21世纪数学系列教材

21 世纪数学系列教材

微积分

华中科技大学数学系

华中科技大学出版社
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

- 重视能力的培养 关注素质的提高
- 基本练习 综合练习 小结 自测题
- 适用 简明 通俗
- 深入浅出 学以致用

21 世纪数学系列教材

微 积 分

王汉蓉 毕志伟 魏 宏 林 益
刘国钧 乔维佳 谢 鹏

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/王汉蓉 等
武汉:华中科技大学出版社, 2001年9月
ISBN 7-5609-2555-3

Ⅰ.微…
Ⅱ.①王… ②毕… ③魏…
Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

微积分 王汉蓉 等

责任编辑:李 德 封面设计:刘 卉
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:华中科技大学出版社沔阳印刷厂

开本:787×960 1/16 印张:34 字数:416 000
版次:2001年9月第1版 印次:2001年9月第1次印刷 印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2555-3/O·238 定价:36.80元

内容提要

本书依据国家教育部颁布的“高等数学课程教学基本要求”编写。全书共十二章，依次为函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及应用、不定积分、定积分及其应用、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分，无穷级数及常微分方程。

本书可供理工科各专业的本科使用，亦可作为自学考试相应专业的教学参考书。

前　言

本教材是由从事高等数学教学多年的教师，按照国家教委 1998 年“高等数学课程教学基本要求”，结合长期的教学实践经验编写而成。本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗；在例题选择上力求全面、典型；在论述形式上则力求详尽、易懂。本书配备了比较全面的基础练习题与综合性练习题。为满足读者进行阶段性复习与自我检测，在每一章末安排了该章的小结及自测题。小结写得比较详细，有基本要求、内容提要及学习指导，对自测题亦给出了解答。全书习题均附有答案。

全书共分十二章，其中第一章与第二章由毕志伟撰稿；第三章与第四章由王汉蓉撰稿；第五章与第六章由魏宏撰稿；第七章与第八章由乔维佳撰稿；第九章与第十章由刘国钧撰稿；第十一章与第十二章由林益撰稿。全书插图由谢鹏绘制。全书的习题由刘国钧审校。

陈爱兰，杨林锡，陈久明等老师认真仔细地审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的意见，在此表示感谢。

本书难免有不足甚至错误之处，恳请读者指正。

编　者

2001 年 6 月

目　　录

第一章 函数

本章介绍变量与函数的概念、函数的基本性质、基本运算以及初等函数. 在初等数学中,读者已学习了许多具体的函数,如幂函数、三角函数及反三角函数、指数函数与对数函数,从中对函数的概念及性质已有了一个初步的认识,本章将着重于这些内容的系统归纳. 由于函数是高等数学课程的主要研究对象,因此本章内容构成全书的基础.

§1.1 变量与函数

本节介绍变量、函数的概念,函数的几何解释及几个重要的几何性态.

1.1.1 变量与常量

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中,人们会遇到许多用来表示不同事物的量,通常可将它们分为两类:一类是在考察过程中保持不变,即始终取一固定的值的量,称之为**常量**;一类是在考察过程中会出现变化,即可以取不同的值的量,称之为**变量**.

以学校的运动场为例. 运动场的面积、跑道的长度保持不变,是常量;而每天来运动场运动的人数、运动场的气温、风向等则会出现变化,因而是变量.

又如,将一密闭的容器中的气体进行加热,在加热过程中,容器中气体的体积、分子数保持不变,是常量;气体的温度、容器内的气压在不断变化,是变量.

一个量是变量还是常量,依赖于其相关的考察过程. 例如对于重力加速度 g,从地球表面的各点分布值来看,它是变量(因为地球表面各点的地心距不完全一样);而在考察某一点处的自由落体运动过程中,它却是一个常量.

表示事物中的量通常是用实数,如上述问题中的面积、长度、人数、气温、气压、体积等等. 但也有许多量须用复数、矢量等来表示,如风向常用矢量表示,方程 $x^2+1=0$ 的根则是用复数来表示. 在本课程中如不特别说明,所涉及的量均是指用实数表示的量.

