大學及研究所用書

流體因次分析及張量分析

荀淵博編著

世界書局印行

大學及研究所用書

流體因次分析及張量分析

苟淵博編著

世界書局印行

中華民國六十四年九月再版

大學及研究所用書 流體因次分析及張量分析

（全一冊）平裝本 基本定價 壹圓壹角陸分整

編著者 苟淵博

出版者 世界書局

地址：臺北市重慶南路一段九十九號

電話：三一一〇一八三

本局登記證字號：行政院新聞局局版臺業字第〇九三一號

發行人 吳開先

印刷者 世界書局

序

因次分析 (Dimensional Analysis) 及張量分析 (Tensor Analysis),在美國已列為理工研究院必修課程。本書共分作兩篇,第一篇為流體因次分析,第二篇為流體張量分析,分別摘論此兩種分析學術,對於研究現代流體力學之重要性。

因次分析,是現代物理與工程研究工作中很重要的工具。其方法之本身是一種數學的程序,可以將某一個現象有關的因數,配合物理分析,組合成最適當的無因次函數方程式,確定出欲作進一步實驗或分析工作的正確途徑。因次分析不僅將因數歸納,使整個的研究工作,納入科學步驟處理之,同時亦將各因數間的作用關係,作最有效而完整的顯示出來。更因此使所形成的無因次函數式,不再受各因數單獨的影響,因可適合更廣泛的條件。因為這種無因次關係不受尺度的影響,如是所成立的無因次函數式,便可以做為模型的相似律;模型中實驗結果所顯示的無因次函數關係,便可以代表原體的情形。

流體研究,是現代科學研究中最重要之一項,包括氣體與液體或兩者組成的一切現象。因兩者的運動情形,以及其本身的性質盡有相同之處,所差僅在其程度而已,因此在運動上的情形,也往往可以用同一學理解析之。惟在本世紀以前,有時偏重於數學處理方法,其中包括許多的假定,以致不能適應實際的問題;另外一面,人們也從實驗中決定了一些有條件限制的經驗公式,而缺乏數學及物理的基礎,以致不能廣泛的實用。然而,近數十年來,人們已經能夠有效的控制在流體中(如海洋,大氣中)高速的射體,以及控制凡屬流體的問題包括化工、氣象、潮波、及水利工程的某些問題,這正是因為吾人在流體理論上,及研究或實驗的方法上,有了長足的進步。因次分析,乃是這一新興流體力學及流體實驗科學的重要工具。它不僅歸納了因數,確定了函數的最佳式,同時更重要的確定了實驗工作所依據的相似律,藉以改善了實驗的效率,提高了實驗的技術。因之,不論在流體的學術以及實用的工程問題上,使工程

師們有了正確的遵循。因次分析，是人們對流體問題由早期的模索時期，步入新近流體力學的一個橋樑。故其內容及實用價值，在我國學界及工程界極應推重。

可惜的是有關因次分析的外文書刊極少，又多零散不易收集作統盤的研讀，同時所有的刊物中多默守極其繁雜的巴慶汗項法，(即所謂 π-Theorem)，而事實上這不過是一種約估的方法，在應用上未必全然有效。又一般書刊中，更缺乏對應用上的分析，以致用者，特別是實驗人員，必須對於有關的學課理論有了徹底的認識，才能用因次分析的方法去處理一般問題。作者有鑑於此，爰就前在美國愛阿華大學(State Univ. of Iowa)從事流體研究工作數年之心得，參閱有關書刊，將前所發表之「因次分析在現代流體實驗科學中之重要」，加以補充整理成本篇。內容主要包含三個特點：一、先由早期經驗水力學及理論水力學，發展至近代流體力學之沿變與關係論起，藉以使讀者對因次分析之緣起，與其與近代流體力學內容之關係有所認識，進而說明因次分析對流體實驗的重要性。二、羅致一切有關因次分析的方法，舉例說明其內容步驟，並加以比較，俾使讀者在應用上視問題之需要有所選擇，其中更介紹簡易之因次換制法，在應用上可省除計算 π 組數 $n-r$、又解因次指數方程式、或選擇複現因數等步驟，因而十分簡便實用。三、最後說明用因次分析處理流體問題應行注意的幾點，包括因數的選擇、對組合亦有的注意、如何配合物理分析法去分析流體問題，以及因次分析範圍等。這樣將關於因次分析的演進、方法、及應用作了一次綜合性的專題說明，可使初入實驗者，對其工作有所正確的認識，免除其對實驗內容覺有深奧不得其門而入之感。再者，倘在修習流體力學之前，能先閱讀本篇內容，則亦可增進其對流體力學內容之瞭解，以及對作研究或實驗工作的興趣。另外更期望貢獻給工程界，作爲研究分析工程問題時之參考。

