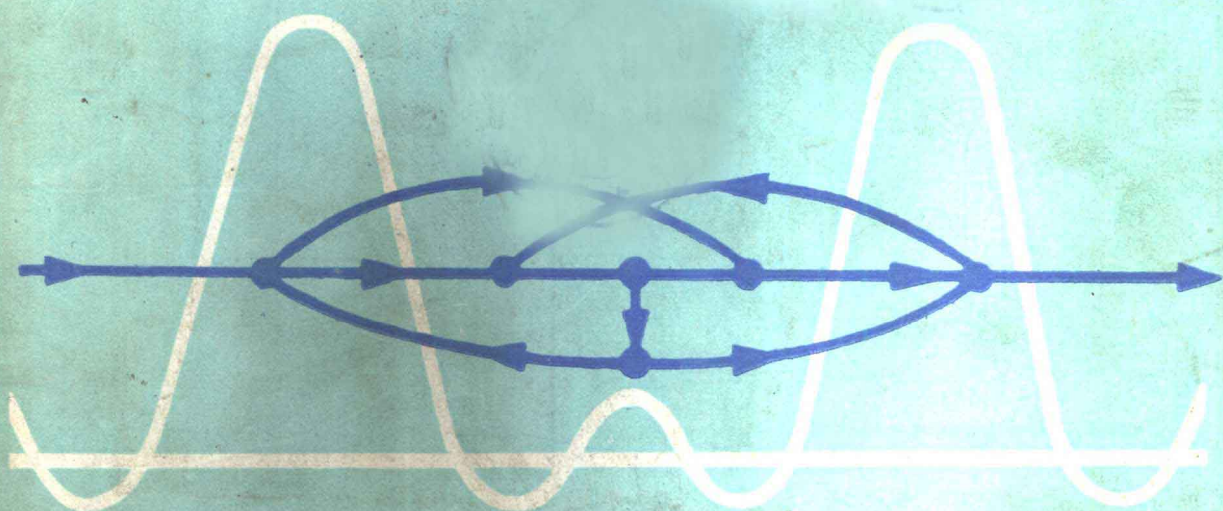


933758

数字信号处理 原理及应用

陶德元 黄本淑 编著



四川大学出版社

数字信号处理原理及应用

陶德元 黄本淑 编著

四川大学出版社

内 容 提 要

本书依次叙述：数字信号处理概述、离散信号与系统基础、离散付里叶变换、快速付里叶变换、离散随机信号的功率谱估计、数字滤波器的结构、IIR 数字滤波器设计、FIR 数字滤波器设计、新型数字滤波器、数字滤波器中的有效字长效应。全书重点突出、条理清楚、概念明确、推导详细、强调实用。每章附有习题，便于自学和应用。

本书可供大专院校无线电技术、电子技术、电子工程、通信工程、信息科学、计算机科学、自动控制、精密仪器与测量等专业师生以及上述专业的科技人员使用。

数 字 信 号 处 理 原 理 及 应 用

陶德元 黄本淑 编著

责任编辑 王敦平 封面设计 蒋仲文

四川大学出版社出版发行 (成都九眼桥四川大学内)

四川省新华书店经销 成都前进印刷厂印刷

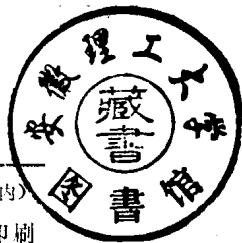
开本：787×1092mm 1/16 印张：18.75 字数：400千

1991年7月第一版

1991年7月第一次印刷

印数：0001—3000册

ISBN 7—5614—0352—6/7N·3 定价：4.85元



前 言

随着大规模集成电路和数字计算机的迅速发展,对传统的模拟信号处理的研究将转换为对数字信号处理的研究,所以近年来在高校理工科中的无线电技术、电子技术、电子工程、通信工程、信息科学、计算机科学、自动控制、精密仪器与测量等各专业都开设了数字信号处理这门课。

本书的主要内容来自作者多次讲课的手稿和在科研中已得到验证的结果,力图把这门理论性较强的课写得通俗易懂很有实用性。为避免内容上的交叉重复,作者按数字信号和数字系统的次序分别讲述了数字信号处理概述、离散信号与系统基础、离散付里叶变换、快速付里叶变换、离散随机信号的功率谱估计、数字滤波器的结构、IIR 数字滤波器设计、FIR 数字滤波器设计、新型数字滤波器、数字滤波器中的有限字长效应等内容。各章注重物理概念的叙述,尽力减少复杂的数学推导,并编写了大量有实用性的内容和习题,这样使其条理清楚、重点突出,便于自学。通过多次实践证明:70学时可授完全部内容;再通过100多题的训练,学生能具有一定解决实际问题的能力。

