高效学习法》的诞生，让学习者拥有一套最易学好的书。我们真诚希望——

**学考选"三维"，北大清华见！**

《三维高效学习法》课题研究组
华中师范大学出版社

★Sanwei

# 目　录
MULU

# 第九章

# 直线、平面、简单的几何体

## 9.1 平面的基本性质

### 知识篇

● 走向成功的基础

1. 平面

(1) 平面的概念

和直线一样，平面是一个只描述而不定义的概念，它是从一些具体的事物(如镜面、平静的水面等)中抽象出来的数学概念，它的三个基本特征是：①平面是平的；②平面是无限延展的；③平面是没有厚度的.

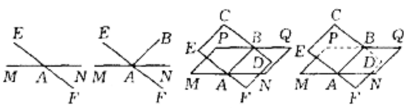
(2) 平面的画法

①水平位置的平面的画法：画表示水平位置平面的平行四边形，通常把锐角 $\alpha$ 画成 45°，横边画成邻边的两倍.

②直立位置的平面的画法：画表示直立位置平面的平行四边形，要有一组对边为铅垂线.

③非水平非直立的平面的画法：画表示非水平非直立平面的平行四边形，只要将锐角 $\alpha$ 画成不等于 45°就可以了.

④相交平面的画法：当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮住部分的线段画成虚线或者不画，以增强立体感，具体画法的步骤为：



(1) (2) (3) (4)

1° 画两条相交直线，表示两个平面的平行四边形相交的两条边，如图(1)中的 $EF$、$MN$.

2° 画两个相交平面的交线，如图(2)中的 $AB$.

3° 通过端点 $E$、$F$、$M$、$N$ 分别画出与 $AB$ 平行且相等的线段 $EC$、$FD$、$MP$、$NQ$，连结 $CD$ 和 $PQ$，可以得到表示平面的平行四边形 $EFDC$ 和 $MNQP$. 如图(3).

【例 1A】下列语句是否正确？为什么？

(1) 一个平面的长是 10 cm，宽是 5 cm；

(2) 一个平行四边形相邻两边长分别为 10 cm，5 cm；

(3) 一个平面的面积是 36 $cm^2$；

(4) 10 个平面重叠一起比 2 个平面重叠在一起要厚.

【解析】(1) 不正确，因为平面是无限延展的，所以它没有长和宽；

(2) 正确，因为平行四边形是一个有限的平面图形，两相邻的边可以有具体的长度；

(3) 不正确，因为平面是无限延展的，所以无法计算它的面积；

(4) 不正确，同平面几何中直线一样，直线无长短粗细可言，立体几何中的平面无大小厚薄之分.

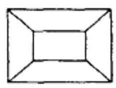
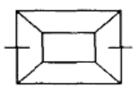


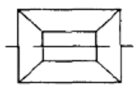
图 9.1-1

【例 2A】如图 9.1-1 是平面图形还是空间立体图形？

【解析】它既可能是平面图形，也可能是一个空间图形的直观图. 原因是小平行四边形是凹在后面，还是凸在前面，一时无法辨别.

为此，可以想象一下实物模型，再去观察图形，添加辅助元素，如图(1)，小平行四边形就凸在前面，而图(2)小平行四边形凹在后面.


(1)


(2)

【例 3A】已知△$ABC$，若 $AB$，$BC$ 在某一平面 $\alpha$ 内，求证：$AC$ 也在该平面内.

【解析】证明：∵ $AB$ 在 $\alpha$ 内，

∴ 点 $A$ 在 $\alpha$ 内，$BC$ 在 $\alpha$ 内，

∴ 点 $C$ 在 $\alpha$ 内. ∵ $A$，$C$ 在平面 $\alpha$ 内，

∴ $AC$ 在平面 $\alpha$ 内.

【例 4A】完成下面两个相交平面的作图，如图 9.1-2，其中 $AB$ 为两个相交平面的交线.

4° 把被平面遮住的部分画成虚线(或者不画).如图(4).

(3) 平面的表示法

平面通常用一小写希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 来表示,如平面 $\alpha$,平面 $\beta$,平面 $\gamma$ 等;也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的大写字母来表示,如平面 $AC$,平面 $BD$;或表示多边形顶点的字母来表示,如平面 $ABC$ 等.

2. 平面的基本性质

(1) 三个公理

公理 1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

该公理用来判断直线是否在平面内.

公理 2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是一条直线.

该公理主要用来证明多点共线的问题.

公理 3:经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面.

对于公理 3,应注意:①不在同一直线上;②三个点;③"有且只有一个"即为"确定".

(2) 公理 3 的三个推论

推论 1:经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

推论 2:经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3:经过两条平行直线有且只有一个平面.

公理 3 及三个推论是点线共面或由已知点线确定平面的依据.

3. 空间图形在平面内的表示法

(1) 水平放置的平面图形的直观图的画法

画水平放置的平面多边形的关键是确定多边形顶点的位置,其基本画法的步骤如下:

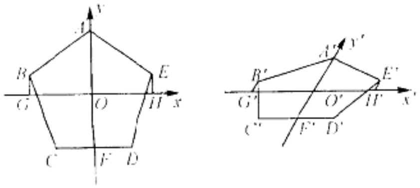
①选取坐标系:在已知图形中取互相垂直的轴 $Ox$,$Oy$,画直观图时,把它画成对应的轴 $O'x'$,$O'y'$ 使 $\angle x'O'y'=45°$ 或 $135°$($O'x'$,$O'y'$ 确定的平面表示水平平面);

②画平行线段:已知图形中平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 $x'$ 轴和 $y'$ 轴的线段;

③截取长度:已知图形中平行于 $x$ 轴的线段,在直观图中保持原长度不变,平行于 $y$ 轴的线段,长度为原来的一半;

④依次连接各顶点得多边形的直观图.

画水平放置的正五边形的直观图(如图)




画法:(1)在已知正五边形 $ABCDE$ 中,取正五边

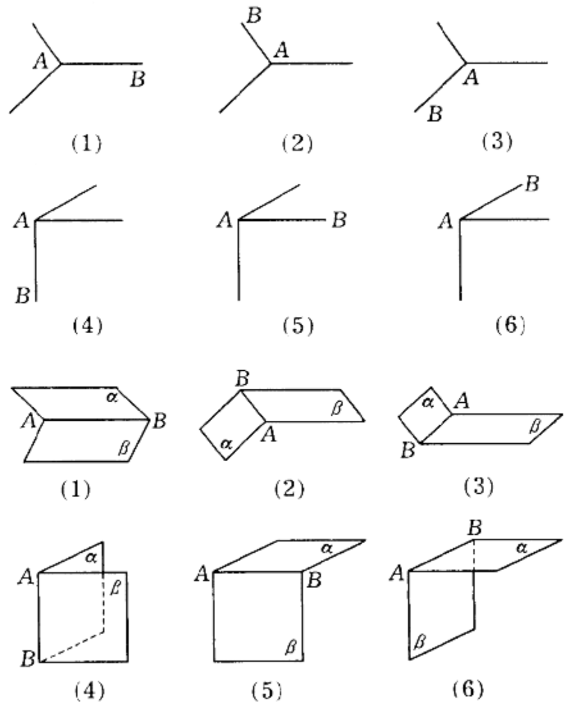



图 9.1-2

【解析】由两个相交平面的画法,本题只须过线段的端点画出与交线 $AB$ 平行且相等的线段,即可得到相关的平行四边形,注意被平面遮住的部分应画成虚线或者不画,然后在相关的平面上标上表示平面的字母即可.

