

弹性力学理论集成 与学习方法

肖来元 编著



华中理工大学出版社

高等学校教学参考书

弹 性 力 学

理论集成与学习方法

肖来元



华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学理论集成与学习方法/肖来元编著
武汉:华中理工大学出版社,1997年7月

ISBN 7-5609-1606-6

I. 弹…

II. 肖…

III. 弹性力学-高等学校-教学参考资料

IV. O343

弹性力学理论集成与学习方法

肖来元 编著

责任编辑:佟文珍

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

国营华严农场印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:7 字数:170 000

1997年8月第1版 1997年8月第1次印刷

印数:1—3 000册

ISBN 7-5609-1606-6/O·175

定价:7.50元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是根据国家教委课程教学指导委员会制定的“高等工业学校弹性力学课程教学基本要求”和编者在该领域多年教学实践的基础上编写而成的。

全书共分八章,包括绪论、平面问题的基本理论、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、差分法与变分法、有限单元法、空间问题的基本理论与解答、薄板的弯曲等内容。各章内容均由本章的内容提要、理论要点与概述、典型例题分析、学习指导以及复习思考与测试题等部分组成。本书具有概念集中、精练简洁、实例丰富、通俗易懂、指导性强、便于自学等特点;实现了教材与学习指南两者兼容、一书多用的效果。与传统弹性力学教材相比,具有完全不同的风格。

本书可作为高等工科院校土建、水利、机械等专业大学本科、研究生的教材和自学用书,也可供上述专业的教师、工程技术人员参考。

Abstract

This book is compiled on the basis of the essential teaching requirements, which are drawn up by the course — guiding committee of our state education commission, on the course of elastic theory in colleges of engineering and on the basis of the author's long time teaching experience in this field.

This book is divided into eight chapters. Each chapter is composed of abstract, theoretical points and summary, analysis of typical instances, studying directions, questions for review and tests. This book has characteristics of concentrating concepts, brief content and abundant instances. It is easily understood and can be convenient for self-studying. It is a representative of both teaching and guiding book. To compare with traditional textbooks of elastic theory this book has a unique style.

This book can be used as textbooks for both graduates and postgraduates who major in civil construction, water conservancy, machinery in colleges of engineering. It can be used by teachers and technicians of engineering as reference as well.

前 言

弹性力学又称为弹性理论,它是固体力学的一个分支,是研究弹性物体在外部因素(如外力、温度变化等)作用下产生的应力、应变以及与应变有关的位移规律的科学.它是在学完了理论力学和材料力学课程后,为进一步提高学生解决工程实际问题的能力以及进行科学研究而开设的一门课程,它在土建、水利和机械工程等技术领域中,有着广泛的应用.

本书是为配合高等工科院校土建、水利、机械工程等专业的学生学习弹性力学课程而编写的.基本内容主要以国家教委教学指导委员会制定的“高等工业学校弹性力学课程教学基本要求”为依据,全书内容所需教学时数,略多于现行有关专业教学计划中规定的时数,各专业可根据需要对其适当取舍.

本书编写过程中,既考虑本门课程的体系结构,又注重体现自身的体系风格;既注意避免繁琐的力学推导,又注意由浅入深、循序渐进、便于自学的原则.为使学生掌握主要内容,记住基本公式,抓住重点环节,加深对基本理论和概念的理解与应用,每章都由内容综述、理论要点与概述、典型例题分析、学习指导以及复习思考与测试题几部分内容组成.在每一部分都渗透了作者在教学过程中的体会,特别是在学习指导部分对相关理论、学习方法等提出了不少见解.本书既可作为弹性力学课程的教材,也可兼作为该门课程的学习指导用书,两者兼容,一书多用.

全书由华中理工大学杨元山教授作了认真细致的审阅,并为本书的修改提出了许多宝贵的意见和建议,特此谨致衷心谢意.

