

21世纪高等院校选用教材

非数学专业

线性代数简明教程

浙江大学
陈维新 编著

科学出版社

21 世纪高等院校选用教材(非数学专业)

线性代数简明教程

浙江大学

陈维新 编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书采用学生易于接受的方式,科学、系统地介绍了线性代数的行列式,线性方程组,矩阵,向量空间,矩阵的特征值和特征向量,二次型等内容.本书强调适用性和通用性,兼顾先进性,起点低,坡度适中,简洁明白,适于自习.全书涵盖了考研的数学考试大纲有关线性代数的所有内容.习题按小节配置,量大题型多,书后附有答案.各章末有概要及小结,便于学生深入理解书中内容.

读者对象为高等院校理、工、经济管理、医药、农等专业的大学生和教师.也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/陈维新编著. -北京:科学出版社, 2001.8

(21世纪高等院校选用教材(非数学专业))

ISBN 7-03-009562-6

I. 线… II. 陈… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第044456号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2001年8月第一次印刷 印张:18 3/4

印数:1—5 000 字数:337 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(北燕))

前 言

线性代数是大学理、工、经济管理、医药、农等学科所有专业的一门重要数学基础课。随着计算机科学日新月异的发展，许多非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现，因此无论是从理论上看还是从应用上看，线性代数的地位更趋重要。美国数学及其应用联合会 (COMAP) 从 1991 年起组织有关专家历经五载编著的《数学的原理与实践》一书指出：“在现代社会，除了算术以外，线性代数是应用最广泛的数学学科了。”加之线性代数是一门新概念多，又比较抽象的课程，作为基础课，它一般被安排在第一学年上，因而还承担着提高学生素质，帮助学生完成从中学到大学跨越的重任。这门课程在许多专业还有后继课程（如离散数学、数值分析、微分方程等），故在大学人才培养中，线性代数课程有着重要的地位和作用。

本教材是面向所有大学上述专业的大学生而撰写的教材，量体裁衣，强调适用性和通用性，兼顾先进性。因而在编著中作了以下探索：

(1) 低起点。起点和中学代数接轨，从中学生熟悉的内容解线性方程组讲起。

(2) 突出主线，删除某些枝节。突出主体使最基本最重要的内容讲深讲透，而一些枝节的删除将使全书脉络更为清晰，结构更为简洁，有助于学生集中精力掌握最基本最重要的知识。

(3) 坡度适中。教材章节的编排中尽量使难点分散，由浅入深时注意逐步过渡。力求使全书步步深入，而每步坡度适中，使一般程度的学生通过努力都能顺利地学会全书。而全书涵盖了教育部制订的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，且在核心部分有所展开和加深，因而为学生进一步深造提供良好的线性代数基础。

(4) 注重引入思想，剖析方法，在阐明结果的同时着眼于提高学生的素质。

(5) 尽量以提出问题，讨论问题，解决问题的方式来展开教材，努力使学生也能知其所以然。

(6) 充分考虑到不同学时不同层次教育的需要，教材分主体和选学两部分，通过合理配置可适用于不同学时不同层次的教学。

(7) 教材有较多的典型例题，以期举一反三。习题按小节配置，注意兼容各种题型，其中有大量的客观性习题。习题有难有易，留有充分的选择余地。

(8) 每章末均有“概要及小结”，这不仅是该章的概括提高，还常有加深理解、开拓思维的内容。

(9) 注重应用。线性代数在其它学科的渗透和应用，在篇幅允许时，尽量予以提及。

(10) 行文追求简洁明白，对重点、难点的阐述和剖析务求详尽。对容易误解出错之处，以注记的形式指明，并适度引申，以求触类旁通，提高能力。全书力图使凡大学一年级学生都能看懂，即使自学也能掌握。

本书的主体（不包括打*号用仿宋体排印的内容及附录）适用于50学时的线性代数课所用，若作适当的增删，则可适用于学时数从34到68的线性代数课，本书的主体的教学内容完全满足高等工业学校“线性代数教学基本要求”而有余，所以即使删去部分章节也无妨。