通常用字母 a、b、c、λ、μ 等表示常量，用字母 x、y、z、s、t 等表示变量. 在一个考察过程中，变量 x 所取的数值的全体组成一个数集，记作 M，称为变量 x 的**变域**. 表示数集 M 的方法主要有两种：一种是**列举式**，如百分制下学生分数 x 的变域 $M=\{0,1,2,\cdots,100\}$；另一种是**命题式**，如方程 $P(x)=0$ 的根 x 的变域 $M=\{x|P(x)=0\}$，其一般形式为

$$M=\{x|x\text{ 满足命题 }P\},$$

数 x 属于数集 M 的充分必要条件是 x 满足命题 P.

在几何上，可以用数轴表示全体实数集，从而数轴上的点集可以用来表示实数集. 本课程中用得较多的实数集是下列被称为区间的数集：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\} \tag{1}$$
$$(a,b)=\{x|a<x<b\} \tag{2}$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\} \tag{3}$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\} \tag{4}$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\} \tag{5}$$
$$(a,+\infty)=\{x|a<x\} \tag{6}$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\} \tag{7}$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\} \tag{8}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{ 是实数}\} \tag{9}$$

其中，a、b 是给定实数，$a<b$；$+\infty$ 与 $-\infty$ 是两个记号(不是实数)，分别读作正无穷大与负无穷大. 称区间(1)～(4)为有限区间，$b-a$ 是这些区间的长度；(5)～(9)为无限区间. 称区间(1)为闭区间，(2)为开区间，(3)为左闭右开区间，(4)为左开右闭区间.

以 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$ 称为 a 的邻域，δ 称为此邻域的半径. 常将邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 记作 $N(a,\delta)$ 或 $N(a)$. 在 $N(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后，称为 a 的去心邻域，记作 $N^0(a,\delta)$ 或 $N^0(a)$. 邻域是极限论中的一个基本概念，可用来表示点 x 与点 a(即数 x 与数 a)的接近程度. 如

$$|x-a|<\delta\Leftrightarrow x\in N(a,\delta),$$
$$0<|x-a|<\delta\Leftrightarrow x\in N^0(a,\delta).$$

以后用字母 I 泛指区间(1)～(9).

1.1.2 函数概念

在一个问题的考察过程中，往往有几个变量同时出现，并且这些变量之间有一定的联系. 相联系的变量可以是两个，也可能更多，先看以下几个例子.

例 1 在物体作自由落体运动的过程中，物体的高度 h，运动的速度 v，下落时间 t，下落的距离 s 都是变量；下落开始时初始高度 h_0 及加速度 g 都是常量. 由物理学可以得到它们之间的以下关系式：

$$s+h=h_0,\quad v=gt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 2 考察圆的半径 r 及面积 A. r 和 A 的变域是 $(0,+\infty)$，它们之间的相互关系为

$$A=\pi r^2.$$

例 3 考察矩形的长 a，宽 b，周长 l，面积 A，它们满足以下关系式：

$$l=2(a+b),\quad A=ab.$$

从这些例子中可以观察到同一过程中变量之间的依从关系：一些变量的变动会影响到另外一些变量之值的大小. 变量之间的这种依从或制约关系称作函数关系. 如

$$s=h_0-h,\quad v=gt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2,\quad A=\pi r^2.$$

这些关系式反映了两个变量之间的依从关系，称之为一元函数关系. 而如

$$l=2(a+b),\quad A=ab,$$

则描述的是三个变量之间的依从关系，称之为二元函数关系或多元函数关系. 为简便起见，先研究一元函数关系，以下简称函数.

函数是本课程的主要研究对象，其准确的定义如下.

定义 1 设 x、y 是两个变量，D 是一非空数集，f 是某一确定的规则. 若变量 x 在 D 中任取一值 x_0 时，变量 y 依据规则 f 有唯一确定的值 y_0 与 x_0 对应，则称 f 是从变量 x 到变量 y 的一个**函数**. 记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

称 x 是函数 f 的**自变量**，y 是函数 f 的**因变量**. 与 x_0 对应的 y_0 称为函数 f 在 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$. D 称为函数 f 的**定义域**，函数 f 在 D 上的函数值的全体构成一个数集：

$$W=\{f(x)\,|\,x\in D\},$$

称 W 为函数 f 的**值域**.

由定义 1 知，函数 f 是一个对应规则. 由于此规则可以用函数值 $f(x)(x\in D)$ 表示，故也可以用 $f(x)$ 来表示函数. 有时亦可以用 $y(x)$ 或 y 来表示函数.

一个函数由对应规则 f 及定义域 D 所完全确定. 也就是说，两个函数相等的充分必要条件是其定义域与对应规则完全一致.

