高等纺织院校教材

概率论与数理统计学

纺织工业出版社

高等纺织院校教材

概率论与数理统计学

安瑞凤　主编

严灏景　主审

纺织工业出版社

内 容 提 要

全书分概率与数理统计两个部分，概率部分提供了必要的基础理论知识，并结合纺织工程专业的特点，对纺织工程中的一些有关理论问题，如并合原理、混合体方差相加定理（或内外不匀问题）、纱条的极限不匀率公式、检验本色棉布布面上疵点粒数的疵点格率的公式等，做了比较严密的论证和推导。数理统计部分，结合纺织实例，介绍了常用的数理统计方法，包括数据整理、参数估计、假设检验、方差分析和实验设计、回归分析等。

本书可作高等纺织院校的教材，也可供纺织工程技术人员参考。

责任编辑：郑剑秋

高等纺织院校教材

概率论与数理统计学

安瑞凤 主编

严灏景 主审

纺织工业出版社出版

（北京东长安街12号）

河北省供销合作联合社保定印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米 1/32 印张：11 4/32 字数：286千字

1986年1月 第一版第一次印刷

印数：1—8,000 定价：~~2.75~~元 2.20

统一书号：15041·1410

前　言

本书是根据1981年制订的纺织高等院校纺织工程专业用“概率论与数理统计”教学大纲编写的，可作为高等纺织院校的教材，也可供纺织工程技术人员参考。

全书分概率与统计两个部分，概率部分（第一、二、三、四、六章）是课程的基础部分，为读者提供必要的基础理论知识。为了反映纺织工程专业的特色，对纺织工程中的一些有关理论问题，如并合原理、混合体方差相加定理（或内外不匀问题）、纱条的极限不匀率公式（J.G.马丁台尔公式）、检验本色棉布布面上疵点粒数的疵点格率的公式等，做了比较严密的论证和推导。数理统计部分（第五、七、八、九、十章），结合纺织实例，介绍了常用的数理统计方法，包括数据整理、参数估计、假设检验、方差分析与正交设计、回归分析等。

本书由天津纺织工学院安瑞凤主编，由华东纺织工学院严灏景主审。参加编写工作和提供初稿的有华东纺织工学院潘维栋（第七、八章），天津纺织工学院罗俊晃（第二、三、四章）、张显（第六、九章），西北纺织工学院党景柏（第一、十章）、大连轻工业学院徐文著（第五章的修改工作）。山东纺织工学院张连房对教材初稿提出了修改意见。

由于我们水平有限，书中一定存在着不少缺点和错误，希望批评指正。

编　者

目　录

第一章　概率及其运算法则……………………………（1）
第一节　随机事件与概率空间…………………………（1）
一、随机试验及有关概念……………………………（1）
二、事件间的关系……………………………………（3）
第二节　概率的定义……………………………………（7）
一、古典概率…………………………………………（8）
二、频率与概率………………………………………（11）
三、几何概率…………………………………………（13）
四、概率的性质及加法公式…………………………（15）
第三节　条件概率及乘法公式…………………………（17）
一、条件概率…………………………………………（17）
二、概率的乘法公式…………………………………（19）
三、事件的独立性……………………………………（20）
第四节　全概率公式和贝叶斯公式……………………（22）
一、全概率公式………………………………………（23）
二、贝叶斯（Bayes）公式…………………………（25）
习题　……………………………………………………（27）
第二章　随机变量及其概率分布………………………（29）
第一节　随机变量及分布函数…………………………（29）
一、随机变量的概念…………………………………（29）
二、离散型随机变量及其分布列……………………（31）
三、分布函数…………………………………………（33）
四、连续型随机变量及概率密度……………………（37）
第二节　多维随机变量及其分布函数…………………（40）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一、二维随机变量的分布函数…………………………（41）
二、边缘分布……………………………………………（46）
三、随机变量的独立性…………………………………（51）
第三节　随机变量函数的分布…………………………（54）
一、线性函数的分布……………………………………（54）
二、一般随机变量函数的分布…………………………（56）
三、离散型随机变量函数的分布………………………（58）
习题……………………………………………………（60）
第三章　随机变量的特征数……………………………（64）
第一节　随机变量的数学期望…………………………（65）
一、数学期望的概念……………………………………（65）
二、数学期望的性质……………………………………（69）
第二节　随机变量的方差………………………………（71）
一、方差的定义…………………………………………（71）
二、方差的性质…………………………………………（74）
第三节　其它特征数……………………………………（76）
一、矩及偏度、峰度……………………………………（76）
二、矩母函数……………………………………………（79）
三、二维随机变量的协方差与相关系数………………（82）
第四节　应用举例………………………………………（86）
一、并合原理……………………………………………（86）
二、总体方差相加定理…………………………………（87）
习题……………………………………………………（89）
第四章　三个重要分布及大数定律……………………（93）
第一节　二项分布及其特征数…………………………（93）
一、二项分布的定义……………………………………（93）
二、二项分布的特征数…………………………………（96）
第二节　泊松（Poisson）分布及其特征数…………（99）
一、泊松分布的背景和分布列…………………………（99）