本書雖關乎到流體，而就實際的需要，乃偏重於水理的研究及實驗方面。凡其他類似書刊中易找到之資料，如液體性質之物理公式，及一般的模型原體換算公式等，均不列入，因可多偏重於觀念

的說明。

流體實驗科學賴用因次分析另外，對於實際流體之理論硏討，如層流剪應力及壓應力，流場分類，Navier-stokes 微分方程，亂流剪應力，亂流相關及能譜等，需用張量分析學。本書第二篇，係根據 Prandtl 觀念，先由流體基本運動之方式，解釋純量 (Scalar)、向量、疊量及流場張量之性質。進而說明 Divergence 及 curl，與流體基本運動方式之關係，以及用 div 及 curl 代替流場張量，鑑別流場之法則，確定能否將一流場問題，化作由含有純量勢 (Scalar potential) 之拉氏微分方程 (Laplace differential equation) 直接解題。末章，摘記卡氏標系基本張量運算定則，供爲分析流體層流及亂流之用。

張量分析與因次分析，顯然的具有數學上矩陣性質之關係，讀者當可有此瞭解，或請參閱 S. F. Borge 著 Matrix-Tensor in Continuum Mechanics 一書，Van Nostrand 1966年出版，其中就 Tensor analysis as related to dimensional analysis 著敍甚詳，本書不再就此贅述。

本書綜合作者前在中國文化學院硏究所，及中原理工學院，教授高等流體力學及中等流體力學數年之教材，並集美英德法諸國名著數十種，取長捨短，參以自己素日硏究心得及實驗分析結果，分作十一章寫成。對於一般大學理工同學，參用本書學習流體力學及張量分析，可增進其學習興趣及瞭解。全書內容，可供硏究所一學期二學分授課之用。赴國外習水利、河海、農工、工程科學、機械、造船、航空及物理等科，本書更可供爲深造之參考。惟內容難免遺漏之處，尙祈海內外先進指正，俾資修訂。

作者承蒙美國愛阿華大學羅斯教授 (Prof. H. Rouse) 及麥康紐教授 (Prof. Matilde Macagno) 教導與鼓勵，並准予轉載有關資料。又承美國敏尼蘇達大學宋杰祥教授，肯薩斯大學余芸生教授，及現於科羅拉多大學硏究之林君醒之，猶他大學之魏君祺園，維琴尼亞大學之張君 共山田納西工業大學蕭君 傑夫等費神惠閱，或提供寶貴意見，謹致謝意。本書蒙世界書局鼓勵出版，馬治平先

Hut 49/08

生協繪各圖，一併誌謝。

中華民國五十七年六月

荀 淵 博 謹識

DIMENSIONAL AND TENSOR ANALYSIS
IN
MODERN FLUID RESEARCH

by

Yuan-po Kou

Formerly Research Associate
Institute of Hydraulic Research
State University of Iowa
Iowa City, Iowa

THE WORLD BOOK CO., LTD

Taipei, Taiwan,
China
1968

目　　錄

第一篇　流體因次分析

第一章　因次觀念

第二章　流體物性與標準無因次式

第三章　因次分析之理論

第四章　因次分析之方法

第五章　因次分析實用例

第六章 應用上應注意事項

第七章 模型相似律

第二篇 流體張量分析

第八章 向量場

第九章 流場、張量、Div 及 Curl

第十章 向量場之鑑別

第一篇 流體因次分析

第一章 因次觀念

一、因次與單位

力學上常見的"Dimension"一字，有雙重意義。其一是表示物體的尺度或大小；其二爲各種單位（Units）的因次。各國慣用的單位雖不一致，而皆屬於一定的因次。如表示尺度可以用呎、公尺、尺等單位，其因次則皆爲"L"。

