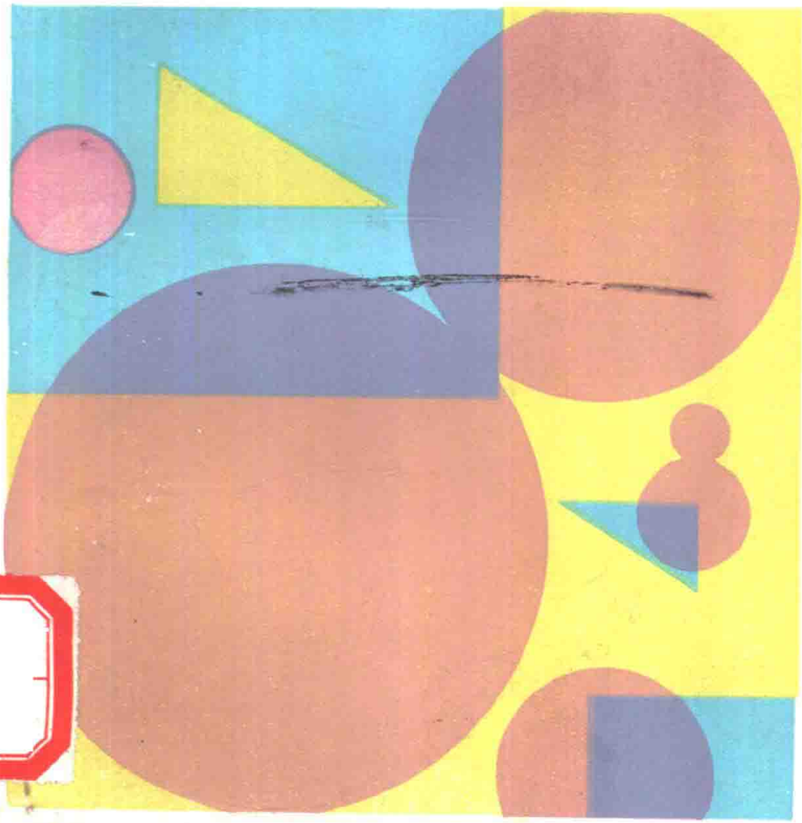
齿轮几何学

[日] 窪田忠彦



机械工业出版社

齿 轮 几 何 学

〔日〕 窪田忠彦

任世钟 译

机 械 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书扼要地介绍了微分几何和自然几何等数学基础，进而用这些数学基础来解决齿轮啮合中的问题。书中列举了很多用数学工具解决齿轮啮合问题的实例；其中，用切线坐标和切线极坐标解决齿轮啮合中的某些问题，讲得既扼要又明瞭，很有启发性。

本书可供从事齿轮研究、设计、制造的人员参考，也可供有关专业的师生参考。

歯車の幾何学

［日］ 窪田忠彦　著

~~现代工学社~~

昭和 22 年初版

昭和 48 年重印

*　　*　　*

齿 轮 几 何 学

［日］ 窪田忠彦　著

任世钟　译

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

重庆印制一厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092　1/32·印张 6·字数 131 千字

1985年 8 月重庆第一版·1985年 8 月重庆第一次印刷

印数　0,001—9,000·定价 1.50 元

*

统一书号：15033·5923

序

齿轮的基础理论，可以说是几何学和运动学令人最感兴趣的应用之一。太平洋战争期间，受学术研究会议和大日本航空技术协会的委托成立了两个齿轮研究组。在这两个研究组上，有许多几何学者研究的成果。其中，把有关齿轮几何学的基础部分经过综合地蒐集、整理，这就是本书的主要内容。

特别令人感兴趣的部分，有前田和彦氏的研究，和森永觉太郎、大盐茂两氏的研究，这些都是为了确定滑动系数一定的齿廓曲线，而巧妙地应用了自然几何学的结果。

前田和彦氏关于螺旋伞齿轮的研究，就是基于本书作者对螺旋伞齿轮基础的研究的启发才开始的，很有趣味，也可以说是这方面的基础研究。在这方面，本书只是作一入门性质的说明，以后再作详尽的论述。另外，关于伞齿轮，还参考了今野武雄氏的论文。