本书的附录是主体内容外的选学部分。附录一、附录二是主体内容所需预备知识的补充。附录三、附录五是主体内容的应用。附录四、附录六是主体内容的提高和深化。均供读者酌情选学。

浙江大学城市学院院长鲁世杰教授，浙江大学之江学院副院长金蒙伟副教授一直十分关心支持、帮助作者撰写教材。在本书打印本使用过程中，蒙谢冰璋副教授、张继昌副教授等众多同事的厚爱，提出了许多宝贵意见。对此作者一并表示衷心的感谢。

浙江大学的城市学院、之江学院、远程教育学院、数学系、教材服务中心等有关部门对本书的撰写、使用、发行各个方面给予了帮助和支持。本书有幸被列为浙江大学课程建设项目，城市学院将此书作为首批教改基金资助的教材建设项目。科学出版社吕虹同志大力支持使本书得以面世。作者一并深表感谢。

作者虽在浙江大学执教代数20多年，此书也是多年教学实践中日积月累几经修改而成，然限于水平，撰写中常有纰短汲深之感，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

陈维新

2001年3月于浙江大学求是村

目 录

第一章 行列式	1
§ 1.1 数域与排列	1
§ 1.2 行列式的定义	5
§ 1.3 行列式的性质	14
§ 1.4 行列式按行(列)展开	23
§ 1.5 克拉默法则	34
§ 1.6 概要及小结	38
第二章 线性方程组	44
§ 2.1 消元法	44
§ 2.2 矩阵的秩	50
§ 2.3 解线性方程组	55
§ 2.4 概要及小结	63
第三章 矩阵	71
§ 3.1 矩阵的运算	71
§ 3.2 可逆矩阵	87
§ 3.3 矩阵的分块	94
§ 3.4 矩阵的初等变换与初等矩阵	103
§ 3.5 矩阵的等价和等价标准形	114
§ 3.6 概要及小结	118
第四章 向量空间	123
§ 4.1 定义及其背景	123
§ 4.2 向量的线性相关性	128
§ 4.3 向量的极大线性无关组	135
§ 4.4 基和维数	140
§ 4.5 子空间	147
§ 4.6 矩阵的秩·线性方程组解的结构	151
§ 4.7 \mathbb{R}^n 的内积和标准正交基	160
§ 4.8 概要及小结	171
第五章 矩阵的相似 特征值和特征向量	178
§ 5.1 矩阵的相似和对角化	178
§ 5.2 特征值和特征向量	181
§ 5.3 矩阵相似的理论和应用	189
§ 5.4 实对称矩阵的对角化	198

§ 5.5 概要及小结	203
第六章 二次型	209
§ 6.1 配方法化二次型为标准形	209
§ 6.2 矩阵的合同和二次型的标准形	213
§ 6.3 二次型的规范形	222
§ 6.4 正定二次型	227
§ 6.5 概要及小结	234
习题及练习题答案	241
主要参考文献	259
附录一 连加号 \sum	260
附录二 一元多项式的一些概念和结论	263
附录三 线性方程组理论在几何中的应用	268
附录四 分块矩阵的初等变换	271
附录五 最小二乘法	275
附录六 线性空间和欧氏空间 (简介)	280
符号表	290

第一章 行列式

线性代数是中学代数的继续和提高. 第一和第二章就是中学代数解一次(线性)方程 $ax + b = 0$ 的延伸和深化, 研讨多个变量多个线性方程组成的线性方程组的求解问题. 为此要引入一些概念, 作为预备知识.

§ 1.1 数域与排列

本节讨论数域和排列.