各種自然現象之發生，基本上是從物質、空間及時間之變化而成。就流體力學言，不計熱、電及光的影響，其一切的現象及變化，足可用四種基本單位之因次，單獨或組合說明之，卽長度（L）、質量（M）、時間（T）、及力量（F）。對於每一基本因次，各國所慣用的單位多不統一。如美國對於因次L用呎爲單位，T用秒爲單位，M用斯辣(Slug)，及F用磅爲單位。英制中，因次L及T，同美制用呎及秒爲單位，而M用磅，F用磅達爲單位。公制中除T同美英制之單位用秒外，L用公分，M用克，F用達因等單位；爲方便計，有時亦以公尺及公斤爲常用之單位。

以上長度、質量、時間、及力量之因次，可以單獨或綜合說明各種現象之力學性質，因此應該確定此四基本因次間的關係式。根據萬國慣用定則，不拒採用何種單位制，力量的單位係來自，將單位質量之速度，在單位時間內，產生每單位時間一個單位長度的變化。顯然的力量單位的因次F，必可用L、M、T組合表示之；或者任一個基本因次，可以根據此項組合關係式，化由其他三個基本因次之組合式，如

$$F=\frac{ML}{T^2};\ L=\frac{FT^2}{M};\ M=\frac{FT^2}{L};\ T=\sqrt{\frac{ML}{F}}$$

$$其\ \frac{ML}{FT^2}=1$$

所以任何力學上的量（Quantity），其因次式皆可用任三個基

本因次組合表示之。如功率，其因次式可寫成 L-T-F, T-F-M, L-F-M, 及 L-T-M 因次系形式。如

$$\frac{LF}{T}=\frac{F^2T}{M}=\sqrt{\frac{F^3L}{M}}=\frac{L^2M}{T^3}$$

而功率的單位，則可用呎磅/秒，仟克公尺/秒等。前者之實用單位爲馬力，公制之實用單位爲瓦特等。再如功之任何單位，是由因次 $F\times L$ 而成，就力學及純因次式之變換知，功應與動能相等，即

$$LF=M\frac{L^2}{T^2}=\frac{FT^2}{L}\ \frac{L^2}{T^2}=LF$$

動能的因次式，又可寫成 L-T-F, L-T-M, L-F-M, 及 T-F-M 制，如

$$\frac{FT^2}{L}\ \frac{L^2}{T^2}=\frac{M}{L^3}\ \frac{L^2}{T^2}=\frac{M}{L}\ \frac{F}{ML}=\frac{M^2}{FT^4}$$

各項仍可約簡。就以上對因次與單位之說明知，在一項力學問題的運算過程中，如果發生數值上的誤差，或者使用了不適當的假定或簡化程序，皆應立刻從因次式之是否平衡而驗出；因次上的誤差，必然示意數值有誤。

在美國，慣用長度、時間及力量之單位制，在歐洲則用長度、時間及質量單位制，因而習慣上又將四個基本因次，分成 L-T-F 及 L-T-M 兩組基本因次制。

不論採用何一單位制，對於一個力學上的量，其因次式或直接爲基本因次，或者是由基本因次組合而成，必爲一定的形式，因爲此項因次式之形式，必能充足分說明該量的力學性質。如長度、管徑、水力半徑、水頭、糙體高度、亂流的各種尺度等之因式，皆爲基本因次 L，而流體斷面面積、受流體作用之物體面積、或任何就問題之分析需要，所假想的任何單位面積，其因次皆爲 L^2，係由基本因次 L 所導出者。流量的因次式是由 L^3 與 T 組合成爲 L^3/T. 黏性剪力、亂流剪力、或壓力之因次式，是由 F 及 L^2 組合成 F/L^2，或由 MLT^{-2} 與 L^{-2} 組合成 M/LT^2 因次式。簡言之，任何流體力學上之量或因數，其因次式，均可用兩組因次制，L-T-M 及 L-T-F,

之代數式乘冪形式表示之，即

$$L^x T^y M^z$$

或 $$L^x T^y F^z$$

x, y, z 可爲負或爲零。例如面積爲 L^2，或 $L^2T^0M^0$；密度爲單位體積之質量，其因次式爲 M/L^3，或 $L^{-3}T^0M^1$，他如速度加速度等一切流體的量或因數，均可按此形式表示之。流體常用之基本因數 (Fluid Property)，其因次式及常用單位之換算係數，列如表