本书第一、二、三、六章由成都科技大学黄本淑编写。第四、五、七、八、九、十章由四川大学陶德元编写,陶德元负责统编。

由于编写时间仓促,加之作者水平有限,书中难免会有不妥和错误之处,敬请读者指正。

编 者

1991年1月

目 录

前言

第1章 数字信号处理概述	(1)
1.1 从模拟信号处理到数字信号处理.....	(1)
1.1.1 模拟信号处理系统	(1)
1.1.2 数字信号处理系统	(1)
1.2 数字信号处理的优点与应用.....	(2)
1.2.1 数字信号处理的优点	(2)
1.2.2 数字信号处理的应用	(3)
1.3 数字信号处理的预备知识.....	(4)
1.3.1 $\delta(t)$ 与信号 $x(t)$ 的相乘和相卷	(4)
1.3.2 模拟信号的傅氏级数和傅氏变换	(5)
1.3.3 模拟系统的微分方程描述	(8)
第2章 离散信号与系统基础	(11)
2.1 信号的采样与复原.....	(11)
2.1.1 模拟信号的采样	(11)
2.1.2 采样信号的复原	(12)
2.2 离散信号序列.....	(14)
2.2.1 单位脉冲序列	(14)
2.2.2 单位阶跃序列	(14)
2.2.3 矩形序列	(14)
2.2.4 指数序列	(15)
2.2.5 正弦序列	(15)
2.2.6 序列的一般表示方法	(15)
2.2.7 共轭对称和共轭反对称序列	(15)
2.3 线性移不变稳定因果系统.....	(16)
2.3.1 线性系统	(17)
2.3.2 移不变系统	(17)
2.3.3 稳定系统	(17)
2.3.4 因果系统	(17)
2.4 序列的卷积与相关.....	(18)
2.4.1 序列的卷积	(18)
2.4.2 序列的相关	(20)
2.5 序列傅里叶变换.....	(23)
2.5.1 序列傅里叶变换的导出	(23)
2.5.2 序列傅里叶变换的若干对称性	(24)

2.5.3	序列相乘与相卷的频谱	(26)
2.6	Z变换 (ZT)	(27)
2.6.1	Z变换的导出	(27)
2.6.2	Z变换的收敛域	(28)
2.7	Z反变换	(31)
2.7.1	长除法	(31)
2.7.2	留数定理法	(31)
2.7.3	部分分式法	(32)
2.8	Z变换的基本性质	(33)
2.8.1	线性	(33)
2.8.2	序列移位	(33)
2.8.3	序列加权	(34)
2.8.4	序列的初值与终值	(34)
2.8.5	序列的相卷	(34)
2.8.6	序列的相乘	(34)
2.8.7	频域连续的帕斯卡定理	(35)
2.9	离散系统的差分方程描述	(36)
2.9.1	微分方程的差分化	(36)
2.9.2	IIR和FIR离散系统	(36)
2.9.3	差分方程的求解	(37)
2.10	离散系统的系统函数	(39)
2.10.1	系统函数的定义	(39)
2.10.2	系统函数的收敛域	(40)
2.10.3	系统响应的几何表示	(40)
第3章	离散傅里叶变换 (DFT)	(51)
3.1	周期序列的傅里叶级数 (DFS)	(51)
3.1.1	离散傅里叶级数的获得	(51)
3.1.2	离散傅里叶级数的性质	(53)
3.2	离散傅里叶变换的概念	(56)
3.2.1	离散傅里叶变换的获得	(56)
3.2.2	序列傅里叶变换和离散傅里叶变换与Z变换的关系	(57)
3.3	离散傅里叶变换的性质	(62)
3.3.1	线性特性	(62)
3.3.2	时域循环移位特性	(62)
3.3.3	频域循环移位特性	(63)
3.3.4	时域循环卷积定理	(63)
3.3.5	频域循环卷积定理	(65)
3.3.6	循环相关定理	(65)
3.3.7	频域离散的帕斯卡定理	(66)
3.3.8	离散傅里叶变换的若干对称性	(67)
3.4	循环卷积的应用	(68)
3.4.1	用循环卷积求线性卷积	(68)
3.4.2	长序列的分段循环卷积	(69)