由于编者水平所限,书中难免有不少错误和欠妥之处,恳请读者批评指正.

编 者

1997年5月于武汉

目 录

• 1 •

第四章 用极坐标解平面问题 (59)

§ 4-1 平面问题的极坐标方程 (59)

§ 4-2 极坐标中的应力函数解法 (62)

§ 4-3 典型例题分析 (63)

§ 4-4 学习指导 (75)

复习思考与测试题 (77)

第五章 差分法与变分法 (81)

§ 5-1 差分法求解平面问题 (81)

§ 5-2 变分法求解平面问题 (87)

§ 5-3 典型例题分析 (95)

§ 5-4 学习指导 (110)

复习思考与测试题 (112)

第六章 有限单元法 (118)

§ 6-1 平面问题的有限单元法 (118)

§ 6-2 典型例题分析 (128)

§ 6-3 学习指导 (141)

复习思考与测试题 (143)

第七章 空间问题的基本理论与解答 (149)

§ 7-1 空间问题的基本方程 (149)

§ 7-2 按位移求解空间问题 (151)

§ 7-3 按应力求解空间问题 (155)

§ 7-4 等截面直杆的扭转与薄膜比拟 (159)

§ 7-5 典型例题分析 (163)

§ 7-6 学习指导 (176)

复习思考与测试题	(177)
第八章 薄板的弯曲	(180)
§ 8-1 矩形薄板的弯曲理论	(181)
§ 8-2 圆形薄板的弯曲理论	(185)
§ 8-3 典型例题分析	(188)
§ 8-4 学习指导	(206)
复习思考与测试题	(207)
参考文献	(212)

第一章 绪 论

本章介绍弹性力学的性质、研究对象和任务,以及有关的几个基本概念和几个基本假定.另外,还对本门课程的学习方法作了一般性阐述,使在学习开始时,对本门课程有一个概况性的了解.

§ 1-1 弹性力学的任务与研究方法

弹性力学的基本任务是研究弹性体由于外部因素(外力或温度改变等)的作用而发生的应力、应变和位移的规律,为工程结构和机械零件的设计提供理论基础.

弹性力学和材料力学的任务是相仿的,但又有分工和区别.

1. 研究问题的范围不同

材料力学基本上只研究杆状构件(即杆件的长度远大于它的高度和宽度)的拉伸、压缩、剪切、弯曲、扭转作用下的应力与位移.弹性力学研究的问题范围更广泛,它包括杆、板、块体及由它们所组成的结构,例如工程结构中的叶轮、机壳、大轴、高压容器及管道、桥梁、堤坝等.

2. 研究问题的严密程度不同

同样研究杆状构件,材料力学和弹性力学研究的方法不同.例如,在材料力学中研究直梁在横向荷载作用下的弯曲时,引用平截面假设,即假设梁的横截面变形之前为平面,在变形之后仍保持为平面.因而求得横截面上的正应力(弯应力)沿梁的高度按直线规

律变化. 在弹性力学中研究这一问题就无须引用这一假设. 相反, 用弹性力学方法可以检查平截面假设的精确性. 弹性力学的分析表明, 只有当梁的高度 h 远小于梁的跨度 l 时, 材料力学结论才与实际情况相符. 如当 $h > l/4$ 时, 平截面假设不再适用, 在这种情况下, 横截面上的正应力沿梁的高度并不按直线分布, 而按曲线规律变化. 此例说明, 材料力学计算结果只有在一定范围内才与实际情况接近, 超出这个范围只能求助于弹性力学方法.

由此可知, 弹性力学的研究方法严密, 得出计算结果也比材料力学显得精确.

3. 解决问题的能力不同

应力集中问题在工程实际中是很重要的. 计算具有小圆孔的受拉平板时, 材料力学通常假定拉应力在净截面上均匀分布, 而不能算出圆孔附近的应力集中问题, 必须依靠弹性力学方法才能解决.