【例 5A】在空间四边形 $ABCD$ 的各边 $AB$,$BC$,$CD$,$DA$ 上分别取 $E$,$F$,$G$,$H$ 四点,若 $EF\cap GH=P$,证明:$A$,$C$,$P$ 三点共线.

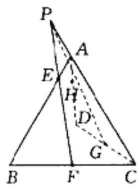



图 9.1-3

【解析】如图 9.1-3:$\because$ $E\in AB$,$F\in BC$,

由公理 1,$EF\subset$ 平面 $ABC$,

$EF\cap GH=P$,

$\therefore$ $P\in EF$,

$\therefore$ $P\in$ 平面 $ABC$.

同理 $P\in$ 平面 $ACD$.

由公理 2 可知,点 $P$ 在平面 $ABC$ 与平面 $ACD$ 的交线上,

而平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$,

$\therefore$ $P\in AC$.

即 $A$,$C$,$P$ 三点共线.

【点评】这种问题的证明思路是证明多点都在两个平面的交线上.

【例 6A】画水平放置的正六边形的直观图(如图 9.1-4).

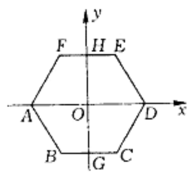



图 9.1-4

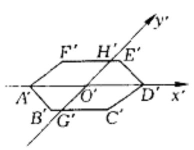



图 9.1-5

【解析】画法:(1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中,取对角线 $AD$ 所在的直线为 $x$ 轴,取对称轴 $GH$ 为 $y$ 轴,画对应的 $x'$ 轴,$y'$ 轴.使 $\angle x'O'y'=45°$.

形的中心 $O$ 为坐标原点，对称轴 $FA$ 为 $y$ 轴．过点 $O$ 与 $y$ 轴垂直的直线为 $x$ 轴，分别过点 $B$，$E$ 作 $BG /\!/ Oy$，$EH /\!/ Oy$，与 $x$ 轴分别交于 $G$、$H$．

画对应的轴 $O'x'$，$O'y'$ 使 $\angle x'O'y' = 45°$．

(2) 以点 $O'$ 为中心，在 $x'$ 轴上取 $G'H' = GH$，分别过 $G'$，$H'$ 在 $x$ 轴的上方作 $G'B' /\!/ O'y'$，$H'E' /\!/ O'y'$，且使 $B'G' = \frac{1}{2}BG$，$H'E' = \frac{1}{2}HE$；在 $y'$ 轴上 $x'$ 轴的上方取 $O'A' = \frac{1}{2}OA$，在 $x'$ 轴的下方取 $O'F' = \frac{1}{2}OF$，并以点 $F'$ 为中心画 $C'D' /\!/ O'x'$ 且 $C'D' = CD$．连结 $A'B'$，$B'C'$，$D'E'$，$E'A'$ 所得的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图．

(2) 以点 $O'$ 为中点，在 $x'$ 轴上取 $A'D' = AD$，在 $y'$ 轴上取 $G'H' = \frac{1}{2}GH$，以点 $H'$ 为中点画 $F'E'$ 平行于 $x'$ 轴，并等于 $FE$；再以 $G'$ 为中点画 $B'C'$ 平行于 $x'$ 轴，并等于 $BC$．

(3) 连结 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$，所得的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图，如图 9.1-5．

【点评】(1) 画好图后，要将辅助线擦去；

(2) 这种画直观图的方法叫做斜二测画法．

## 方法篇

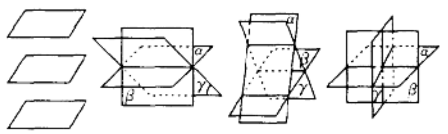
**●应付自如的诀窍**

1. 平面的个数的确定及平面把空间分成若干部分

公理 3 及三个推论是用来确定平面的，对于确定平面的个数问题，这四种方法可以交互使用．如：四条线段首尾相接，它们最多可以确定多少个平面？

由推论 2 知，两条相交直线确定一个平面，四条线段首尾相接，最多可产生四对相交线段，因此，最多可确定 4 个平面．

由于平面是无限的，因此一个平面可以把空间分成两个部分，两个平面可以把空间分成 4 个部分．(两个平面相交)也可以分成 3 个部分(平行)，三个平面可以把空间分成 4 个部分，也可以分成 6、7、8 个部分．(如下图)




① ② ③ ④

2. 点共线问题

证明多点共线问题的依据是公理 2．一般方法有：①根据平面的基本性质作出辅助平面，并找出辅助平面与已知平面的交线，然后再判定这些点在交线上；

②第三点在前两点所确定的直线上．

3. 点、线共面问题

证明若干点或直线共面，通常有两种处理方法：

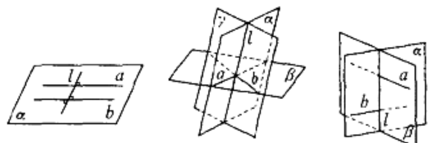
①先由已知的直线或点，根据确定平面的条件确定一个平面，再由公理 1 证明其余直线、点均在这

【例 7B】已知直线 $a$ 和 $b$ 都与直线 $l$ 垂直相交，问这三条直线可以确定几个平面？

【解析】可以从其中两条直线 $a$ 与 $b$ 的位置关系上去分类考虑．

(1) 当 $a /\!/ b$ 时，如图 9.1-6(甲)所示，直线 $a$，$b$，$l$ 只确定一个平面；

(2) 当 $a$ 与 $b$ 相交时，则 $a$，$b$，$l$ 三条直线交于一点，因为 $a \perp l$，$b \perp l$，所以直线 $a$ 与 $b$，直线 $a$ 与 $l$，直线 $b$ 与 $l$ 分别可以确定一个平面，如图 9.1-6(乙)所示，它们可以确定三个平面；




(甲) (乙) (丙)

图 9.1-6

(3) 当直线 $a$ 与 $b$ 既不平行，也不相交时，如图 9.1-6(丙)所示，这时直线 $a$ 与 $b$，直线 $b$ 与 $l$ 分别可确定一个平面，它们可以确定两个平面．

【点评】对这类问题，要注意使用模型和用穷举法，全面考虑每一种可能情况，做到无遗漏．

【例 8B】求证：两两相交而不过同一点的四条直线必在同一平面内．

【解析】四条直线两两相交且不共点，可能有两种情况，一是有三条直线共点，二是没有三条直线共点．故证明要分两种情况．

证明：(1) 如图 9.1-7(甲)，设直线 $a$，$b$，$c$ 相交于 $O$ 点，直线 $d$ 和 $a$，$b$，$c$ 分别交于 $M$，$N$，$P$ 三点．直线 $d$ 和点 $O$ 确定平面 $\alpha$．

$\because$ $O \in$ 平面 $\alpha$，$M \in$ 平面 $\alpha$，$O \in$ 直线 $a$，$M \in$ 直线 $a$，

$\therefore$ 直线 $a \subset$ 平面 $\alpha$．同理 $b \subset$ 平面 $\alpha$，$c \subset$ 平面 $\alpha$．

$\therefore$ 直线 $a$，$b$，$c$，$d$ 共面于 $\alpha$．

(2) 如图 9.1-7(乙)，设直线 $a$，$b$，$c$，$d$ 两两相交，且任三条不共点，交点分别是 $M$，$N$，$P$，$Q$，$R$，$G$．

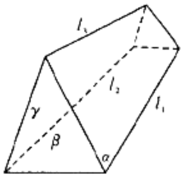
个平面内,从而使问题得证,这种证明若干点或直线共面的方法称为"落入法".