3.5	使用DFT应注意的问题	(72)
3.5.1	怎样避免时域和频域混迭	(72)
3.5.2	怎样减少频谱泄漏	(73)
3.5.3	怎样克服栅栏效应	(73)
第4章	快速傅里叶变换(FFT)	(78)
4.1	按时间抽取的FFT算法	(78)
4.1.1	算法原理	(78)
4.1.2	按时间抽取FFT算法的特点	(85)
4.2	按频率抽取的FFT算法	(87)
4.2.1	算法原理	(87)
4.2.2	时间抽取与频率抽取的比较	(89)
4.2.3	时间抽取和频率抽取的关系以及IDFF运算	(90)
4.3	N为组合数的FFT算法	(91)
4.3.1	算法的一般原理	(91)
4.3.2	算法的运算量估计	(94)
4.4	实序列的FFT算法	(96)
4.4.1	一个N点FFT同时运算两个N点实序列	(96)
4.4.2	一个N点FFT运算一个2N点实序列	(96)
4.5	FFT的典型应用	(97)
4.5.1	用FFT求快速卷积	(98)
4.5.2	用FFT求快速相关	(99)
4.6	线性调频Z变换(CZT)	(99)
4.6.1	基本原理	(99)
4.6.2	CZT的实现方法	(101)
4.6.3	典型应用	(102)
4.7	WFTA算法	(105)
第5章	离散随机信号的功率谱估计	(113)
5.1	离散随机信号的基本概念	(113)
5.1.1	随机信号的基本概念	(113)
5.1.2	平稳各态历经序列的统计平均	(114)
5.1.3	平稳各态历经序列的相关函数与协方差	(115)
5.1.4	平稳各态历经序列的功率谱	(117)
5.2	功率谱估计的基本概念	(118)
5.2.1	功率谱估计的一般概念	(118)
5.2.2	功率谱估计的Z变换表示	(118)
5.2.3	功率谱估计的质量评定	(119)
5.3	相关法功率谱估计	(120)
5.3.1	用DFT快速求 $\hat{r}_x(m)$	(120)
5.3.2	三种求 $\hat{r}_x(m)$ 的乘法次数计算	(124)
5.3.3	估计质量的评定	(125)
5.4	周期图法功率谱估计	(126)
5.4.1	一般的周期图法	(126)

5.4.2	改进的周期图法	(129)
5.5	常用窗函数的频谱	(131)
5.5.1	矩形窗的频谱	(131)
5.5.2	三角窗的频谱	(131)
5.5.3	汉宁窗的频谱	(132)
5.5.4	海明窗的频谱	(132)
5.5.5	布莱克曼窗的频谱	(132)
5.5.6	凯泽窗的频谱	(132)
5.6	参数信号模型分析	(133)
5.6.1	一般参数信号模型	(134)
5.6.2	随机信号通过线性系统	(135)
5.6.3	参数信号模型的功率谱	(137)
5.7	最大熵谱分析	(140)
5.7.1	信息量与最大熵的含义	(140)
5.7.2	自相关函数的最大熵外推	(141)
5.7.3	最大熵谱估计与AR模型等价	(143)
5.8	yule—walker 方程的快速解法	(144)
5.8.1	Levinson—Durbin 递推算法	(144)
5.8.2	Burg 递推算法	(146)
5.8.3	正反向线性预测最小二乘法	(149)
5.8.4	Marple 递推算法	(150)
第6章	数字滤波器的结构	(157)
6.1	数字滤波器的一般概念	(157)
6.2	IIR 数字滤波器的结构	(157)
6.2.1	直接型	(157)
6.2.2	级联型	(159)
6.2.3	并联型	(161)
6.3	FIR 数字滤波器的结构	(162)
6.3.1	直接型	(162)
6.3.2	级联型	(163)
6.3.3	线性相位 FIR 型	(163)
6.3.4	频率采样型	(164)
第7章	IIR 数字滤波器的设计	(171)
7.1	设计数字滤波器的基本思想	(171)
7.2	从 $H(s)$ 转换成 $H(z)$ 的方法	(172)
7.2.1	脉冲响应不变法	(172)
7.2.2	双线性变换法	(174)
7.3	巴特沃兹数字低通滤波器的设计	(177)
7.3.1	幅度平方函数 $ H_I(j\Omega) ^2$ 的获得	(177)
7.3.2	传递函数 $H_I(s)$ 的获得	(178)
7.3.3	巴特沃兹数字低通滤波器设计举例	(180)
7.4	切比雪夫数字低通滤波器的设计	(183)