一、数域

研究某些问题, 常与所研究对象的取值范围有关. 如求方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根, 不仅在有理数范围无解, 就是在实数范围也无解, 而在复数范围有解为 $\pm i$. 又如, 在整数范围内, 除法不是普遍可做的, 因商不一定是整数, 而在有理数范围内, 只要除数不为零, 除法总是可做的. 另一方面, 这些范围不同的有理数、实数、复数有着许多共同的性质, 特别有着许多共同的运算(指加法、减法、乘法和除法)性质. 如加法、乘法的可交换性, 加法、乘法的可结合性等. 为了在以后讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理, 我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是至少有两个不同复数组成的集合, 若 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数, 则 P 就称为一个数域.

如果数的集合 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中, 就称数集 P 对这个运算是封闭的. 因此数域的定义也可以说成: 对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)均封闭的至少含有两个不同数的集合.

从定义 1.1.1 可推知: 全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域. 这三个数域分别用字母 Q, R, C 来表示, 且有 $Q \subset R \subset C$.

例 1.1.1 记全体整数的集合为 Z , 则 Z 不是数域. 这是因为 $2, 3 \in Z$, 且 $3 \neq 0$, 但 $\frac{2}{3} \notin Z$, 这表明 Z 对于除法不封闭.

例 1.1.2 记 $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$, 则 $Q(\sqrt{2})$ 是数域.

* 证 容易看出 $Q \subseteq Q(\sqrt{2})$, 且对任意的

$$a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2}),$$

有

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2}).$$

此外,当 $a + b\sqrt{2} \neq 0$ 时, $a - b\sqrt{2}$ 也不为零. 这是因为若 $a - b\sqrt{2} = 0$, 导致 $a = 0, b = 0$, 这与 $a + b\sqrt{2} \neq 0$ 矛盾. 故而

$$\begin{aligned} \frac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} &= \frac{(c + d\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} \\ &= \frac{ac - 2bd}{a^2 - 2b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

综上所述可知: $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ 是数域. 而且从 $\sqrt{2} \in \mathcal{Q}, \sqrt{3} \in \mathcal{Q}(\sqrt{2})$ 知

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathcal{R}.$$

类似地可以阐明 $\mathcal{Q}(\sqrt{3}), \mathcal{Q}(\sqrt{5}), \dots, \mathcal{Q}(\sqrt{p}), \dots$, 其中 p 是素数(质数), 是互不相同的数域, 因而存在着无穷多个数域.

今后我们常在数域 P 上讨论问题, 对所涉及的 P 中的数进行四则运算, 推导出结果. 这样就使得该结果对任何数域都成立, 从而有一般性.

为简单计, 如把下文中提及的数域当作 $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ 来考虑, 也无妨.

二、排列

定义 1.1.2 由 $1, 2, \dots, n$ 共 n 个数码组成的一个有序数组, 称为一个 n 阶排列.

例如, $15432, 65(12)798(11)4(10)312, n(n-1)\cdots 21$ 分别为 5 阶排列, 12 阶排列, n 阶排列. 在上述 12 阶排列中我们把数码 12, 11, 10 用括号括起来为了区分, 类似的做法在 $2n$ 阶排列中也采用.

排列是有序数组, 所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列, 例如 132 和 213 就是不同的 3 阶排列. 不同的 n 阶排列有多少个呢? n 阶排列的一般形式可表为 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 其中 i_1, i_2, \dots, i_n 为数 $1, 2, \dots, n$ 中某一个数, 且互不相同, 而 $i_k (1 \leq k \leq n)$ 的下标 k 表示 i_k 排在 n 阶排列的第 k 个位置上. 这样按 n 阶排列的定义知, i_1 可有 n 种选取 (n 个数码中任选一个), i_2 有 $n-1$ 种选取 (去掉 i_1 , 余下 $n-1$ 个数码中任选一个), \dots, i_{n-1} 可有 2 种选取 (去掉 i_1, i_2, \dots, i_{n-2} , 余下 2 个数码中任选一个), 而 i_n 只能取余下的那个数码, 故 n 阶排列共有

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

个.例如 3 阶排列共有 $3! = 6$ 个,它们是:123, 132, 213, 231, 312, 321.