例 4 判断以下各对函数是否相同.

(1) $f(x)=x^2, g(x)=(2x)^2$；

(2) $f(x)=2\lg x, g(x)=\lg x^2$；

(3) $f(x)=x, g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$；

(4) $f(x)=x, g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$.

解 以上函数的定义域均未写出，这时约定其定义域是使表达式有意义的 x 的全体值，称为**自然定义域**.

(1)f 与 g 不相同. 因为对于同一个 x_0，$f(x_0)=x_0^2$，而 $g(x_0)=4x_0^2$，这说明对应规则不同，故不是同一函数.

(2)f 与 g 不相同. 因为 f 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 g 的定义域是 $(-\infty,+\infty)-\{0\}$. 定义域不同，故不是同一个函数.

(3)f 与 g 不相同. 因为 f 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 g 的定义域是 $(-\infty,1)$ 及 $(1,+\infty)$，定义域不同.

(4)f 与 g 相同. 首先是因为定义域相同，均为 $(-\infty,+\infty)$；其次是对应规则相同，因为 $g(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=f(x)$.

值得注意的是，选用什么字母来表示函数不是本质的. 例如，$\sin x$ 与 $\sin y$ 是同一个函数，$f(x)=1+x^2$ 与 $g(t)=1+t^2$ 是同一个函数. 一般地，$f(x)(x\in D)$ 与 $f(y)(y\in D)$ 是同一个函数，因为其定义域与对应规则相同.

另外，在一些实际问题中，函数 $f(x)$ 的定义域应当由变量 x 的实际含义来确定，而不是由代数式 $f(x)$ 的自然定义域来确定. 例如，圆面积公式 $A=\pi r^2$ 中，自变量 r 的实际变化范围 $(0,+\infty)$ 是该函数的定义域，而不是自然定义域 $(-\infty,+\infty)$.

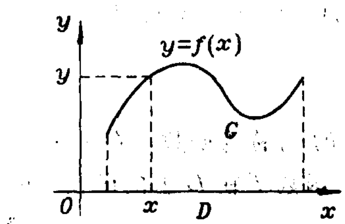


图 1.1

函数关系 $y=f(x)(x\in D)$ 可以在 xy 平面上表示出来. 称平面点集

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(见图 1.1). 图形 G 常常是一段或几段曲线，因此也称 G 为"曲线 $y=f(x)$".

利用函数 f 的图形，可以直观地了解变量 x 与变量 y 的对应关系，尤其是函数 f 的整体特征. 因而在研究函数时，常常画出其图形，以期发现变量之间的特殊关系与变化规律. 用图形的几何特征解释函数的相关概念或性质，常说成是几何解释.

以下举出一些函数的例子，这些函数以后将经常用到.

例 5 **绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

这个函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$，其图形关于 y 轴对称(见图 1.2).

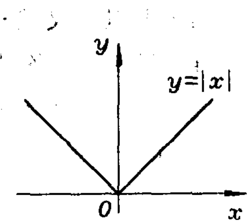


图 1.2

例 6 **符号函数**

$$y=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

这个函数通常记作 $\operatorname{sgn}x$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{-1,0,1\}$，其图形关于原点对称（见图 1.3）.

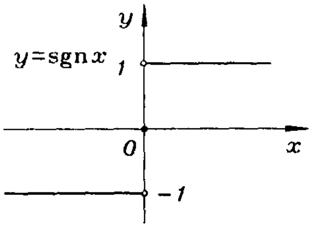


图 1.3

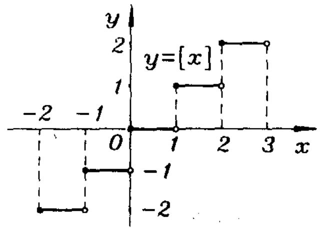


图 1.4

例 7 取整函数

对任意实数 x，记$[x]$为不超过 x 的最大整数. 例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[\pi]=3$，$[0]=0$，称 $f(x)=[x]$为取整函数. 它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是整数集. 其图形如图 1.4 所示.

例 8 Dirichlet **函数**

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{0,1\}$. 其图形是分布在直线 $y=0$ 及$y=1$上的无限个点构成的集合（见图 1.5），无法准确画出来.