7.4.1	幅度平方函数 $ H_f(j\Omega) ^2$ 的获得	(183)
7.4.2	传递函数 $H_f(s)$ 的获得	(185)
7.4.3	切比雪夫数字低通滤波器设计举例	(188)
7.5	椭圆数字低通滤波器的设计	(190)
7.5.1	幅度平方函数 $ H_f(j\Omega) ^2$ 的获得	(190)
7.5.2	传递函数 $H_f(s)$ 的获得	(192)
7.5.3	椭圆数字低通滤波器设计举例	(194)
7.6	由数字原型低通向其它数字滤波器转换	(195)
7.6.1	由归一化的模拟原型低通 $H_f(s)$ 设计数字原型低通 $H_f(z)$	(196)
7.6.2	由 $H_f(z)$ 向其它数字滤波器转换	(197)
7.7	IIR 数字滤波器的优化设计	(200)
7.7.1	频域均方误差最小设计	(201)
7.7.2	P误差准则的最小化设计	(204)
7.7.3	时域均方误差最小化设计	(207)
7.8	IIR 数字滤波器的相位均衡	(213)
7.8.1	相位均衡器的系统函数	(213)
7.8.2	均衡器的群延迟特性	(214)
第8章	FIR数字滤波器的设计	(219)
8.1	线性相移FIR数字滤波器的特点	(219)
8.1.1	线性相移FIR数字滤波器的条件	(219)
8.1.2	线性相移FIR数字滤波器的频响	(220)
8.1.3	线性相移FIR数字滤波器的延时特性	(223)
8.1.4	线性相移FIR数字滤波器的零点	(223)
8.2	FIR数字滤波器的窗函数设计法	(225)
8.2.1	窗函数设计法的基本思想	(226)
8.2.2	设计举例	(228)
8.3	FIR数字滤波器的频率采样设计法	(230)
8.3.1	从零频开始采样的设计	(231)
8.3.2	从非零频开始采样的设计	(234)
8.3.3	$H(z)$ 的一般表达式	(235)
8.4	FIR数字滤波器的优化设计	(237)
8.4.1	基本原理	(237)
8.4.2	低通和高通滤波器的设计与实现	(239)
8.4.3	带通和带阻滤波器的设计与实现	(243)
8.4.4	实现流程与实验结果	(245)
8.5	抽取与内插的FIR数字滤波器	(247)
8.5.1	抽取 把原始采样率降低	(247)
8.5.2	内插 把原始采样率升高	(249)
第9章	新型数字滤波器	(253)
9.1	自适应滤波器	(253)
9.1.1	自适应噪声抵消器的传递函数 $W^*(z)$	(253)
9.1.2	用最速下降原理求 $w^*(n)$	(254)

9.1.3	将自适应噪声抵消器作为陷波器用	(256)
9.2	同态滤波器	(259)
9.2.1	乘法信号的同态滤波	(259)
9.2.2	卷积信号的同态滤波	(261)
9.3	中位数滤波器	(262)
9.3.1	中位数滤波器的定义及性质	(263)
9.3.2	MF 对噪声的滤除	(265)
9.3.3	MF 的应用	(266)
第10章	数字滤波器中的有限字长效应	(269)
10.1	定点制数的表示与量化信号通过系统	(269)
10.1.1	定点制数的表示	(269)
10.1.2	量化误差分析	(270)
10.1.3	量化信号通过线性系统后的统计误差	(272)
10.2	在IIR 数字滤波中系数量化对极点、零点位置的影响	(273)
10.2.1	系统的极点对系数量化的敏感度	(273)
10.2.2	用不同的二阶形式实现同一转移函数其敏感度也不同	(276)
10.3	FIR数字滤波中系数量化产生误差的最高限度	(277)
10.4	IIR数字滤波的极限环振荡	(278)
10.5	IIR数字滤波中乘积量化误差的统计分析	(280)
10.6	FIR数字滤波中乘积量化误差的统计分析	(285)

第1章 数字信号处理概述

1.1 从模拟信号处理到数字信号处理

1.1.1 模拟信号处理系统

1.信号: 消息是关于情况的报导, 有价值的消息称为信息, 传递信息的函数叫做信号, 即信号的信息是包含在函数随自变量的变化之中, 例如 $x(t) = A\sin\omega t$ 的信息就包含在 $x(t)$ 随 t 作正弦变化之中。只有一个自变量的信号叫一维信号。模拟信号就是时间连续、幅度也连续的信号。