二、泊松分布的特征数……………………………………（103）
三、二项分布与泊松分布在纺织上的应用………（105）
第三节 正态分布及其特征数……………………………（110）
一、正态分布的概念……………………………………（110）
二、标准正态分布………………………………………（116）
三、正态分布的特征数…………………………………（119）
第四节 大数定律和中心极限定理……………………（122）
一、大数定律……………………………………………（123）
二、中心极限定理………………………………………（125）
习题 ………………………………………………………（127）
第五章 频率分布及其特征数……………………………（130）
第一节 频率分布…………………………………………（130）
一、频率分布表与频率分布图…………………………（131）
二、分组列表与频率密度矩形图………………………（132）
第二节 频率分布的特征数………………………………（135）
一、算术平均数 $\overline{x}$ ……………………………………（135）
二、众数 x_0 ……………………………………………（138）
三、中位数 x_e …………………………………………（141）
四、平均差 d 与不匀率 H………………………………（142）
五、标准差 s_x^* 与变异系数 CV…………………………（144）
六、极差 R 与极差不匀率………………………………（146）
习题 ………………………………………………………（146）
第六章 样本及其分布 …………………………………（148）
第一节 样本及统计量……………………………………（148）
一、总体与样本…………………………………………（148）
二、样本特征数与统计量………………………………（150）
第二节 几个常用统计量的分布…………………………（157）
一、χ^2 分布……………………………………………（157）
二、t 分布 ………………………………………………（159）

三、F 分布…………………………………………………（162）
习题 ……………………………………………………（165）
第七章 参数估计…………………………………………（167）
第一节 点估计…………………………………………（167）
一、估计量与估计值……………………………………（167）
二、点估计的矩法………………………………………（168）
第二节 估计量的性质……………………………………（170）
一、无偏性………………………………………………（170）
二、有效性………………………………………………（172）
三、一致性………………………………………………（172）
第三节 参数的区间估计…………………………………（173）
一、正态总体均值的区间估计…………………………（174）
二、正态总体方差的区间估计…………………………（175）
习题 ……………………………………………………（176）
第八章 统计假设检验……………………………………（178）
第一节 统计假设检验的基本问题………………………（178）
一、问题的提出…………………………………………（178）
二、解决问题的基本方法………………………………（179）
第二节 统计结论的两类错误……………………………（182）
一、两类错误的概念……………………………………（182）
二、两类错误的控制……………………………………（183）
第三节 u 检验……………………………………………（187）
一、单总体的均值检验…………………………………（187）
二、双总体的均值检验…………………………………（188）
三、几点说明……………………………………………（190）
第四节 t 检验……………………………………………（190）
一、单总体的均值检验…………………………………（190）
二、双总体的均值检验…………………………………（191）
第五节 F 检验……………………………………………（192）