从以上分析可知, 弹性力学不仅能解决材料力学无法解决的问题, 而且还能评估材料力学用初等理论所得结论的可靠性和精确度.

4. 解决问题的方法不同

弹性力学解决问题的方法和材料力学的方法是不相同的. 材料力学常采用截面法; 而弹性力学常采用分离体方法, 即在物体内部取无数个平行六面体, 在物体内部取无数个四面体. 考虑这些分离体的平衡, 可写出一组平衡微分方程, 但未知应力数总是超出微分方程数, 所以弹性力学的问题是超静定的. 因此只有静力平衡方程是解不出应力的, 还必须考虑变形条件. 由于物体的连续性假设, 物体发生变形后还是一个连续体, 因此应变必须协调, 这样可得到一组表示应变协调的微分方程. 并由广义虎克定律表示应力

与应变之间关系.此外,还必须知道边界条件和初始条件,才能使问题有唯一确定的解.

综上所述,解决弹性力学问题,必须考虑平衡微分方程、几何方程、物理方程、边界条件与初始条件,这就是所谓偏微分方程的边值问题.

用弹性力学经典解法解决实际问题的主要困难在于求解偏微分方程的复杂性,通常不易求解,所以常采用逆解法和半逆解法.为此人们一直在寻求各种近似解法,近 20 年来发展起来的有限单元法、边界单元法就是这一重大工作的产物.现代计算方法和计算技术的发展,为弹性力学解决工程实际问题开辟了更广阔的前景,为弹性力学本身增添了更强的生命力.

§ 1-2 弹性力学中的基本假定

实际物体的力学性质是多方面的,从不同角度研究问题,侧面就不一样.研究物体在外加因素(外力,温度变化等)的作用下,而发生应力、应变和位移的规律时,常根据与其有关的一些主要因素,忽略一些关系不大的次要因素,对物体作某些假设,把它抽象成理想模型.弹性力学的基本假设如下:

1. 物体的连续性假定

假定整个物体的体积都被这个物体的介质所填满,不留下任何空隙.这样,物体中的应力、应变和位移等物理量可看成是连续的,因此才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律.

2. 物体的均匀性假定

该假定认为整个物体是由同一类型的均匀材料组成的.这样,物体内部各点的物理性质都是相同的,反映这些物理性质的弹性

常数(如弹性模量和泊松比等)并不随坐标位置的改变而变化。

3. 物体的各向同性假定

这一假定是指物体的物理性质在各个方向相同,也就是说,沿任何方向所取的微体,其物理性质不随方向而变化,称这类材料为各向同性材料。工程上的金属材料都由微小的晶粒所组成,其本身虽然是各向同性的,但由于晶粒微小而排列杂乱无章,按其统计平均性质,可认为是各向同性的。木材、复合材料是各向异性的。

4. 线性弹性假定

物体在引起变形的外力去除后,能完全恢复原状,这种性质称为“弹性”。假若外力和变形之间的关系又成正比,即材料服从虎克定律,那么,这种弹性就称为线性弹性。引用这一假定就等于限定我们所研究的物体仅发生线性弹性变形的那些物体,这就是线性弹性体。

5. 物体的小变形假定

假定物体在外力作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸,而应变分量和转角都远小于1。这样,在研究物体的平衡时,可不考虑由于变形所引起物体尺寸和位置的变化,在建立几何方程和物理方程时,可略去应变及转角的二次幂或二次乘积以上的项,使得到的基本方程是线性偏微分方程。

6. 无初应力假定

假定物体初始是处于自然状态,即在外力作用之前,物体内部是没有应力的。根据这个假定,由弹性力学方法求得的应力仅仅是由于荷载或温度变化的作用产生的。若物体内部有初应力存在,则当物体受外力(或温度变化等)作用时,其内实际存在的应力应等