2.处理: 处理就是变换。信号处理就是把一个信号变换成在某种意义上更符合人们要求的另一个信号。例如由R、L、C、三极管组成的一个电容耦合、变压器输出功率放大器, 就是把输入信号 $x(t)$ 增强 $H_p(f)$ 倍后变换成 $y(t)$ 输出的, 即

$$y(t) = H_p(f)x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (1-1)$$

若 $H_p(f)$ 是截止频率为 f_c 幅度为 A 的矩形频响, 则 $H_p(f)$ 的时域信号 $h(t)$ 就是辛格函数

$$h(t) = Af_c \text{sinc } \pi f_c t \quad (1-2)$$

3.系统: 系统就是把输入变换成输出的装置或运算。例如上面的 $H_p(f)$ 从硬件的角度讲它是由R、L、C、三极管组成的一个装置, 从软件的角度讲它又是对输入信号 $x(t)$ 作乘法运算, 这种输入和输出都是模拟信号的系统叫模拟系统, 它的主要缺点是:

(1) 静态工作点 Q 随温度漂移至使信号产生饱和或截止失真。

(2) 为了能输出更多的低频信号, 耦合电容的 C 值和输出变压器的初级电感 L_m 必须用得很大, 这就扩大了体积, 增加了重量。

由数字电路组成的系统, 始终工作在“0、1”两个极端状态, 静态工作点 Q 与环境温度关系不大, 同时很少使用电容和电感, 这些优点为它的广泛应用创造了条件, 然而一个数字电路的输入和输出都是“0、1”, 因此怎样把输入信号 $x(t)$ 变成“0、1”送给数字电路和怎样把数字电路输出的“0、1”还原成 $y(t)$, 这就是下面要讨论的数字信号处理系统。

1.1.2 数字信号处理系统

1.数字信号: 数字信号是在时间上和幅度上都经过离散、量化后的信号。这里所说的离散, 一般是把模拟信号 $x(t)$ 进行等间隔采样成 $x(nT)$, 这里所说的量化就是对 $x(nT)$ 的幅值四舍五入成 $x(n)$, 它们三者的波形如图1.1所示。

2. 数字信号处理：数字信号处理就是用数字的方法对数字信号进行变换。

3. 数字系统：数字系统就是输入和输出都是数字信号的系统，一个典型的数字信号处理系统如图1·2所示。

A/D变换器有三个功能：第一是把模拟信号 $x(t)$ 进行采样，变成离散信号 $x(nT)$ ；第二是把离散信号 $x(nT)$ 量化成数字信号 $x(n)$ ；第三是把数字信号 $x(n)$ 编成一串二进制码送给数字计算机，若 $x(n)$ 的最大幅值为 V_{pp} ，要使量化间隔为 ΔV_{pp} ，所需A/D变换

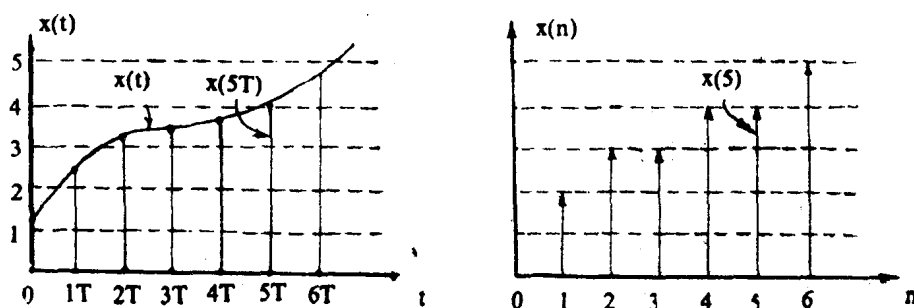


图1·1 模拟信号变数字信号

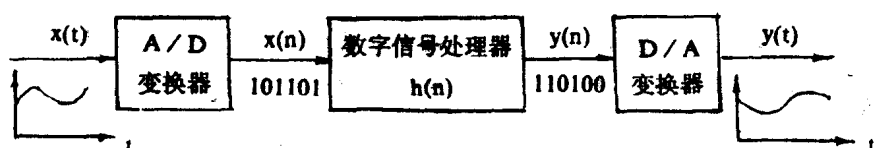


图1·2 数字信号处理系统

器的位数 n 应由下式决定

$$2^n \geq \frac{V_{pp}}{\Delta V_{pp}} \quad (1-3)$$

计算机将获得的二进制码按人们的要求进行变换，以变成另一串二进制码送给D/A变换器。

D/A变换器也有三个功能：第一是把从计算机送来的二进制码译成数字信号 $y(n)$ ；第二是把数字信号 $y(n)$ 保持为具有台阶的模拟信号 $y(t)$ ，第三是把 $y(t)$ 中的台阶进行平滑以获得连续的模拟信号 $y(t)$ 。