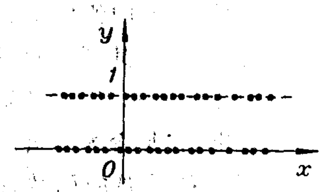


图 1.5

以上几个函数与初等数学中所熟悉的那些函数如 x^2，$\sin x$ 在表达方式上有所不同. 如 $y=x^2$，$y=\sin x$ 都是由一个公式给出 x 与 y 的对应规则. 而 $|x|$，$\operatorname{sgn}x$，$D(x)$则是针对 x 所属范围不同而用不同的公式表示 x 与 y 的对应规则. 或者说，函数对应规则 f 是由一些更细小的规则组合而成. 依这种方式定义的函数通常称为**分段函数**，以后常常用到. 下面再举一例说明.

例 9 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x-\pi/2, & x>\pi/2;\\ \cos x, & x\leqslant\pi/2\end{cases}$$

是一个分段函数，函数规则 f 在 $x\leqslant\pi/2$ 及 $x>\pi/2$ 时分别由 $\cos x$ 及 $x-\pi/2$ 表示. f

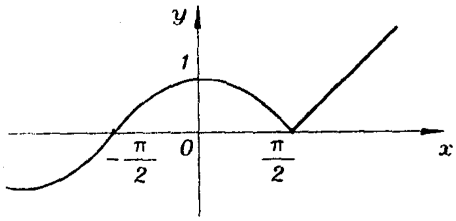


图 1.6

的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,+\infty)$（见图 1.6）. 在计算函数值$f(x_0)$时，应视 x_0 的大小情况而用不同的公式. 如 $f(0)=\cos 0=1$，$f(2\pi)=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$.

上述例子中函数的表示法属于**解析法**或**公式法**，对应规则 f 用数学公式（分段或整段地）表示. 但是，不要以为这就是函数表示的惟一形式. 变量 x 与变量 y 之间的对应规则还可以用平面上的一段曲线来表示. 例如，由电子仪器记录的某种信号随时间的变化曲线（如心电图、地震测量波等），这种表示法称为**图示法**. 它能直观地表达 x 与 y 的对应关系. 此外，当人们关心的不是函数 f 的对应规则而是 x_0 的函数值 $f(x_0)$时，常常把 x 经常取的值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与其函数值 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$列成一个表格，供人们计算时查用. 例如，自然数 n 的平方表与立方表，正弦函数表，常用对数表等等. 这种表示法称作**表格法**. 表格便是这类函数的对应规则.

函数的以上三种表示法各有所长. 解析法便于对函数 f 进行理论研究与数值计算. 图示法便于直观了解 f 的动态以及整体性质. 表格法则使得函数值一查即得，便于应用. 本课程中函数表示将以解析法为主，并尽可能地辅以图形说明，以期获得代数与几何上的全面了解.

1.1.3 函数的几何性态

当函数 $f(x)$的值均非负（即 $f(x)\geqslant 0$）时，称此函数为**非负函数**. 函数的非负性在几何上表现为其图形始终在 x 轴上方（可以与 x 轴相切），如图 1.7 所示. 因此若知道函数的图形，则从几何上可以一眼看出，它是否为非负函数.

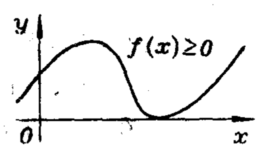


图 1.7

以下几种重要的函数性质均具有非常明确的几何特性，分别予以介绍.

1. 单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若对区间 I 中任意两个值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称$f(x)$在区间 I 上**单调增**（或**单调减**）. 单调增与单调减统称为**单调**. I 称为 f 的**单调区间**，f 称为 I 上**单调函数**.

若将上面的不等号“$\leqslant$”与“$\geqslant$”分别换作“$<$”与“$>$”，则称函数 f 在区间 I 上**严格单调增**与**严格单调减**，统称为**严格单调**. 由于 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$包含了 $f(x_1)<f(x_2)$，故严格单调的函数也是单调函数.

常数函数 $y=C$,既是单调增函数也是单调减函数.

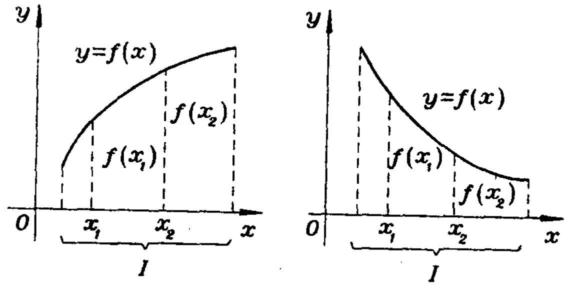
在几何上,$f(x)$在区间 I 上单调增(或单调减)表现为$f(x)$的图形沿 x 轴的正向逐渐上升(或下降)(见图 1.8). 利用这一几何特性很容易判别曲线 $y=f(x)$所对应的函数的单调性.