②分别由某些直线(相交直线或平行直线)或直线和直线外一点,或不共线的三点确定若干平面,然后利用公理 3 及其三个推论证明这些平面是重合的.从而证明了点、直线是共面的.这种证明若干个点或直线共面的方法称之为"同一法".

4. 线共点问题

证明空间若干条直线共点的常用方法是:先证其中两条直线相交于一点,然后再证明其他直线均过这一点.怎样证明其他直线过这一点呢?通常办法是设这一点分别在两个相交的平面内,由公理 2,则这一点必在两个相交平面的交线上,故其他直线过该点,从而使问题得证.

**例如** 三个平面两两相交于三条直线,这三条直线不平行则相交于一点.




**分析** 这是一个证明三线共点问题.按照常规思路,先证两线交于一点,再证明这点在第三条直线上.在平面内的两条直线,不平行,则相交.问题就从这入手.

已知:平面 $\alpha,\beta,\gamma$ 两两相交于三条直线 $l_1,l_2,l_3$,且 $l_1,l_2,l_3$ 不平行.如图.

求证:$l_1,l_2,l_3$ 相交于一点.

**证明** $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}l_1\subset\beta\\ l_2\subset\beta\\ l_1\not\parallel l_2\end{array}\right\}\Rightarrow l_1\cap l_2=P\\ \left.\begin{array}{l}P\in l_1\subset\alpha\\ P\in l_2\subset\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow P\in\alpha\cap\gamma=l_3\end{array}\right\}$

$\Rightarrow l_1,l_2,l_3$ 交于一点.

**说明** 这是高考题中典型的证明三线共点的问题,也是公理 2 的直接应用.当我们仅学习两节立体几何课,便发现我们所学知识可以直接用于高考题中,更能激发我们的学习兴趣.

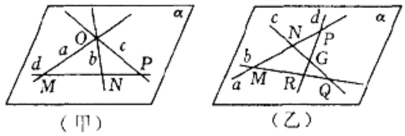



图 9.1-7

$\because$ 直线 $a\cap b=M$,$\therefore$ 直线 $a$ 和 $b$ 确定平面 $\alpha$.

$\because$ 直线 $a\cap$直线 $c=N$,直线 $b\cap$直线 $c=Q$,

$\therefore$ $N,Q$ 都在平面 $\alpha$ 内,$\therefore$ 直线 $c\subset$平面 $\alpha$.

同理可证 直线 $d\subset$平面 $\alpha$.

$\therefore$ 直线 $a,b,c,d$ 共面于 $\alpha$.

由(1)、(2)知,两两相交而不过同一点的四条直线必在同一平面内.

**【点评】**(1) 立体几何中有些问题由于点、线、面的位置关系的多种情形,需要分类讨论.分类要注意既不要重复,也不要遗漏.

(2) 本题采用"落入法"证明.

**【例 9B】** 如图 9.1-8,已知平面四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四边上,且 $EF\not\parallel GH$,求证 $EF,DB,HG$ 三条直线共点.

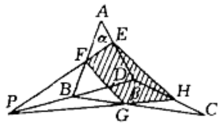



图 9.1-8

**【解析】** 设空间四边形 $ABCD$ 中 $ABD$ 所在的平面为 $\alpha$,$BCD$ 所在的平面为 $\beta$.

已知 $EF\not\parallel GH$,设 $EF$ 与 $GH$ 交于 $P$ 点.

$\left.\begin{array}{l}E\in\alpha\\ F\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow EF\subset\alpha$,则 $P\in\alpha$.

$\left.\begin{array}{l}H\in\beta\\ G\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow HG\subset\beta$,则 $P\in\beta$.

$\therefore$ $P$ 在 $\alpha,\beta$ 的交线 $BD$ 上.

$\therefore$ $EF,HG,DB$ 交于一点 $P$.

**【点评】** 如果把这个例题中的条件 $EF\not\parallel GH$ 变为 $EF\parallel GH$,情况又会怎样呢?我们现在分析一下.

如图 9.1-9,若 $EF\parallel GH$,因 $EF\subset\alpha$,$GH\subset\beta$,$EF\cap GH=\varnothing$,

则 $EF\not\subset\beta$,$GH\not\subset\alpha$.

而 $BD\subset\beta$,$BD\subset\alpha$,$EF$ 与 $BD$ 在同一平面 $\alpha$ 内,但无公共点,

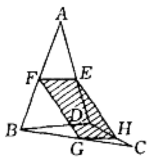



图 9.1-9

$\therefore$ $EF\parallel BD$.同理 $GH\parallel BD$.

$\therefore$ $EF\parallel BD\parallel GH$.

通过这个例题我们得出一个重要的结论:三个平面两两相交于三条直线,如果其中两条交线平行,那么这三条交线平行;如果其中两条交线交于一点,那么三条交线交于这一点.这一结论在今后推证线面关系、面面关系时是很有用的.

## 能力篇

● 无往不胜的素质

1. 逻辑推理能力

**【例 10C】** 如图 9.1-10,$\triangle ABC$ 各边所在直线分别交平面 $\alpha$ 于 $P,Q$,

利用平面的性质、三个公理及公理3的三个推论论证点共线、点或线共面、线共点等问题．掌握这些问题论证的基本方法，从而提高逻辑推理论证能力．一般地，证明点共线的途径是：证明它们在某两个平面内，则必在这两个平面的交线上．证明点线共面的途径通常有两种：第一种途径是先由部分元素确定一个平面，再证其他元素也在该平面内；第二种途径是全体元素确定若干平面，再证若干线共点．证明若干线共点的途径是：先由两条直线相交于一点，再证其他直线也过该点即可．

以上几个问题是立体几何中最基础的问题，它是今后解决较复杂的立体几何的第一步，我们必须掌握证明这类问题的一般方法．

一般方法有：①直接法：直接从题设条件出发，根据定义、定理、公理进行推理、论证到题设条件——也称为演绎法．②反证法：从题目的结论入手，反设结论的反面成立，然后进行推理、论证，推出与条件或定义、定理、公理相矛盾的结论．说明结论反证是不成立的，从而肯定了命题的结论是成立的．为什么可以用反证法去证明呢？这是因为原命题与逆否命题等效．当我们要证原命题比较困难时，就证明它的逆否命题．如，一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

这条直线和这个平面只有一个公共点．

事实上，若这条直线和这个平面有两个公共点，由公理1知，这条直线上所有的点都在这个平面内，那么这条直线过平面外的一点也在这个平面内．这与已知矛盾．故不可能再有第二个公共点．