A/D变换器和D/A变换器市上都有出售，一般不需我们自制，而数字信号处理器可以是一般的通用计算机，也可以根据需要自制，但不管是通用计算机或是根据需要自制的设备，它们都是由一些典型的数字电路，如加法器、减法器、乘法器、延迟单元组合而成。通用计算机一般用于非实时处理，多由软件来实现。自制设备一般都用于实时处理。

1·2 数字信号处理的优点与应用

1·2·1 数字信号处理的优点

1. 精度高：模拟网络中元件的精度很难达到 10^{-3} 以上，而数字系统17位字长就可达

10^{-6} 精度；模拟脉冲压缩的主、副瓣之比只能做到30dB左右，而数字脉冲压缩在 $\tau = 50\mu\text{s}$ 、压缩比 $D = 20^{10}$ 、A/D变换器用8位时，主、副瓣之比可达40dB，且动态范围可达到60dB；模拟频谱仪的最低频率为10Hz，而数字频谱仪的最低频率为 10^{-3}Hz 。

2.灵活性大：数字系统的性能主要决定于存放在各存储器中的系数，只要人为地改变这些系数，就可以得到不同的系统。这比通过改变模拟系统中的各元件来改变系统特性要容易得多。

3.可靠性强：由于数字系统只有“0、1”这两个电平，它受噪声、环境、温度、电磁感应的影响都比模拟系统小，因而可靠性强。

4.易于大规模集成化：由于数字电路都工作在饱和与截止状态，对电路参数的要求不太严格，这便于大规模集成、大规模生产、成品率高、价格低廉。尤其是在低频电路中，它可以取代大电感、大电容，这对缩小体积、减轻重量都很有好处。

5.可作时分复用：即同一系统可以处理几路独立的信号，对图1·3所示的系统，只要同步控制器能将第②路、第③路、…、第(n)路输入信号依次安排在第一路输入信号的两个采样间隔之间，处理器就可作到先算第①路，再算第②路…，最后将各路的结果一起并行输出。只要处理器的速度快，它能同时处理的信道数也就多。

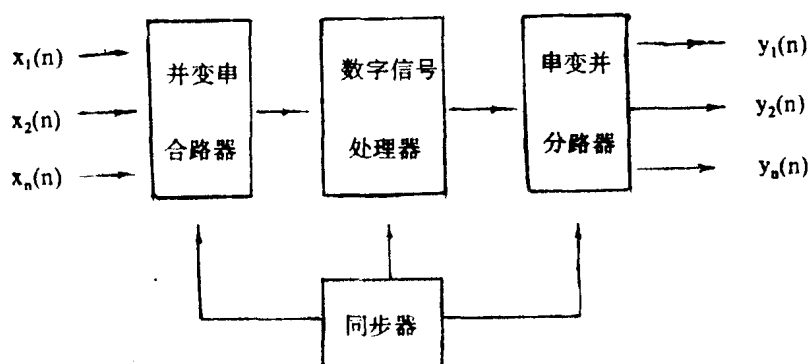


图1·3 时分复用系统

1·2·2 数字信号处理的应用

数字信号处理的主要内容还是信号与系统这两个彼此独立而又相互渗透的分支。

这里所说的“信号”，主要是指对信号作谱分析，例如对确定性信号的谱分析有离散傅里叶变换(DFT)、快速傅里叶变换(FFT)、线性调频Z变换(CZT)、chirp滤波、滑动滤波等；对随机信号的谱分析有自相关法、周期图法、最大熵法、最大似然法、参数信号模型法等。

这里所说的“系统”主要是指滤波器，例如递归型滤波器中的巴特沃兹、切比雪夫、椭圆、频域均方误差最小、时域均方误差最小法设计。非递归型滤波器中的傅里叶级数法、窗函数法、频率采样法、加权的切比雪夫等波纹逼近法设计等。

现在的数字信号处理已广泛应用于数字通信、语言通信、自动控制、生物医学工程、遥感技术、雷达技术、图象处理、图象传输、电子测量、电子仪器、核物理学、地

震学、波谱学、振动学等各个领域。可以预料，凡是需要作信号处理与信号控制的一切领域，都将向数字信号处理求援，并一定会得到满意的结果。

1.3 数字信号处理的预备知识

1.3.1 $\delta(t)$ 与信号 $x(t)$ 的相乘和相卷

1. $\delta(t)$ 函数的定义： $\delta(t)$ 函数可由如图1.4所示的宽度为 τ ，幅度为 $1/\tau$ 的矩形脉冲演变而来。因为当 $\tau \rightarrow 0$ 时有 $1/\tau \rightarrow \infty$ ，所以可定义