一、两个正态总体的方差相等的检验……………… (192)
二、单总体方差的检验……………………………… (194)
第六节 χ^2检验………………………………… (195)
一、问题的提法与解法……………………………… (195)
二、离散型随机变量的χ^2检验…………………… (196)
三、连续型随机变量的χ^2检验…………………… (198)
第七节 秩和检验………………………………… (200)
习题 ……………………………………………… (203)
第九章 方差分析与正交设计………………………… (206)
第一节 单因子方差分析…………………………… (206)
一、问题的提出……………………………………… (206)
二、单因子试验的一般形式………………………… (207)
三、两种误差及离差平方和分解公式……………… (208)
四、离差平方和的自由度…………………………… (210)
五、单因子方差分析的线性模型…………………… (211)
六、显著性检验……………………………………… (212)
七、参数估计与最优工艺的选取…………………… (213)
第二节 双因子方差分析…………………………… (215)
一、问题的提出……………………………………… (215)
二、双因子试验的一般形式………………………… (216)
三、离差平方和的分解及交互作用………………… (217)
四、线性模型………………………………………… (220)
五、显著性检验……………………………………… (222)
六、参数估计与最优工艺的选取…………………… (223)
七、例题分析………………………………………… (224)
第三节 多因子试验与正交设计…………………… (228)
一、完全因子试验与部分实施……………………… (228)
二、正交表…………………………………………… (230)
第四节 二水平正交表的方差分析………………… (237)

第五节　三水平正交表的方差分析……………………（243）
第六节　重复试验……………………………………（252）
习题　…………………………………………………（258）
第十章　回归分析……………………………………（263）
第一节　一元线性回归分析…………………………（264）
一、直线回归方程……………………………………（266）
二、直线相关系数……………………………………（269）
第二节　一元非线性回归……………………………（277）
一、曲线化直…………………………………………（277）
二、二次抛物线………………………………………（282）
第三节　多元线性回归分析…………………………（285）
一、回归方程…………………………………………（285）
二、复相关系数………………………………………（287）
三、偏回归平方和的显著性检验……………………（292）
习题……………………………………………………（295）
附录……………………………………………………（298）
一、Γ函数与Γ分布　………………………………（298）
（一）Γ函数的定义与性质…………………………（298）
（二）Γ分布的定义与性质…………………………（300）
二、χ^2分布、t分布及F分布的密度函数的推导………（301）
（一）二维随机变量的函数的分布　………………（301）
（二）χ^2分布的密度函数　………………………（302）
（三）t分布的密度函数　……………………………（303）
（四）F分布的密度函数……………………………（306）
附表……………………………………………………（309）
一、泊松分布的分布列表……………………………（309）
二、泊松分布表………………………………………（311）
三、正态分布的密度函数表…………………………（313）
四、正态分布表………………………………………（314）

五、正态分布的上侧分位数u_α表…………………………（316）
六、t分布的上侧分位数$t_\alpha(f)$表…………………………（317）
七、χ^2分布的上侧分位数$\chi_\alpha^2(f)$表…………………………（318）
八、F分布的上侧分位数$F_\alpha(f_1, f_2)$表…………………………（320）
九、两总体秩和检验临界值($T_{1,\alpha}$　$T_{2,\alpha}$)表…………（332）
一〇、常用正交表…………………………………………（333）
一一、相关系数检验临界值表…………………………（342）
主要参考文献……………………………………………（344）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　概率及其运算法则

第一节　随机事件与概率空间

一、随机试验及有关概念

（一）随机试验与随机事件

在自然界里，在生产实践和科学试验中，存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象。在一定条件下必然发生的现象，称为确定性现象或必然现象。如在一个大气压力下，水加热到100℃时会沸腾；羊毛在5％的苛性钠溶液中煮沸时会溶解等等。此外，还存在着另一类现象，在一定条件下，现象可能发生，也可能不发生，这类现象，称为随机现象或偶然现象。如将一枚硬币抛掷一次，可能正面（国徽面）向上，或反面（币值面）向上；某电话总机一分钟内接到的呼唤次数，可能为0，1，2，…，。在纺织生产和试验中，随机现象是很多的，如在长度为l的棉纱段上，可能出现的棉结杂质粒数为0，1，2，…，；10块棉纱黑板的条干均匀度，评为一级板的块数可能为0，1，2，…，10；此外还有如织布车间的布机台时断头数，细纱车间的千锭时断头数等。

在概率统计中，把对随机现象进行的观测，叫做随机试验，简称试验。用E表示。例如抛掷硬币观察正反面向上的情况；记录某电话总机一分钟内接到的呼唤次数；检验长度为l的棉纱段上的棉结杂质粒数；检验棉纱黑板的条干均匀度；检验纤维、纱线和织物的强力等等，都是随机试验。其特点是：试验可以在相同条件下重复进行，每次实验的可能结果不只一种，而且在试验前只知其可能结果，而不能确切预知哪种结果会发生。在纺织材料试验中，对纤维、纱线和织物的物理机械性能指标和外观疵点