在 $n!$ 个 n 阶排列中,惟有 $12\cdots(n-1)n$ 是按数码从小到大的自然顺序组成的一个排列(称为**标准排列**).其余的排列或多或少会出现大的数排在小的数前面的情况,比如在 5 阶排列 15432 中,5 排在 4 前,3 排在 2 前.这样的排列顺序是与自然顺序相反的,为此引入概念:在排列 $i_1 i_2 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$ 中,如果 $j < k$ 而 $i_j > i_k$ 则称数对 i_j, i_k 构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.逆序数为偶数的称为**偶排列**,逆序数为奇数的称为**奇排列**.

下面寻求计算排列逆序数的方法.先看一个例子,排列 35412 构成逆序的数对有

$$\begin{aligned} & 31, \quad 32; \\ & 54, \quad 51, \quad 52; \\ & 41, \quad 42. \end{aligned}$$

因而 35412 的逆序数为

$$\begin{aligned} & 2(3 \text{ 后面比 } 3 \text{ 小的数的个数}) \\ & + 3(5 \text{ 后面比 } 5 \text{ 小的数的个数}) \\ & + 2(4 \text{ 后面比 } 4 \text{ 小的数的个数}) \\ & + 0(1 \text{ 后面比 } 1 \text{ 小的数的个数}) \\ & = 7, \end{aligned}$$

所以 35412 为奇排列.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法.

$$\begin{aligned} \tau(i_1 i_2 \cdots i_n) &= \tau_1(i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数}) \\ &+ \tau_2(i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数}) \\ &+ \cdots \cdots \cdots \\ &+ \tau_{n-1}(i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}). \end{aligned}$$

据此

$$\tau(15432) = 0 + 3 + 2 + 1 = 6. \quad 15432 \text{ 为偶排列.}$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以当 $n = 4k, 4k+1$ 时 $n(n-1)\cdots 21$ 为偶排列;当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时 $n(n-1)\cdots 21$ 为奇排列.

注意到 $\tau(12\cdots(n-1)n) = 0$,故 $12\cdots(n-1)n$ 为偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**.例如,经过 1,3 两数码对换,偶排列 15432 就变成奇排列 35412.这表明对换会改变排列的奇偶性.一般有

定理 1.1.1 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

*证 首先证明对换排列中相邻两个数码的情况. 设排列 $\cdots i_k i_{k+1} \cdots$ 经过 i_k, i_{k+1} 对换后变成排列 $\cdots i_{k+1} i_k \cdots$, 这里“ \cdots ”表示排列中那些不动的数码. 我们记

$$\tau(\cdots i_k i_{k+1} \cdots) = \tau_1 + \cdots + \tau_{k-1} + \tau_k + \tau_{k+1} + \tau_{k+2} + \cdots + \tau_n,$$

则

$$\tau(\cdots i_{k+1} i_k \cdots) = \tau_1 + \cdots + \tau_{k-1} + \tau'_{k+1} + \tau'_k + \tau_{k+2} + \cdots + \tau_n,$$

其中 τ_k 与 τ'_k 相比多一个 $i_k i_{k+1}$ 可能构成的逆序数, 而 τ_{k+1} 与 τ'_{k+1} 相比少一个 $i_{k+1} i_k$ 可能构成的逆序数, 从而

$$\text{若 } i_k < i_{k+1} \text{ 则 } \tau_k = \tau'_k, \quad \tau'_{k+1} = \tau_{k+1} + 1;$$

$$\text{若 } i_{k+1} < i_k \text{ 则 } \tau_k = \tau'_k + 1, \quad \tau'_{k+1} = \tau_{k+1}.$$

故不论如何, 排列的奇偶性改变了.