已知空间四点 $A$、$B$、$C$、$D$ 不在同一平面内，求证：$AB$ 和 $CD$ 既不平行也不相交．

直接判定不易，考虑反证法．

假设 $AB$ 和 $CD$ 平行或相交，则 $AB$、$CD$ 可确定一个平面 $\alpha$，于是 $AB\subset\alpha$，$CD\subset\alpha$，可得 $A$、$B$、$C$、$D\in\alpha$．

这与已知 $A$、$B$、$C$、$D$ 不共面矛盾．因此 $AB$ 和 $CD$ 既不平行也不相交．

2. 画图和识图能力

(1) 画水平放置的平面图形的直观图是画空间图形直观图的基础，必须学会用斜二测画法画水平放置的平面图形（特别是正三角形、正方形、正五边形、正六边形）的直观图．

(2) 画水平放置的平面多边形的直观图关键是确定多边形顶点的位置，我们可以借助于平面直角坐标系．一般地，①在 $x$ 轴上的点，长度不变（指坐标原点到该点的距离）；②在 $y$ 轴上的点，长度减半；不在坐标轴上的，先过该点作轴的平行线与另一轴产生交点，然后由①或②找出该轴上的点．

(3) 空间图形的直观图只能在一定程度上反映空间各元素的位置关系，不可避免地对空间图形的真实形象有所"歪曲"．因此，给出平面图形的直观图，根据斜二测画法能还原成平面图形，这就要求我 $R$ 三点，求证 $P,Q,R$ 三点共线．

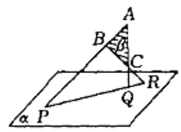


图 9.1-10

【解析】证明：$\triangle ABC$ 的两边 $AB$ 的延长线交平面 $\alpha$ 于 $P$ 点，$AC$ 的延长线交平面 $\alpha$ 于 $Q$ 点．设 $\triangle ABC$ 所在平面为 $\beta$，$P\in\alpha$，$P\in\beta$，$P$ 是平面 $\alpha$、$\beta$ 的公共点，$P$ 在两平面的交线上．

同理 $Q$ 也是平面 $\alpha$、$\beta$ 的公共点，$Q$ 在两平面的交线上．又两平面相交只有一条交线，

$\therefore$ $P,Q$ 在平面 $\alpha$、$\beta$ 的交线 $PQ$ 上．

又 $BC$ 的延长线交平面 $\alpha$ 于 $R$ 点，$R\in\alpha$，$R\in\beta$．$R$ 是平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 的公共点，则 $R$ 在 $\alpha$、$\beta$ 的交线 $PQ$ 上．

$\therefore$ $P,Q,R$ 在一条直线上．

【例 11C】如图 9.1-11，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$E$ 为 $AB$ 中点，$F$ 为 $AA_1$ 的中点．

求证：(1) $E,C,D_1,F$ 四点共面；

(2) $CE,D_1F,DA$ 三线共点．

【解析】(1) 分别连结 $EF,A_1B,D_1C$，

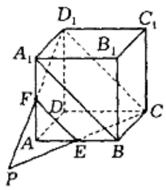


图 9.1-11

$\because$ $E,F$ 分别是 $AB$ 和 $AA_1$ 的中点，

$\therefore$ $EF\parallel A_1B$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}A_1B$．

又 $\because$ $A_1D_1 \underline{\parallel} B_1C_1 \underline{\parallel} BC$，

$\therefore$ 四边形 $A_1D_1CB$ 是平行四边形，

$\therefore$ $A_1B\parallel CD_1$，

从而 $EF\parallel CD_1$．

由推论3，$EF$ 与 $CD_1$ 确定一个平面，

$\therefore$ $E,F,D_1,C$ 四点共面．

(2) $\because$ $EF \underline{\parallel} \dfrac{1}{2}A_1B$，

$\therefore$ 直线 $D_1F$ 和 $CE$ 必相交．

设 $D_1F\cap CE=P$，

$\because$ $D_1F\subset$ 平面 $AA_1D_1D$，$P\in D_1F$，

$\therefore$ $P\in$ 平面 $AA_1D_1D$．

又 $CE\subset$ 平面 $ABCD$，$P\in EC$，

$\therefore$ $P\in$ 平面 $ABCD$，

即 $P$ 是平面 $ABCD$ 与平面 $AA_1D_1D$ 的公共点．

而平面 $ABCD\cap$ 平面 $AA_1D_1D=AD$，

$\therefore$ $P\in AD$（公理2），

$\therefore$ $CE,D_1F,DA$ 三线共点．

【点评】本题在证明(2)中采用了"两个相交平面的公共点必然在它们的交线上"这一重要结论，实际上也可以利用直线 $D_1F$ 和 $DA$ 必相交，令 $D_1F\cap DA=P$，直线 $CE$ 和 $DA$ 也必相交，令 $CE\cap DA=P'$，再证明 $AP=AP'$，从而 $P$ 和 $P'$ 重合即得结论．这种思路可先证(2)，再得到(1)．

【例 12C】如图 9.1-12 中的矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $O'A'=4\,\text{cm}$，$O'C'=2\,\text{cm}$，则平面图形是（　　）．

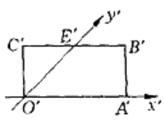


图 9.1-12

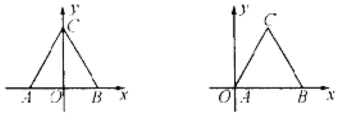
A. 正方形　　　　B. 菱形

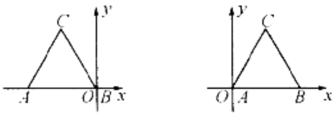
C. 非矩形和菱形的平行四边形

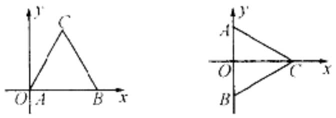
D. 以上三种以外的四边形

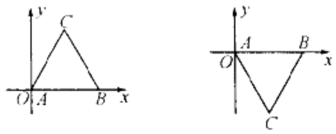
们有一定的识图能力．

如图建立坐标系，得到的边长为 1 的正△$ABC$ 的直观图不是全等三等形的一组是(　　)．

A.



B.



C.



D.