例 10 确定以下函数的单调性.

(1)$y=x^2$; (2)$y=x^3$.

解 从初等数学知道,这两个函数的图形如图 1.9 所示,从而直接看出,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上严格单调减,在$[0,+\infty)$上严格单调增,但在$(-\infty,+\infty)$上它不是单调函数;而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增.

在论及函数 $f(x)$的单调性时,应当指明单调区间.



(a) (b)

图 1.8

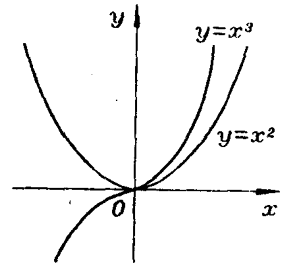


图 1.9

2. **奇偶性**

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则$-x\in D$). 若对每个 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**. 若对每个 $x\in D$ 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**.

在几何上,$f(x)$是奇函数,表现为其图形关于原点对称;而$f(x)$是偶函数表现为其图形关于 y 轴对称(见图 1.10).

可以验证,以下函数是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数

$$x,\quad x^3,\quad \sin x,\quad \operatorname{sgn} x,$$

而以下函数是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数

$$1,\quad x^2,\quad \cos x,\quad D(x).$$

必须注意,不能说函数 $f(x)$非奇即偶或非偶即奇. 如 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数,因 $f(-1)=0,f(1)=2$,既无 $f(-1)=-f(1)$,也无 $f(-1)=$

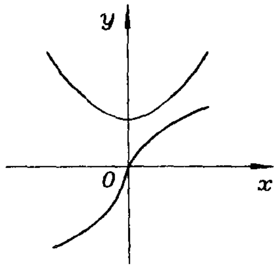


图 1.10

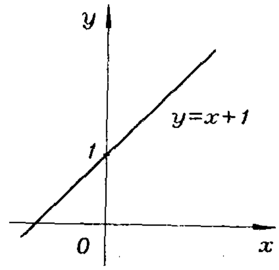


图 1.11

$f(1)$. 从图形上也可看出这一点(见图 1.11).

3. **周期性**

设 $f(x)$ 的定义域为 D, T 是正常数. 若任给 $x\in D$, 有 $x+T\in D$, 且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, 称 T 为 $f(x)$ 的**一个周期**.

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 则因

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x),$$

故 $2T$ 也是 $f(x)$ 的一个周期. 类似地可以说明, $nT(n=3,4,\cdots)$ 也是 $f(x)$ 的周期. 因此, 周期函数有无限多个周期. 若周期函数 $f(x)$ 有一个最小的正周期 T, 则称 T 为 $f(x)$ 的**基本周期**. 例如, 函数 $\sin x$, $\cos x$ 以 2π 为基本周期, $\tan x$, $\cot x$ 以 π 为基本周期.

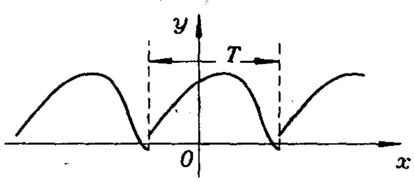


图 1.12

在几何上, 若将定义区间切成长度为 T 的等分段, 则 $f(x)$ 以 T 为周期就表现为其图形在每个段上有相同的形状(见图 1.12).

4. **有界性**

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若有常数 B, 使得

$$f(x)\leqslant B$$

对每个 $x\in I$ 都成立, 则说 $f(x)$ 在区间 I 上**有上界**, 且称 B 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**上界**. 若有常数 A, 使得

$$A\leqslant f(x)$$

对每个 $x\in I$ 都成立, 则说 $f(x)$ 在区间 I 上**有下界**, 且称 A 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**下界**. 若有常数 $M>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对每个 $x\in I$ 都成立, 则说 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**, 且称 M 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个界. 若对任何正数 M, 总有 $x\in I$ 使得 $|f(x)|>M$, 则说 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

$f(x)$ 在区间 I 上有界, 相当于有 $M>0$, 使得