现再讨论一般情况. 设对换的两个数码 i_k 和 i_j 中间有 s 个数码, 即设排列为

$$\cdots i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_j \cdots \quad (1.1.1)$$

经过 i_k, i_j 对换后, 变成排列

$$\cdots i_j i_{k+1} \cdots i_{k+s} i_k \cdots \quad (1.1.2)$$

从(1.1.1)开始, 把 i_j 依次与左边 $s+1$ 个数码 $i_{k+s}, \cdots, i_{k+1}, i_k$ 进行相邻数码的对换, 排列(1.1.1)变成排列

$$\cdots i_j i_k i_{k+1} \cdots i_{k+s} \cdots \quad (1.1.3)$$

再对排列(1.1.3)把 i_k 向右依次与 s 个数码 i_{k+1}, \cdots, i_{k+s} 进行相邻数码对换, 排列(1.1.3)变成排列(1.1.2). 这表明 i_k 与 i_j 的对换可通过 $2s+1$ 次相邻数码对换来实现, 而每经一次相邻数码对换改变排列奇偶性. 现经奇数次相邻数码对换, 最终必改变排列的奇偶性.

习题 1.1

1. $R(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in R\}$ 是不是数域? 它实际上是 Q, R, C 中的哪一个数域?

2. 写出4个数码1, 2, 3, 4的所有4阶排列.

3. 在下列四个4阶排列中, 奇排列是().

(A) 4312; (B) 4132; (C) 1342; (D) 2314.

4. 计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:

(1) 314265; (2) 314265789; (3) 542391786;

(4) 987654321; (5) 246813579; * (6) $135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)$.

5. 在由1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9组成的下述9阶排列中, 选择 i 与 j 使得

- (1) 当 $i = \underline{\quad}$, $j = \underline{\quad}$ 时, 2147i95j8 为偶排列;
 (2) 当 $i = \underline{\quad}$, $j = \underline{\quad}$ 时, 1i25j4896 为奇排列;
 (3) 当 $i = \underline{\quad}$, $j = \underline{\quad}$ 时, 412i5769j 为偶排列;
 (4) 当 $i = \underline{\quad}$, $j = \underline{\quad}$ 时, i3142j786 为奇排列.
6. 写出全体形如 $5^* * 2^*$ 及 $2^* 5^* 3^*$ 的 5 阶排列. 总结一下, 有 k 个位置数码给定的 n ($n > 2$) 阶排列有多少个?
 7. 自学附录一: 连加号 \sum .

§ 1.2 行列式的定义

有了上一节的准备, 现在我们来考察由含有 n 个未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的求解问题.

这类方程组总是可以用消元法来求解的. 消元法对具体的数字方程求解, 虽然比较方便, 但其解没有一个统一的公式. 而解的公式不仅在理论上具有重要性, 而且当方程组的系数含有参数并具有某些对称性时, 用公式求解有时会比用消元法更方便. 现在我们来寻求这样的公式, 首先从 $n=2, n=3$ 做起, 再推广到一般.

$n=2$ 时, 用消元法解含有未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

即以 a_{22} 乘第一个方程两边, 以 a_{12} 乘第二个方程两边. 然后两式相减, 消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$$\text{引进记号: } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ 并规定} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2.2)$$

称 D 为二阶行列式. 横写的称为行, 从上到下分别称第 1 行, 第 2 行. 竖写的称为列, 从左到右分别称为第 1 列, 第 2 列. 行列式中的数, 称为行列式的元素. 每个元素有两个下标, 第一个下标表示它所在的行, 称为行指标; 第二个下标表示它所在的列, 称为列指标. 如 a_{12} 就是位于第 1 行, 第 2 列上的元素.

从(1.2.2)式可知二阶行列式是两项的代数和. 一项是从左上角到右下角连线(称为行列式的主对角线)上两元素的乘积, 取正号. 另一项是从右上角到左下角连线(称副对角线)上两元素的乘积, 取负号.