由斜二测画法规则可知，显然 C 这一组不是的．我们能将一般的平面图形画成直观图．那么我们也能将直观图还原成原图形．

【解析】将直观图恢复成平面图形，然后判断原四边形的形状，因此将直观图还原为平面图形是重点．

在平面直角坐标中 $O'\longrightarrow O$，$A'\longrightarrow A$，其中 $OA$ 长度为 4 cm，对点 $C$，$B$ 怎样对应找出呢？设 $B'C'$ 与 $y'$ 轴交于点 $E'$．

$\because \angle C'O'A'=90°$，$\angle x'O'y'=45°$，

$\therefore \triangle O'C'E'$ 为等腰直角三角形，

$\therefore O'C'=O'E'=2$ cm．

即 $E'$ 为 $C'B'$ 的中点，且 $O'E'=2\sqrt{2}$ cm，

则在 $xOy$ 系 $x$ 轴的上 $y$ 轴上截取 $OE=4\sqrt{2}$．

且以 $E$ 为中点画出 $BC\parallel OA$，$BE=CE$，

连结 $OC$、$BA$，

则得平面图形 $OABC$(如图 9.1-13)，

可得出四边形 $OABC$ 为平行四边形，

故应选 C．

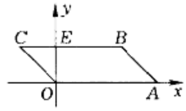


图 9.1-13

# 分级检测题

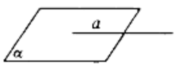
## A. 知识检测

1. 下列说法正确的是(　　)．

①铺得很平的一张白纸是一个平面；②一个平面的面积可以等于 $100\text{cm}^2$；③通常 200 页的书要比 20 页的书厚一些，那么 200 个平面重合在一起时一定比 20 个平面重合在一起厚；④平面是矩形或平行四边形形状的．

A. 0 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 对于图示，下列说法正确的是(　　)．



第 2 题图

A. 可以表示 $a$ 在 $\alpha$ 内

B. 把平面 $\alpha$ 延展就可以表示 $a$ 在平面内

C. 因为直线是无限延伸的，所以可以表示直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内

D. 不可以表示直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，因为画法不对

3. 若点 $M$ 在直线 $a$ 上，$a$ 在平面 $\alpha$ 内，则 $M$，$a$，$\alpha$ 间的上述关系可记为(　　)．

A. $M\in a\in\alpha$　　B. $M\in a\subset\alpha$　　C. $M\subset a\subset\alpha$　　D. $M\subset a\in\alpha$

4. 三条直线两两相交，经过这三条直线的平面有(　　)．

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 0 个或 1 个　　D. 3 个

5. 将命题："平面 $\alpha$ 内的一直线 $l$ 上的一点 $P$ 必在 $\alpha$ 内"改写成符号表示时应是(　　)．

A. $\left.\begin{matrix} l\in\alpha \\ P\in l\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\in\alpha$　　B. $\left.\begin{matrix} l\subset\alpha \\ P\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\subset\alpha$　　C. $\left.\begin{matrix} l\subset\alpha \\ P\in l\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\subset\alpha$　　D. $\left.\begin{matrix} l\subset\alpha \\ P\in l\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\in\alpha$

6. 若 $A$，$B$ 是平面 $\alpha$ 内的两点，$C$ 是直线 $AB$ 上的点，则 $C$ 必在 $\alpha$ 内，将这一命题改用符号是＿＿＿＿．

练与创札记

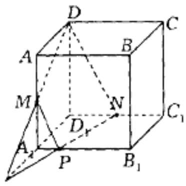
7. 两个平面最多可将空间分成_______个部分 .

8. 将命题:“$\left.\begin{matrix} a\cap b=P \\ a\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow P\in\alpha$”改写成语言叙述,是_________ .

9. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,点 $P$ 在棱 $CC_1$ 上,点 $M$ 在棱 $DD_1$ 上,试分别画出直线 $AP$,$AM$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交点 $Q$ 和 $N$.

10. 如图,在棱长为 $a$ 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$M$,$N$ 分别是 $AA_1$,$D_1C_1$ 的中点,过 $M$,$D$,$N$ 三点的平面与正方形的下底面相交于直线 $l$.

(1) 画出 $l$ 的位置;(2) 设 $l\cap A_1B_1=P$,求 $PB_1$ 的长 .



第 10 题图

## B. 方法检测

11. $A,B,C$ 为空间三点,经过这三点(　　).

A. 能确定一个平面　　B. 能确定无数个平面

C. 能确定一个或无数个平面　D. 能确定一个平面或不能确定平面

12. 空间交于一点的四条直线最多可以确定平面(　　).

A. 4 个　B. 5 个　C. 6 个　D. 7 个

13. 两个平面能把空间分成(　　).

A. 2 或 3 部分　B. 3 或 4 部分　C. 3 部分　D. 2 或 4 部分

14. 三个平面把空间分成最多和最少几部分(　　).

A. 8;4　B. 7;4　C. 8;6　D. 6;4

15. 下列推理,错误的是(　　).

A. $A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

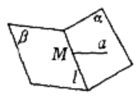
B. $A\in\alpha,A\in\beta,B\in\beta,B\in\alpha\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

C. $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 $A,B,C$ 不共线$\Rightarrow\alpha$ 与 $\beta$ 重合

D. $l\not\subset\alpha,A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$

16. 空间有 5 个点,其中有 4 个点在同一平面内,另一点在此平面外,且这 5 个点中任意三点都不共线,这样的 5 个点能确定的平面个数是______ .

17. 如图,请分别用数学符号语言表示图中直线与直线,直线与平面,平面与平面的位置关系是______ .

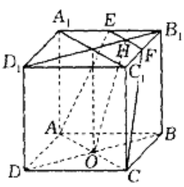


第 17 题图

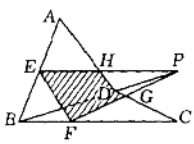
18. 如图,表示棱长为 $a$ 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,棱 $A_1B_1$,棱 $B_1C_1$ 的中点分别是 $E$ 与 $F$,则截面 $ACFE$ 的面积是______ .

19. 如图,四边形 $ABCD$ 为空间四边形 . $E\in AB$,$H\in AD$,$AE=EB$,$AH\neq HD$. 设过 $EH$ 的平面与 $BC$,$DC$ 分别交于 $F$,$G$,求证:$EH$,$BD$,$FG$ 三线共点 .

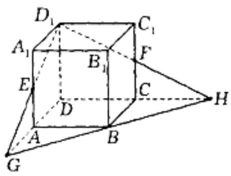
20. 如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,点 $E$,$F$ 分别是棱 $AA_1$,$CC_1$ 的中点 . 求证:点 $D_1$,$E$,$F$,$B$ 共面 .



第 18 题图



第 19 题图

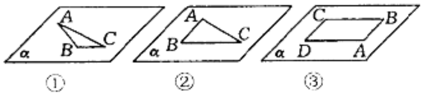


第 20 题图

## C. 能力检测

21. 如图所示是水平放置在 $\alpha$ 内的直观图:①Rt△$ABC$;②等腰△$ABC$;③正方形 $ABCD$. 其中正确的个数是(　　).

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个




第 21 题图

22. 两个三角形 $ABC$ 和 $A_1B_1C_1$ 所在的平面 $M$ 和 $N$ 相交于直线 $a$，并且直线 $AA_1$，$BB_1$，$CC_1$ 相交于一点 $O$.

求证：

(1) $AB$ 和 $A_1B_1$，$BC$ 和 $B_1C_1$，$AC$ 和 $A_1C_1$ 分别在同一个平面内；

(2) 如果 $AB$ 和 $A_1B_1$，$BC$ 和 $B_1C_1$，$AC$ 和 $A_1C_1$ 分别相交于点 $P$，$Q$，$R$，那么交点 $P$，$Q$，$R$ 在同一条直线上.

# 9.2 空间的平行直线与异面直线

## 知识篇

●走向成功的基础

1. 平行线公理

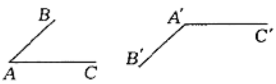
公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

公理 4 说明空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行.