二、因次分析

因次式在力學分析上之重要，是因爲

1. 因次式可助於直接瞭解某量之物理意義，不受單位變換的混擾，

2. 檢查一關係式兩端各項因次式是否平衡，可知此式有無錯誤，或是否合理。

3. 依因次式之形式，可使某量之單位，隨三基本因次之單位而變換。

4. 就因次與力學性質之一定關係，在因次平衡條件下，本乎因次推論 (Dimensional reasoning) 可導出一組新因數，有助於將學理作進一步的推廣研究，如質量傳送現象 (Transport phenomena) 之調混尺度原理 (Mixing length theory)，飽辛耐斯克之渦亂黏性係數，亂流剪力，及各種含有因次式之係數等。

5. 倘有關方程式不易直解時，可將各項化爲無因次項 (Dimensionless terms)，適於任何尺度，因可用縮小尺度之模型，在適當的條件範圍內，從實驗上獲得些經驗式的資料，以代替原方程式就數學解題之繁難。一般進行的各種模型實驗，其目的及範圍，實際上就是在此種方式下，個別求解無因次形式之流體運動方程式。所依據的模型律，即是無因次運動方程式之有關無因次項，或稱爲控制因式，如無因次流體運動方程式中之尤勒數、福祿德數及雷諾兹數等。

6. 由因次式進而化爲無因次式，使某一現象可藉數值或圖示說明之，而無因次式之絕對值，不受到任一單獨因數發生變化之影響。將此現象就力學方面，作有系統而完整的說明，以代替零亂無章又不合理化的經驗圖示。例如一組同形式之面積，雖然尺度不等，而恆可就兩個選定的形式尺度 a,b 之一定比值 a/b，統括代表此一特殊形式面積的幾何性質。此無因次式之絕對值，不受表示長度之單位制而異，更不會受到 a 或 b 尺度單獨變化之影響。他如孔口流量係數 $C_d=Q/A_1\sqrt{2\Delta p/\rho}$；水平液體或氣體流動之壓力分配，$(p-p_o)/\rho(V_o{}^2/2)=1-(V/V_o)^2$；重力流體之壓力分配 $(h-h_o)/$

$V_o^2/2g=1-(V/V_o)^2$ 等。各無因次式內任一個獨立因數之變化，都仍必歸到一條依兩個無因次參變式 $(p-p_o)/\rho(V_o^2/2)$ 或 $(h-h_o)/V_o^2/2g$ 與 $(V/V_o)^2$ 所決定的曲線上。事實上用無因次式將因數組合，以簡化公式之形式，已早被採用，如坡降及損能梯度 h_f/L 等。

7. 由各因數之因次式，處理成爲較少項的無因次組，將力學性質作合理而完整的歸納表示，乃是一種最適合的表示法 (Method of presentation)。因爲表示兩個因數間的關係，往往得一曲線，而當因數之個數增加時，則其間關係之表示，自爲繁難。

由因次式發展成因次分析，其目的在觀查在某種現象中，是那些較少項目的合理無因次組，作了重要的控制。各因數因次式之歸納，是靠幫代數數學，因此所分析出來的新無因次組，必是可靠且合理的，因可使問題交由實驗法加以研究。相反的，倘若模型實驗，不先藉數學歸納程序，將問題有關因數加以處理，作爲試驗的依據，則實驗結果可能是不正確的。從以上，可以明瞭因次分析的用處可歸納爲：

1. 顯示對於所欲求知之事，所應注意的重點，以及指示所能許可使問題簡化的假定。

2. 使各因數化爲少數，並提供出從中得到資料的經濟方法。

3. 使得到更較多的資料，比較出經驗公式以及數學公式之適用範圍。

4. 使得出之公式，可同時適合各單位制。

5. 節省浪費繁複的實驗工作，使某特殊問題，祇藉局部的實驗，便可得到必要的資料。

因次分析之原理，要求一物理公式之每一項，必需同時共用統一單位制。採用大單位，則式中每一項，必須依照同一比例增大。

用因次分析法推演問題，雖然快而可靠，但亦有其實用限度：

1. 由因次分析法推演得之公式，時常含有些數値常數，須藉實驗試定。

2. 倘有關的問題，可直接從力學分析法或數學程序獲解時，

因次分析法不必採用，甚或僅作爲必要時的檢對工具。

3. 用此法推演，必先確定凡與問題有關因數，故必需對有關之學識熟知，且能掌握其力學定理，方能順利地選擇因數，不致多選或遺漏，使結果錯誤。

總之，就分析而論，現代因次分析學，實即是一種數學程序，將各因數就因次方面歸納理化後，由實驗結果，充分顯示函數關係，此種函數關係式，遂相當於微分方程式之解式。

三、流體力學與因次分析

欲明瞭流體力學與因次分析之重要關係，須先瞭解近代流體力學之生成背景。流體力學是經驗水力學 (Empirical Hydraulics) 與理論水力學 (Classic Hydrodynamics) 的合產品，其所以較二者具有優越的特點，便是建立在因次分析的基礎上。