的检验，都是随机试验。

随机试验的一种可能结果，叫做一个随机事件，简称事件，以A，B，C，…，表示。如抛一枚硬币时正面向上为事件A；一克重的某号棉纱上的棉结杂质粒数不多于125粒为事件B；10块棉纱黑板的条干均匀度评为一级的块数不低于7为事件C等。在随机试验中，必然发生的事件，叫做必然事件，以Ω表示；不可能发生的事件，叫做不可能事件，以φ表示。必然事件和不可能事件都不是随机事件，它们的发生与否，没有不确定性，但是为了便于讨论，也把它们看作是特殊的随机事件。事件的概念，是概率论中最原始的基本概念。

（二）基本事件与概率空间

我们把在一定范围内不能再分解的简单事件，叫做基本事件；把由若干个基本事件组成的事件，叫做复合事件。比如，在长度为l的棉纱上的棉结粒数可能为0，1，2，…，n，共有n＋1种不同结果，每种结果都是一个基本事件。而在这段棉纱上的棉结粒数不多于5，也是一个事件，但它是一个由棉结粒数为0，1，2，3，4，5等6个基本事件组成的复合事件。

为了便于对随机试验进行研究，我们把随机试验E的所有基本事件（或元素）组成的集合，叫做E的样本空间，记为Ω。样本空间作为一个事件，是必然事件，每次试验必出现且仅出现全部基本事件之一。把样本空间里的每一个元素（基本事件），叫做样本点。

例1-1 写出下列试验E_k（$k=1, 2$）的样本空间：

（1）抛一枚硬币两次，观察正、反面出现的可能结果。

（2）10块棉纱黑板的条干均匀度，可能评为一级板的块数。

解

（1）Ω_1＝{（正、正），（正、反），（反、正），（反、反）}

（2）$\Omega_2=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$

例1-2 设口袋中有四只球，分别编号为1，2，3，4，其

中1、2号为红球，3、4号为白球。用无放回抽样方法，每次从中抽出一只球，抽取两次。

（1）写出随机试验的样本空间；

（2）写出下列事件所含的样本点：

A＝{第一次抽到红球}

B＝{两次都抽到白球}

解

（1）因为第一次如果抽到1号球，第二次可能抽到2或3或4号球；第一次如果抽到第2号球，第二次可能抽到1或3或4号球；如此考虑下去，两次无放回抽取试验的样本空间为

$$\Omega=\left\{\begin{array}{lll}(1,2), & (1,3), & (1,4) \\ (2,1), & (2,3), & (2,4) \\ (3,1), & (3,2), & (3,4) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3)\end{array}\right\}$$

（2）　A＝{第一次抽到红球}

＝{第一次抽到1或2号球}

$$=\left\{\begin{array}{lll}(1,2), & (1,3), & (1,4) \\ (2,1), & (2,3), & (2,4)\end{array}\right\}$$

B＝{两次都抽到白球}

$=\{(3,4),(4,3)\}$

二、事件间的关系

事件有简单得不能再分解的基本事件，也有比较复杂的由若干基本事件组成的复合事件。为了进一步研究事件的统计规律，需要引进事件间的相互关系和事件的运算。常遇到的有以下几种。

（一）包含与相等

若事件A发生必导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记为$B\supset A$或$A\subset B$。

设A＝{10块棉纱黑板中有8或9块板评为一级}

B＝{10块棉纱黑板中评为一级的块数不低于7}

显然，A发生必导致B发生，即$A\subset B$。

从所包含的基本事件分析：

若A_i＝{10块棉纱黑板中有i块被评为一级}（i＝0，1，2，…，10）则$A=\{A_8, A_9\}$；$B=\{A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$

可见，$A\subset B$，即A所包含的基本事件，是B所包含的基本事件的一部分，这可用图1-1来说明。图中矩形表示样本空间Ω，矩形内每一个点表示一个样本点。圆A与圆B分别表示事件A和事件B。这里，事件B包含事件A。