2. 等角定理

定理：如果一个角的两边分别平行于另一角的两边并且方向相同，那么这两个角相等.

运用等角定理时，必须注意"方向相同"这一条件，没有此条件，定理不一定成立. 例如：如果 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，那么 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ 不一定成立，因 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$ 可能互补.




3. 异面直线及其夹角

(1) 异面直线的定义

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

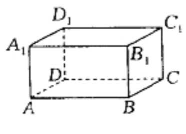
说明：

1° "不同在任何一个平面内"，指这两条直线永不具备确定平面的条件，因此，异面直线既不相交，也不平行. 要注意把握异面直线的不共面性.

2° 不能把异面直线误解为：

① 分别在不同平面内的两条直线为异面直线.

如图：




【例 1A】已知 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

【解析】 证明：对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情形，如图 9.2-1(1)，在平面几何中已经证明，这里我们给出两个角不在同一平面内的证明，如图 9.2-1(2).

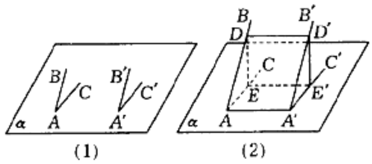



图 9.2-1

如图 9.2-1(2)，在 $AB$，$A'B'$，$AC$，$A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$，$AE = A'E'$，连结 $AA'$，$DD'$，$EE'$，$DE$，$D'E'$，

$\because$ $AD \parallel A'D'$，$AD = A'D'$，

$\therefore$ 四边形 $AA'D'D$ 为平行四边形，

$\therefore$ $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD'$.

同理 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$，

由公理 4 可得 $DD' \parallel EE'$.

又可得 $DD' = EE'$，

$\therefore$ 四边形 $DEE'D'$ 为平行四边形，

$\therefore$ $DE = D'E'$，

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

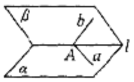
$\therefore$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

【点评】1° 为了培养学生的画图能力，我们可有意从不同角度画出一些新图形，看完后再与教材进行对比. 课本中该定理的证明采用将两角分置于两个平行平面内的画法，由于学生此时对平行平面尚未接触，此处给出该种画法就稍感生硬，在这里我们采取的是另一种画法.

在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

$A_1D_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$BC\subset$平面 $ABCD$，

但 $A_1D_1$ 与 $BC$ 的位置关系是平行，而不是异面．




又如图：平面 $\alpha\cap$平面 $\beta=l$，

$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap l=A$，

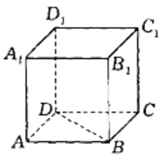
$b\cap l=A$，但 $a\cap b=A$，

$a$，$b$ 并不是异面直线．

也就是说，在两个不同平面内的直线，它们既可以是平行直线，也可以是相交直线．

② 在某一平面内的一条直线与这个平面外的一条直线是异面直线．

如图．在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，




$BD\subset$平面 $ABCD$，

$B_1D_1\not\subset$平面 $ABCD$，

由于 $BB_1/\!/DD_1$，

$\therefore$ $BB_1$ 与 $DD_1$ 可以确定一个平面设为 $\alpha$，

$\because$ $B$、$D\in\alpha$，$\therefore$ $BD\subset\alpha$，

又 $B_1$、$D_1\in\alpha$，$\therefore$ $B_1D_1\subset\alpha$，

$\therefore$ $BD$ 与 $B_1D_1$ 是共面的．

由①、②可知：画在某两个平面内的直线，它们可能是相交直线，也可能是平行直线，即它们有可能在另一个平面内，因而不是异面直线．

(2) 异面直线的判定定理

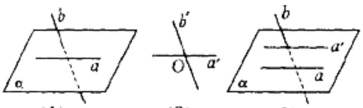
连结平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过此点的直线是异面直线，

即：$a\subset\alpha$，　$A\notin\alpha$，　$B\in\alpha$，　$B\notin a$．

则直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线．在使用该定理时，应注意阐述定理所满足的条件．

(3) 异面直线所成的角

直线 $a$，$b$ 是异面直线，经过空间任意一点 $O$，分别引直线 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$．因为两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，由等角定理，两组直线所成的锐角(或直角)相等．特别地，该点 $O$ 也可以选在其中一条异面直线上，如图：




(1)　(2)　(3)

可以看出：直线 $a'$ 和 $b'$ 所成的锐角(或直角)的大小，只与直线 $a$，$b$ 的相互位置有关，而与 $O$ 点的选取无关．

把直线 $a'$ 和 $b'$ 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 $a$ 和 $b$ 所成的角．

注：1° 两条异面直线所成的角，是借用平面几何中的角的概念予以定义的，即在空间中任选一点，过此点分别作两条异面直线的平行线，这两条直线所成的锐角或直角，叫做这两条异面直线所成的角，它反映出两异面直线在空间中的位置关系，是研究

2° 由该定理的证明可知：平面几何中的定义、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用．

**【例 2A】** 如图 9.2-2．已知不共面的直线 $a$，$b$，$c$ 相交于 $O$ 点，$M$，$P$ 是直线 $a$ 上两点，$N$，$Q$ 分别是 $b$，$c$ 上一点，

求证：$MN$ 和 $PQ$ 是异面直线．

**【解析】** **证法 1**：假设 $MN$ 和 $PQ$ 不是异面直线，

则 $MN$ 与 $PQ$ 在同一平面内，设为 $\alpha$．

$\because$ $M$，$P\in a$，$M$，$P\in\alpha$，

$\therefore$ $a\subset\alpha$，

又 $O\in a$，

$\therefore$ $O\in\alpha$．

$\because$ $N\in\alpha$ 且 $O\in b$，$N\in b$，

$\therefore$ $b\subset\alpha$．

同理 $c\subset\alpha$．

$\therefore$ $a$，$b$，$c$ 共面于 $\alpha$，与已知 $a$，$b$，$c$ 不共面相矛盾，

$\therefore$ $MN$，$PQ$ 是异面直线．

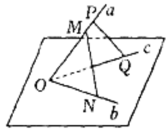



图 9.2-2

**证法 2**：$\because$ $a\cap c=O$，

$\therefore$ 直线 $a$，$c$ 确定一平面 $\beta$．

$\because$ $P\in a$，$Q\in c$，

$\therefore$ $P\in\beta$，$Q\in\beta$，$\therefore$ $PQ\subset\beta$，

且 $M\in\beta$，$M\notin PQ$．

又 $a$，$b$，$c$ 不共面，$N\in b$，$N\notin\beta$，

$\therefore$ $MN$ 与 $PQ$ 是异面直线．

**【点评】** 证明异面直线的方法有两种：

(1) 利用定义证明：此时需借助反证法，假设两直线不异面，根据空间两条直线的位置关系，这两条直线一定共面，即这两条直线可能相交也可能平行，然后推导出矛盾即可．

(2) 用判定定理证明：用此定理证明时，必须阐述定理所满足的条件．

**【例 3A】** 如图 9.2-3，已知在空间四边形 $ABCD$ 中，$M$，$N$ 分别为 $AC$，$BD$ 的中点．请找出 $MN$ 与 $AB$，$CD$ 所成的角．

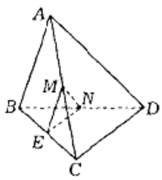



图 9.2-3

**【解析】** 由于空间中点的选取与异面直线无关，因此．在找的过程中，我们往往找一些特殊的点，题目当中 $M$，$N$ 分别为边 $AC$，$BD$ 的中点，所以可以从这一特性出发考虑，找出异面直线 $MN$ 与 $AB$，$CD$ 所成的角．

取 $BC$ 的中点 $E$，连结 $ME$，$NE$，

$\therefore$ $ME/\!/AB$，$NE/\!/CD$，

从而 $MN$ 与 $AB$，$CD$ 所成的角等于 $MN$ 与 $ME$，$NE$ 所成的角．

**【例 4A】** 如图 9.2-4，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 求异面直线 $A_1C_1$ 与 $BC$ 所成的角的度数；

(2) 哪些棱所在直线与直线 $AA_1$ 垂直?