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \delta(t \pm t_0) = \begin{cases} \infty & t \pm t_0 = 0 \\ 0 & t \pm t_0 \neq 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

又由于宽度 τ 乘以幅度 $1/\tau$ 的面积恒等于1，所以还可定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \pm t_0) dt = 1 \quad (1-5)$$

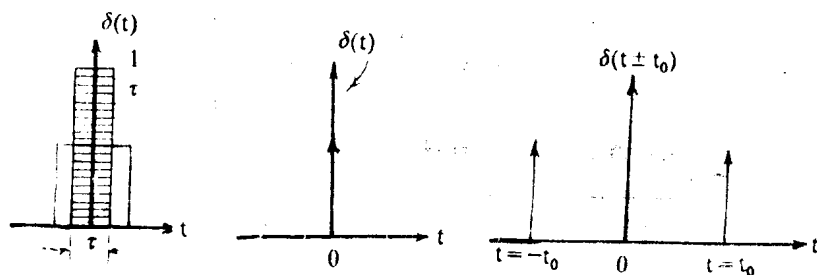


图1.4 $\delta(t)$ 的演变

2. $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 的相乘和相卷：按 $\delta(t)$ 的前一种定义，由于 $\delta(t)$ 只在 $t = 0$ 处不为零，因此 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 相乘也只在 $t = 0$ 处不为零，也就是说相乘只有相交部分才有值，即 $\delta(t)$ 与信号相乘具有采样性，如图1.5(a)所示。

$$x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t-nT) \quad (1-6)$$

按 $\delta(t)$ 的后一种定义又有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \quad (1-7)$$

由此可见 $x(t)$ 与 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 相乘的结果就是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 对 $x(t)$ 进行采样。采样间隔

为 T ，采样频率为 $f_s = 1/T$ 。采样角频率为 $\Omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$ 。

至于 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 相卷，只要写出卷积公式，就可直接利用 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 相乘的关系得

到 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 相卷的结果就是原始信号 $x(t)$ 。即

$$\begin{aligned} x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-nT-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) \end{aligned} \quad (1-8)$$

由此可见 $x(t)$ 与 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 相卷的结果就是 $x(t)$ 的多次重复。重复周期就是 T 。

即 $\delta(t)$ 与信号相卷具有复原性，如图1·5(b)所示。

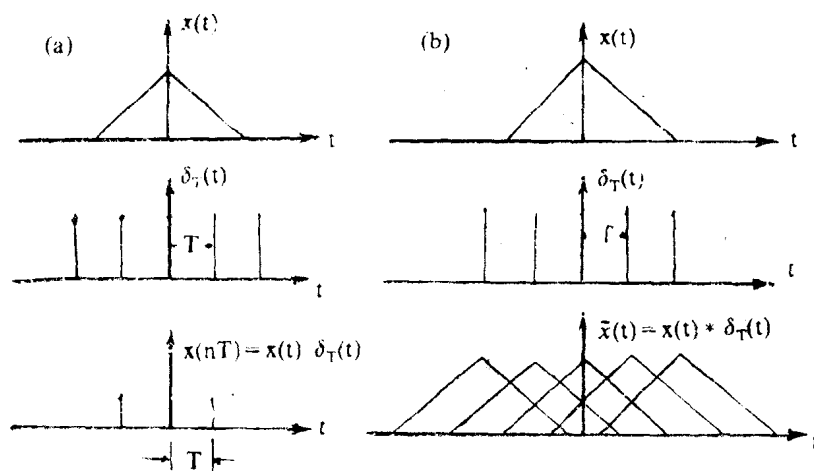


图1·5 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 的相乘和相卷

1.3.2 模拟信号的傅氏级数和傅氏变换

1. 周期信号的傅里叶级数(FS)

如果一周期信号 $x(t) = x(t+nT_1)$ ，满足狄义赫利条件，则可把它展成傅里叶级数，即

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_1) e^{jk\Omega_1 t} \quad (1-9)$$