如果$A\supset B$和$B\supset A$同时成立，则称事件A与B相等，记为$A=B$。

（二）事件的和

“事件A与事件B中至少有一个发生”所表达的事件C，称为事件A与B的和或并。记为$C=A\cup B$或$C=A+B$。

设　A＝{5≤10块棉纱黑板中评为一级的块数≤7}

　　B＝{6≤10块棉纱黑板中评为一级的块数≤9}

则　$C=A\cup B$

　　＝{5≤10块棉纱黑板中评为一级板的块数≤9}

从所包含的基本事件分析：

$A=\{A_5, A_6, A_7\}$

$B=\{A_6, A_7, A_8, A_9\}$

$C=\{A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}=A\cup B$

可见，$A\cup B$所包含的基本事件，是A和B所包含的基本事件的全部，重复的只算一次，这种事件之间的关系，可用图1-2表示。

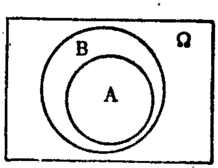


图1-1　$B\supset A$

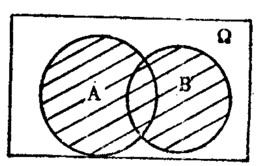


图1-2　$A\cup B$

图中矩形表示样本空间Ω，圆A和圆B分别表示事件A和事件B，图中阴影部分即表示事件A和事件B的和。

对于事件的和可推广到有限多个事件和可列无穷多个事件的情况，分别记为

$$C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i \quad 及 \quad C=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

（三）事件的积

“事件A与B同时发生”这一事件D，叫做事件A与B的积，记为$D=A\cap B$或$D=A\cdot B$。

设　A＝{10块棉纱黑板中评为一级板的块数最多为8}

　　B＝{10块棉纱黑板中评为一级板的块数至少为7}

则　$D=A\cap B$＝{7块或8块}

从包含的基本事件分析：

$$A=\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8\}$$

$$B=\{A_7,\ A_8,\ A_9,\ A_{10}\}$$

则　$D=\{A_7,\ A_8\}=A\cap B$

因此，$A\cap B$所包含的基本事件，是事件A与B共同含有的基本事件。事件间的这种关系，可用图1-3表示。图中的阴影部分，即为事件A与B的积。

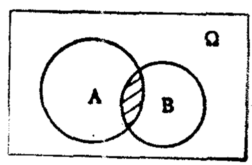


图1-3　$A\cap B$

事件积的定义可推广到有限多个事件和可列个事件，分别记为

$$D=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \quad 或 \quad D=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

（四）事件的差

在一次试验中，“事件A发生而事件B不发生”所表述的事件C，称为事件A与B的差，记为$C=A-B$。

设　A＝{10块棉纱黑板中评为一级板的块数最多为8}

　　B＝{10块棉纱黑板中评为一级板的块数最少为7}

则　$C=A-B=\{$10块棉纱黑板中评为一级板的块数最多为6$\}$

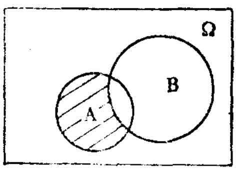
从所包含的基本事件分析：

$A=\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

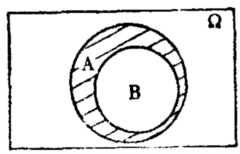
$B=\{A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$

$C=A-B=\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

因此，$A-B$所包含的基本事件，是从事件A所包含的基本事件中，去掉$A\cap B$所包含的基本事件后剩下的那一部分基本事件。事件间的这种关系可用图1-4表示，图中的阴影部分，即为$C=A-B$，其中(b)为包含差。



(a) A不含B情形



(b) A包含B情形

图1-4　A－B

（五）互斥事件及对立事件

在一次试验中若事件A与B不能同时发生，即$A\cap B=\phi$，则称事件A与B互斥或互不相容。

设　$A=\{$10块棉纱黑板中评为一级板的块数至少为7$\}$

　　$B=\{$10块棉纱黑板中评为一级板的块数最多为6$\}$

则在一次试验中A与B不能同时发生，即A与B互斥。

从所包含的基本事件分析，事件A与B互斥，就是指事件A与B不存在共同的基本事件，如图1-5所示。

两事件互斥的概念，可推广到有限多个和可列个事件。

若事件A与B同时满足$A\cap B=\phi$和$A\cup B=\Omega$，则称A与B互为对立事件，又称事件A与B互逆。事件A的对立事件记为$\overline{A}$（这里$\overline{A}=B$）。

由随机试验所决定的样本空间，如果只包含有两个基本事件

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com