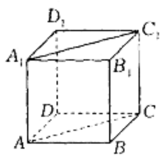



图 9.2-4

**【解析】** (1) 连 $AC$．$\because$ $AA_1\underline{\not\parallel}CC_1$，

$\therefore$ 四边形 $AA_1C_1C$ 为平行四边形，

$\therefore$ $AC/\!/A_1C_1$，$\therefore$ $\angle ACB$ 等于异面直线 $A_1C_1$ 与 $BC$ 的夹角，所以 $A_1C_1$ 与 $BC$ 所成的角为 45°．

(2) 直线 $AB$、$BC$，$CD$，$DA$，$A_1B_1$，$B_1C_1$，$C_1D_1$，$D_1A_1$ 都与直线

空间两条直线的基础．

2° “等角定理”为两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与惟一性，即过空间任一点，引两条直线分别平行于两条异面直线，它们所成的锐角(或直角)都是相等的，而与所取点的位置无关．

3° 若两条异面直线所成的角为直角，就说这两条异面直线互相垂直．

$AA_1$ 垂直．

**【点评】** 正方体是一种特殊的几何体，正方体的性质可以辅助解题，因此我们必须非常熟悉．

## B3 方法篇

**● 应付自如的诀窍**

1. 空间两条直线位置关系的判定

对于空间两条直线的位置关系，如果按公共点的个数可分为：

(1) 只有一个公共点——相交直线；

(2) 没有公共点——平行直线或异面直线．

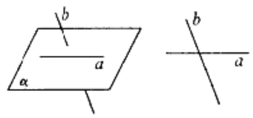
如果按共面可分为：

(1) 在同一平面内——平行直线或相交直线；

(2) 不同在同一平面内——异面直线．

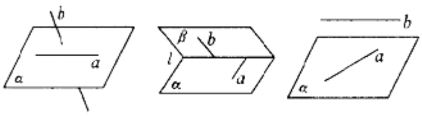
2. 异面直线的画法

画异面直线时，为了充分显示出它们既不平行又不相交的特点，即不共面的特点，常常需要以辅助平面作为衬托，以加强直观性，如图，若画成如图的情形，就分不开了．




(1)　　(2)

画平面衬托时，通常画成下列情形．




直线 $a,b$ 相交于点 $A$，记作 $a\cap b=A$．

3. 证明两条直线异面的方法

(1) 利用定义：借助于反证法来证明，命题的反面可由两条直线的位置关系给出，假设两条直线不是异面直线，则①为共面直线，或②为平行直线或相交直线．

(2) 利用定理：过平面内一点与平面外一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线．在使用过程中，必须阐述出：$A\in\alpha$，$B\notin\alpha$，$a\subset\alpha$，$A\notin a$ 这四个条件，然后即可得出结论 $AB$ 和 $a$ 是异面直线．

我们把上面定理称为异面直线的判定定理．下面我们用反证法证明．

**证明**　假设直线 $AB$ 与 $a$ 在同一个平面内，那

**【例 5B】** $a,b,c$ 是空间三条直线，下面给出四个命题：

①如果 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a/\!/c$；

②如果 $a,b$ 是异面直线，$b,c$ 是异面直线，则 $a,c$ 也是异面直线；

③如果 $a,b$ 相交，$b,c$ 相交，则 $a,c$ 也相交；

④如果 $a,b$ 共面，$b,c$ 共面，则 $a,c$ 也共面．

上述命题中，真命题的个数是(　　)．

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

**【解析】** 答案：D. 如果 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a$ 与 $c$ 或共面(相交、平行)或异面，故①错．

如果 $a,b$ 异面，$b,c$ 异面，则 $a,c$ 或相交或平行或异面，故②错．

如果 $a,b$ 相交，$b,c$ 相交，则 $a$ 与 $c$ 或相交或平行或异面，故③错．

如果 $a,b$ 共面，$b,c$ 共面，则 $a,c$ 或共面或异面，故④错．

**【点评】** 本题可借助模型，增强空间想象能力来判定两直线的位置．

**【例 6B】** 下面给出三个命题：

①$a,b$ 是异面直线，直线 $c$ 和 $d$ 分别与 $a,b$ 交于 $E,F,G,H$ 四个不同的点，则 $c,d$ 是异面直线；

②一条直线和两条异面直线中的一条平行，则它和另一条直线不可能是平行直线；

③一条直线和两条异面直线都相交，那么它们可以确定两个平面．

上述命题中，假命题有(　　)．

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 1 个　　D. 3 个

**【解析】** 答案：A. 命题①是正确的，用反证法证明如下：若 $c,d$ 不是异面直线，则 $c,d$ 共面于 $\alpha$，则 $E\in\alpha$，$F\in\alpha$，$E\in a$，$F\in a$，$\therefore a\subset\alpha$，同理 $b\subset\alpha$. 由此知 $a,b$ 共面于 $\alpha$，与 $a,b$ 是异面直线矛盾．

命题②也正确，因为若 $a,b$ 异面，直线 $c/\!/a$，则 $c,b$ 的位置关系或相交或异面，即 $a$ 与 $b$ 不可能平行，用反证法证明如下：若 $c/\!/b$，则由 $c/\!/a$ 可推出 $b/\!/a$，这与 $a,b$ 异面矛盾，故 $a/\!/b$ 不可能．

命题③也正确，若 $c$ 与 $a,b$ 异面直线都相交，由公理 3 可知，$a,c$ 可确定一个平面，$b,c$ 可确定一个平面，这样 $a,b,c$ 共确定两个平面，综上可知三个命题都正确，故选 A.

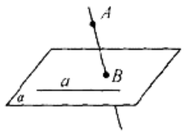
**【例 7B】** 如图 9.2-5，已知 $\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\alpha$，$c\subset\beta$，$b\cap a=A$，$c/\!/a$. 求证：$b$ 和 $c$ 是异面直线．

**【解析】** 证明两条直线是异面直线，一般可用反证法，若用直接法，则要用判定两条直线是异面直线的定理．

**证法 1**：假设 $b$ 和 $c$ 不是异面直线，

则 $b$ 和 $c$ 是平行直线或相交直线．

么这个平面一定经过点 $B$ 和直线 $a$.




$\because B\notin a$,经过点 $B$ 与直线 $a$ 只能有一个平面 $\alpha$,

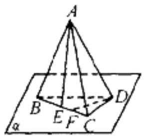
$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 应在平面 $\alpha$ 内.