于初应力加上用弹性力学方法所求得的应力。

根据上述假设所建立起来的弹性力学,称为线性弹性力学,也就是本书所要阐述的内容。

§ 1-3 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、内力、应力、应变和位移等。

作用在物体上的力可以分为外力与内力。

外力是指其它物体作用在研究对象上的力。按其作用的方式,外力又可分为表面力和体积力。表面力是作用于物体表面上的力,它又可分为分布力和集中力。分布力是连续作用于物体表面面积上的力,例如作用于水坝上的水压力、作用于结构物上的风压力等。物体表面上所受的力不一定是均匀分布的。为了描述物体表面各点受力大小的程度,用到集度的概念。例如,要描述物体表面上某一点 P 所受面力的大小和方向,在物体表面上取含 P 点的微面积 ΔA (图 1-1(a)), 设作用于 ΔA 的面力为 ΔQ , 则面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta A$, 令 ΔA 无限减小而趋于 P 点, 若面力连续分布, 则 $\Delta Q/\Delta A$ 将趋于一定的极限 Q , 即:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = Q.$$

这个极限矢量 Q 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔA 是标量, 所以 Q 的方向就是 ΔQ 的极限方向。 Q 在坐标轴上的三个分量为 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, 并规定指向坐标轴正向为正, 反之为负。面力的因次为 [力][长度]⁻²。

体积力是连续分布于物体内部各点上的力, 例如物体自重、由于加速度而引起的惯性力等。物体内部各点受体力的情况, 一般是不相同的。为了描述物体内部各点受力的程度, 仍用集度的概念。例如

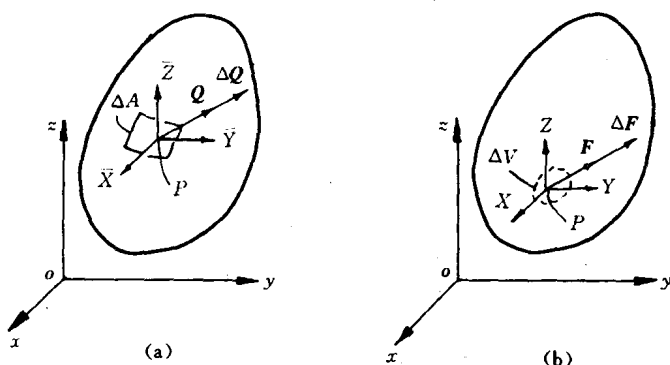


图 1-1

要描述物体内某一点 P 所受体力的大小和方向,在物体内取含 P 点的微体积 ΔV (图 1-1(b)),设作用于 ΔV 的体力为 ΔF ,则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$,令 ΔV 无限减小而趋于 P 点,若体力连续分布,则 $\Delta F/\Delta V$ 将趋于一定的极限 F ,即:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = F.$$

这个极限矢量 F 就是该物体在 P 点所受体力的集度.因为 ΔV 是标量,所以 F 的方向就是 ΔF 的极限方向, F 在坐标轴上的投影 X 、 Y 、 Z ,称为该物体在 P 点的体力分量,并规定指向坐标轴正向为正,反之为负.体力的因次为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$.

物体受外力以后,其内部相互作用力发生改变,此改变量称为内力.为了显示并确定在外力作用下物体上某点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 $m-m$ 把该物体切分为 M_1 和 M_2 两部分(见图 1-2).任取其中一部分,例如 M_1 作为研究对象.在部分 M_1 上作用有外力 F_1 、 F_2 ,欲使部分 M_1 保持平衡,则部分 M_1 必然有内力作用于部分 M_1 的 $m-m$ 截面上,以便与部分 M_1 所受的外力平衡.取包含 P 点截面 $m-m$ 的一小部分面积 ΔA ,设作用于 ΔA 上的内力为 ΔT ,则内力的平均集度,即平均应力为 $\Delta T/\Delta A$,令