經驗水力學，是集合幾個世紀以來，人們對於水流現象，所創立的假說及經驗公式。各公式爲簡易代數式形式，直接得自簡單實驗結果，沒有經過系統性的合理分析。因此當應用時，不免要靠賴經驗與判斷，摸索嚐試。今日，經驗公式仍被各國工程界廣用，因爲工程人員，多不追求公式之來源及範圍，祇要經驗及習慣上認爲安全即可。在發展的晚近兩百年期間，另外方面，關於液體運動的現象，亦引起物理學家及數學家的興趣，遂著手試將液體的運動問題，藉用數學方程式表示之，並不假及任何實驗驗證。此種方式的實施，必須設立許多使方程式簡化之假定，因此所獲得的答案，往往與實地情形不能應對，再加以數學的深奧難解，並不能廣面實用。此一派純理論性的學術，便稱爲理論水力學。

流體力學，取兩派水力學之優點，彌補其缺處，對於流體問題，就物理意義上作嚴格分析，並用實驗驗證。不像經驗水力學，爲要滿足設計上之需要，偏重於數值答案而忽略理論分析；亦不像理論水力學，所處理的流體，是指所謂理想流體，沒有實體的存在。流體力學，爲了適應流體科學及工程發展之需要，乃面對此失適性，作一重大研討與改進，主張重視各種流體之物性因數，在流體各種現象中之個別控制及作用，並融合經驗水力學的經驗，及理論水力學

的理論基礎，將凡有關流體問題的因數，劃分爲三類：即說明流體邊界幾何條件的因數；代表流體運動及動力方面的因數；及流體之物性因數。根據幾何條件因數，可以將流體問題予以分類，如孔口流、溢流、管流、滲透流等，係得自經驗水力學之經驗，惟先前並未系統化。流體運動因數，將流態分類爲等速流，變速流，定量流，變量流，及其綜合流態；動力因數，則說明各流態中各種力之分佈等。倘若與問題有關之因數，僅包括至此，則稱爲理想流態，亦即是理論水力學所涉及的流態情形。流體力學乃綜合此兩類因數及有關經驗學理，進而研討流體各物性因數之重要性，如密度、重力、黏性、彈性，表面張力、蒸氣壓力等，相信各該物性，皆足以使理想流態發生變化。流體力學將以上三類因數，用因次分析觀念及方法，予以歸納組合成一組物性無因次參變數，供吾人從實驗上，明瞭各物性因數，對於流體運動控制之成分及條件。表一中之尤勒數、福魯德數、雷諾玆數、馬赫數、韋伯數等，即爲分別含有各該物性因數之參變數，爲研究流體科學最重要的控制根據。

玆舉兩個流體問題的分析，說明因次分析之功用。

【例 1】　不壓縮的流體，以平均流速 V 通過一直徑爲 D 之球體，則球體所受之曳力 (Drag) F（或設流體爲靜止，球體以速度 V 在流體中運動時所受之阻力），爲 $F=f(V,D,\rho,\mu)$。ρ 爲流體密度，μ 爲流體力黏度，f 爲不能逐一說明之函數關係。本題爲如何確定此函數關係，及如何將之顯示出來。

依前節所述，此函數式之因次若果是平衡的，則必須有下式之形式，即

$$F=\rho V^2D^2f_1\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)$$

或　$$\frac{F}{\rho V^2D^2}=f_1\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)$$

此式係根據因次分析而來，容後說明。經過此一初步處理後，原函數關係不再是指單獨的 V,D,ρ,μ 四個因數，而是指所變成的一個整因數 $\left(\frac{VD\rho}{\mu}\right)$ 了。事實上 $\frac{VD\rho}{\mu}$ 即是雷諾玆數 R。又 F/L^2