$\therefore A\in\alpha$,这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

$\therefore$ 直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线.

因此,证明两条直线为异面直线就有两种证法.如

已知:空间四边形 $ABCD$,$AB\neq AC$,$AE$ 是 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 边上的高,$DF$ 是 $\triangle BCD$ 的 $BC$ 边上的中线,求证:$AE$ 和 $DF$ 是异面直线.




**证法一** 如图(定理法)由题设条件可知点 $E,F$ 不重合,设 $\triangle BCD$ 所在平面 $\alpha$.

$$\therefore \begin{cases} DF\subset\alpha \\ A\notin\alpha \\ E\in\alpha \\ E\notin DF \end{cases} \Rightarrow AE \text{ 和 } DF \text{ 是异面直线.}$$

**证法二** (反证法)

若 $AE$ 和 $DF$ 不是异面直线,则 $AE$ 和 $DF$ 共面,设过 $AE,DF$ 的平面为 $\beta$.

(1) 若 $E,F$ 重合,则 $E$ 是 $BC$ 的中点,这与题设 $AB\neq AC$ 相矛盾.

(2) 若 $E,F$ 不重合,

$\because B\in EF, C\in EF, ED\subset\beta$, $\therefore BC\subset\beta$.

$\because A\in\beta, D\in\beta$,

$\therefore A,B,C,D$ 四点共面,这与题设 $ABCD$ 是空间四边形相矛盾.

综上,$AE$ 和 $DF$ 不是异面直线不成立.

故 $AE$ 和 $DF$ 是异面直线.

4. 平行线公理的应用

平行线公理:若 $a/\!/b, a/\!/c$,则 $b/\!/c$.

平行线公理的主要作用是"引见",即作为桥梁或纽带出现.要证明两线平行,先找到第三线,说明这两线分别与第三条线平行.

5. 求异面直线所成的角

两条异面直线所成的角是非常重要的知识点,是每年高考的必考内容,要求牢固掌握两条异面直线所成的角的定义和两条异面直线互相垂直的概念,两条异面直线所成的角是刻画两条异面直线相对位置的一个量,是通过转化为相交直线成角来解决的.这里我们要注意:两条异面直线所成的角 $\theta$ 的范围是 $0°<\theta\leqslant 90°$,当 $\theta=90°$时,这两条异面直线互相垂直,两条异面直线互相垂直一定没有垂足;求两条异面直线所成角的关键是作出异面直线所成的角,作两条异面直线所成角的方法是:将其中一条平移到某个位置使其与另一条相交或是将两条异面直线同时平移到某个位置使它们相交.值得注意的是:平移后相交所得的角必须容易算出,因此平移时

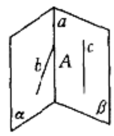



图 9.2-5

①若 $b/\!/c$,又 $\because a/\!/c$, $\therefore a/\!/b$,

这与已知 $b$ 和 $a$ 相交矛盾,

$\therefore b$ 和 $c$ 不平行.

②若 $b$ 和 $c$ 相交,设交点为 $B$,由已知 $b\cap\alpha=A$,则直线 $b$ 上有两个点 $A,B$ 在平面 $\beta$ 内,这与已知直线 $b\subset\alpha$ 且 $b\cap\beta=A$ 相矛盾,$\therefore b$ 与 $c$ 不相交.

$\therefore b$ 和 $c$ 是异面直线.

**证法2**:在直线 $b$ 上除 $A$ 点外任取一点 $B$,

$\because A\in\beta, B\notin\beta$,

$\therefore b$ 是平面 $\beta$ 内一点 $A$ 与平面 $\beta$ 外一点 $B$ 的连线.

又 $\because a/\!/c, A\in a$,

$\therefore A\notin c$,而 $c\subset\beta$,

$\therefore c$ 是平面 $\beta$ 内不经过点 $A$ 的直线.

$\therefore b$ 和 $c$ 是异面直线.

【点评】本例是属于用反证法进行证明的基本题型,注意否定结论后,结论的反面情况有几种.证法1中,否定两条直线不是异面直线,则有平行、相交两种情况,要逐一推出矛盾,这样才能保证证明的严密性.

【例 8B】如图 9.2-6,正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$E$ 是 $A_1B_1$ 的中点,在 $B_1C_1$ 上取点 $F$,使 $B_1F:FC_1=1:2$,问 $AE$,$CF$ 是否为异面直线?为什么?

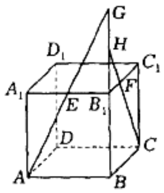



图 9.2-6

【解析】$AE$ 与 $CF$ 是异面直线.

证明如下:在平面 $AB_1$ 内,延长 $AE$ 交 $BB_1$ 延长线于 $G$,在平面 $CB_1$ 内,延长 $CF$ 交 $BB_1$ 于延长线 $H$.

$\because E$ 是 $A_1B_1$ 中点,在 $\triangle ABG$ 中,

$\because EB_1/\!/AB$,

$\therefore \dfrac{EB_1}{AB}=\dfrac{GB_1}{GB}=\dfrac{1}{2}$,得 $GB_1=B_1B$.

$\because \dfrac{B_1F}{B_1C_1}=\dfrac{B_1F}{BC}=\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{FB_1}{CB}=\dfrac{HB_1}{HB}=\dfrac{1}{3}$,得 $HB_1=\dfrac{1}{2}B_1B$.

$\therefore H$ 与 $G$ 不重合,$H$ 不在直线 $AG$ 上.

于是,$AG\subset$平面 $AA_1B_1B$,$H\in$平面 $AA_1B_1B$,且 $H\notin$直线 $AG$,$C\notin$平面 $AB_1$,

$\therefore AE$ 和 $CF$ 是异面直线.

【点评】本题介绍了如何准确运用判定定理判定异面直线位置,如果运用判定定理不便时,建议采用反证法.

【例 9B】如图 9.2-7,在长方体 $A_1B_1C_1D_1$-$ABCD$ 中,$E,F$ 分别是棱 $A_1A$ 和棱 $C_1C$ 的中点,求证:四边形 $B_1EDF$ 是平行四边形.

【解析】证明:设 $Q$ 是 $D_1D$ 的中点,连 $EQ$,连 $QC_1$,如图 9.2-7,

$\because E$ 是 $A_1A$ 的中点,$\therefore EQ$ 是矩形 $A_1ADD_1$ 的中位线,故有 $EQ \underline{/\!/} A_1D_1$;又在矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 中有 $A_1D_1\underline{/\!/}B_1C_1$,据平行公理有:$EQ/\!/B_1C_1$.

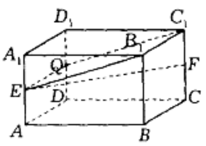



图 9.2-7

$\therefore$ 四边形 $EQC_1B_1$ 是平行四边形,

$\therefore B_1E\underline{/\!/}C_1Q$.

又由 $Q,F$ 分别是矩形 $CC_1D_1D$ 两边的中点,故有 $QD\underline{/\!/}C_1F$,则四边形 $DQC_1F$ 是平行四边形,从而得出 $C_1Q\underline{/\!/}FD$,