据此定义, 可计算出

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

这样当 $D \neq 0$ 时, 方程组(1.2.1)的解, 可用下述公式表示:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例1.2.1 解线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 = a, \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 = b. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix} = a\cos\theta + b\sin\theta, \\ D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix} = b\cos\theta - a\sin\theta.$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = a\cos\theta + b\sin\theta, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = b\cos\theta - a\sin\theta.$$

$n=3$ 时, 含有未知量 x_1, x_2, x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

可同样逐次消元, 消去 x_3, x_2 可得

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.$$

把 x_1 的系数记为 d , 当 $d \neq 0$ 时, 得

$$x_1 = \frac{1}{d}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3).$$

类似地可解得

$$x_2 = \frac{1}{d}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3 = \frac{1}{d}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

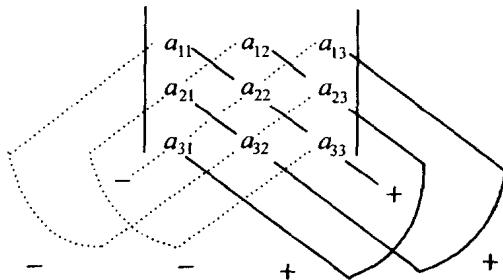
为了寻求方程组(1.2.3)公式解, 引进由三行, 三列构成的三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这规则可按下图来记忆



实线上三个数的积取正号:

$$+ a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}$$

虚线上三个数的积取负号:

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+) \quad - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

现将方程组(1.2.3)中的常数项 b_1, b_2, b_3 依次替换 D 中第 1 列(x_1 的系数), 第 2 列(x_2 的系数), 第 3 列(x_3 的系数)元素所得行列式分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

按规定计算 D_1, D_2, D_3 发现三者恰为用消元法解(1.2.3)所得 x_1, x_2, x_3 表达式的分子, 而分母 d 均为 D , 故当 $D \neq 0$ 时, 方程组(1.2.3)有公式解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例1.2.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a, \\ x_2 - x_3 = b, \\ x_1 + x_3 = c. \end{cases}$$

解 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & -1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + c + b,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = b - a + c,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = c - b - a.$$

所以

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{1}{2}(a + b + c), \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{1}{2}(-a + b + c), \\ x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}(-a - b + c). \end{aligned}$$

上述讨论过程使我们感到要寻求 n 个变量 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的公式解, 在于如何恰当地定义 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ?$$

为此剖析二阶、三阶行列式的定义:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

其共同特征可概括为

(1) 二阶行列式是 $2! = 2$ 项的代数和, 其中每一项是取自不同行不同列的两个元素的乘积. 三阶行列式是 $3! = 6$ 项的代数和, 其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(2) 代数和中每一项的正负号是这样决定的: 当行指标取成标准排列, 由列指标组成排列的奇偶性确定, 偶者为正, 奇者为负.

据此, 我们可将上述概括表达为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里 $\sum_{j_1 j_2}$ 表示对 1, 2 这两个数所有排列 $j_1 j_2$ (2 项) 取和, $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1, 2, 3 这三个数所有排列 $j_1 j_2 j_3$ (6 项) 取和.

推而广之, 定义 n 阶行列式.

定义 1.2.1 由 n^2 个元素 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 排成 n 行 n 列, 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.2.4)$$

称为 n 阶行列式. 它是取自式 (1.2.4) 中所有属于不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (称为通项) 的代数和, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是某个 n 阶排列, 故共有 $n!$ 项求和. 每项前的符号按下述规则选取: 当 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是偶数时取正号, 当 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为奇数时取负号. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1.2.5)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 1, 2, \dots , n 这 n 个数组成的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取和.

特别规定一阶行列式 $|a| = a$. 并沿用二阶行列式所使用的术语, 诸如行, 列, 行指标, 列指标, 主对角线, 副对角线等. 为方便计, n 阶行列式 (1.2.4) 可记为 $D = |a_{ij}|_n$. 由式 (1.2.5) 知, 当 a_{ij} 均为数时, 行列式 D 为一个数, 如 $a_{ij} \in P (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 这里 P 是某个数域, 则 $D \in P$. 当 a_{ij} 中含有变量时, 行列式 D 为此变量的多项式. 故计算或求行列式就是把这个数或多项式求出来.

例 1.2.3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 据定义 1.2.1 $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. 该展开式通