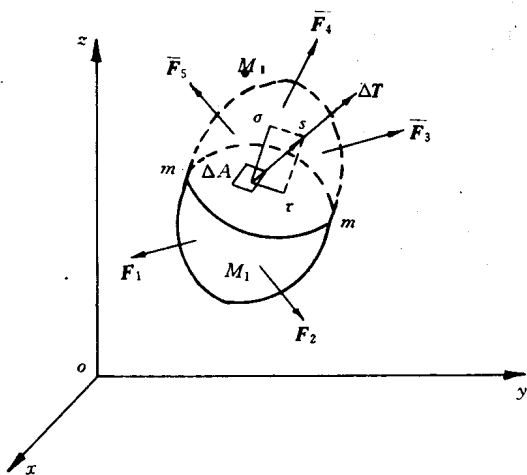


图 1-2

ΔA 无限减小而趋于 P 点, 若内力连续分布, 则 $\Delta T / \Delta A$ 将趋于一定极限 s , 即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = s.$$

这个极限矢量 s 就是该物体在截面 $m-m$ 上的, 在 P 点的总应力. 因为 ΔA 是标量, 所以总应力 s 的方向就是 ΔT 的极限方向. 通常把总应力 s 分解为沿截面 $m-m$ 的法线方向的应力, 叫正应力, 记作 σ ; 沿截面 $m-m$ 切线方向的应力叫剪应力, 记作 τ (见图 1-2). 总应力及其分量的因次是 [力][长度]⁻².

应力不但与点的位置有关, 而且还与截面的方位有关. 为了描述受力物体内部某一点处的应力状态, 一般从物体内部过这一点取出一个微小的平行六面体, 它的棱边平行于坐标轴, 而其长度为 $PA=dx$, $PB=dy$, $PC=dz$ (见图 1-3). 将此平行六面体每个面上的总应力分解为一个正应力和两个剪应力, 分别与三个坐标轴平行. 为了表明应力分量的作用面与作用方向, 采用下列符号: 正应

力加上一个坐标角码。例如 σ_x 是作用于垂直于 x 轴的面上,同时也是沿着 x 轴方向作用的。剪应力加上两个坐标角码,前一个角码表示作用面垂直于哪一个坐标轴,后一个角码表示作用方向沿哪一个坐标轴。例如 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向的。为了规定应力分量的正负号,认为图 1-3 的平行六面体上的外法线沿坐标轴正向的截面为正面,反之则称为负面。正面上的应力分量同坐标轴正向一致(负面上的应力分量同坐标轴负向一致)的为正,反之为负。图 1-3 所示的应力分量全部都是正的。

可以证明,六个剪应力分量之间有一定的互等关系,即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

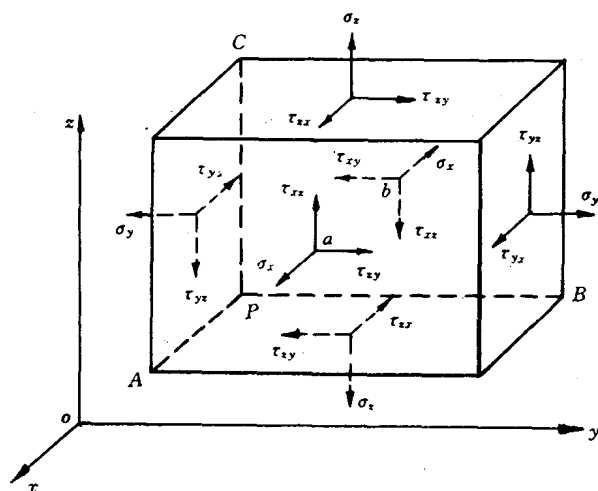


图 1-3

以后可见,在物体内的任意一点,如果已知该点的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 六个应力分量,就可以求得经过该点的任意截面的正应力和剪应力。因此,这六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

物体受外部因素作用时,其内部每个质点将发生位移,此位移