此式表明， $x(t)$ 可分解成直流、基波和若干谐波成分。其中的

$$X(jk\Omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt \quad (1-10)$$

为傅里叶级数的系数，通常称 $X(jk\Omega_1)$ 为周期信号的离散频谱，它表示各单个复简谐波的复振幅。

$\Omega_1 = 2\pi/T_1$ ——为 $x(t)$ 的基波角频率，单位是弧度/秒

$f_1 = 1/T_1$ ——为 $x(t)$ 的基波频率，单位是赫兹 (1-11)

例1.1 试求图1.6(a)所示一周期信号 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 的离散频谱 $\delta_T(jk\Omega_s)$

解:
$$\delta_T(jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-jk\Omega_s t} dt$$

因在 $|t| \geq T/2$ 的积分区间内只有一个冲激 $\delta(t)$ ，其它的 $\delta(t-nT)$ 都在积分区间之外所以

$$\delta_T(jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\Omega_s \cdot 0} = \frac{1}{T} \quad (1-12)$$

此式表明 $\delta_T(t)$ 的离散频谱 $\delta_T(jk\Omega_s)$ 对任何谐波都具有相同的幅度 $1/T$ 如图1.6(b)，同时有

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_s) e^{jk\Omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} \quad (1-13)$$

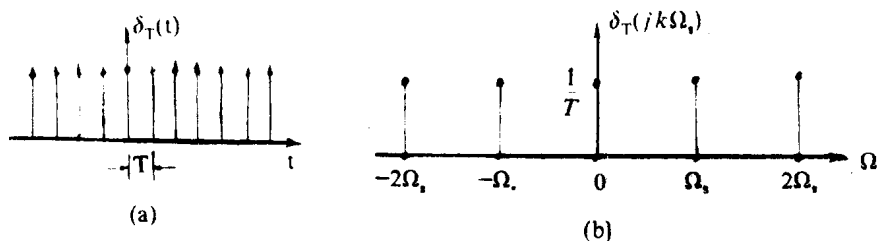


图1.6 周期性采样信号的傅里叶级数——离散谱

2. 非周期信号的傅里叶变换(FT)

如果一非周期信号绝对可积，则可以把它表示成

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf) e^{j2\pi f t} df \\ (1-14) \end{array} \right.$$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ (1-15) \end{array} \right.$$

$X(j\Omega)$ 为傅里叶变换的系数，通常称 $X(j\Omega)$ 为非周期信号的连续频谱，它表示单位频带内所有复简谐波的复振幅。其中

$$\Omega = 2\pi f$$

Ω 为模拟角频率，单位是弧度/秒， f 为模拟频率，单位是赫兹。

例1.2 试求图1.7所示 $\delta(t)$ 的傅里叶变换， $\delta(j\Omega)$ 的傅里叶反变换，1的傅里叶变换。

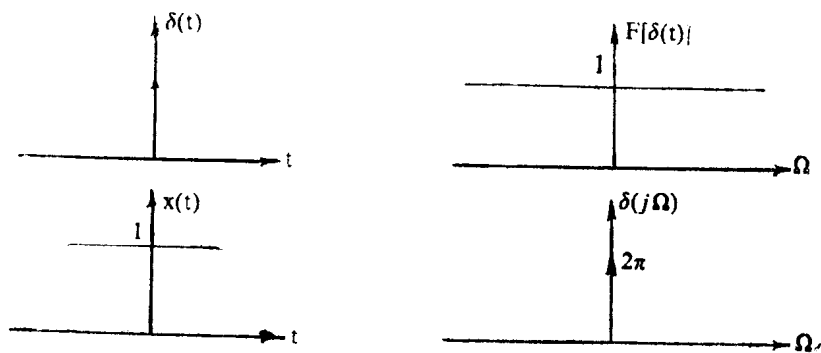


图1.7 $\delta(t)$ 与 $\delta(j\Omega)$ 间的对应关系

解: $F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega \cdot 0} = 1$ ，即任何频率分量的幅度都相等，表示 $\delta(t)$ 对不同频段的收音机都有干扰。

$$F^{-1}[\delta(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} e^{j0t} = \frac{1}{2\pi}$$

若两端同乘以 2π 就有

$$2\pi F^{-1}[\delta(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = e^{j0t} = 1$$

$$F[1] = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\Omega t} dt = 2\pi \delta(j\Omega)$$

$$\therefore \delta(t) \longleftrightarrow 1, \quad \delta(j\Omega) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}, \quad 1 \longleftrightarrow 2\pi \delta(j\Omega) \quad (1-17)$$

例1.3 试求 $\delta_T(t)$ 的 $\delta_T(j\Omega)$

解:

$$\begin{aligned} \delta_T(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j(\Omega - k\Omega_s)t} dt \end{aligned}$$