通过本书，如能让齿轮几何学给一般几何学者和机械工程学者多少带来一点启发，那正是作者的愿望。

窪田忠彦

1946年9月17日

目　次

第1章 平面曲线的微分几何

§1. 平面曲线的解析表示

1.1

设所讨论的平面在图1的纸面上，自原点o向右的方向，取为x轴的正方向；垂直于x轴，自原点o向上的方向，取为y轴的正方向，这样取得直角坐标系。假定在某一区间内$f(t)$、$g(t)$为t的连续函数，若其中至少有一函数不是常数时，则可用

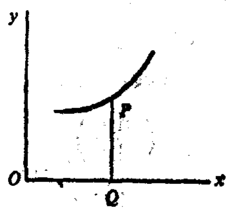


图1

$$x=f(t) \qquad y=g(t)$$

给出。坐标为(x,y)的点，随t的变化描绘出一连续曲线。这样，就把表示平面曲线的参数方程，称为平面曲线的**解析表示**，称t为**中间变量或参数**。

1.2

与参数t的值t_1相对应的点，称为t_1点，又取曲线上与t_1点邻近的$t_1+\Delta t$点，讨论过这两点的直线，则它的方程式为

$$\frac{x-f(t_1)}{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}=\frac{y-g(t_1)}{g(t_1+\Delta t)-g(t_1)} \tag{1.1}$$

假定$f'(t_1)$和$g'(t_1)$都存在，除二者均为0时外，当$\Delta t\to 0$时，$\{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)\}:\{g(t_1+\Delta t)-g(t_1)\}$的极限值等于$f'(t_1):g'(t_1)$，故(1.1)式直线的极限位置可由下列方程式给出：

$$\frac{x-f(t_1)}{f'(t_1)}=\frac{y-g(t_1)}{g'(t_1)} \tag{1.2}$$

称此直线为曲线上t_1点的切线，t_1点为切点，在t_1点与切线垂直的直线，称为t_1点的法线，t_1点为法线的足。

假定$f'(t_1)$与$g'(t_1)$均为0，$f''(t_1)$与$g''(t_1)$都存在，且至少其中之一不为0。又假定在t_1的附近$f(t)$与$g(t)$可以二次求导，则

$$x=f(t_1)+f''(t_1)(t-t_1)^2+\cdots\cdots,$$

$$g=g(t_1)+g''(t_1)(t-t_1)^2+\cdots\cdots,$$

式中第三项以下为较$(t-t_1)^2$更高次的无穷小。

现在为了研究曲线上t_1点附近的形状，不妨令坐标轴作适当的旋转，由是，$g''(t_1)=0$。这时

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{t=t_1}=0$$

曲线在t_1点的切线于是平行于x轴，t值大于t_1的曲线部分，和t值小于t_1的曲线部分，都在过t_1点所作与y轴平行的直线的同一侧。象这样的点，称为尖点。

$f'(t)$和$g'(t)$为连续的函数时，曲线上t_1和t两点之间的曲线长度

$$s=\int_{t_1}^{t}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

假定$f'(t)$和$g'(t)$不同时为0，则由(1.3)式可令t为s的连续函数$t(s)$求解。自变量置换后的函数$f(t(s))$和$g(t(s))$，可改写成用$x(s)$和$g(s)$表示的参数方程：

$$x=x(s),\qquad y=y(s)$$

于是

$$x'(s)^2+y'(s)^2=1$$

因此，$x'(s)$和$y'(s)$为不同时为0的连续函数。

以朝s增加的方向为切线的正向，则其方向余弦为$x'(s)$

和$y'(s)$，分别用α和β表示。

与此同时，也给法线定向。这时令切线的方向与法线的方向如同x、y两坐标轴的关系。详细点说，那就是使切线和法线一起在平面上连续地运动后，可以使它们分别与x、y坐标轴重合。令l和m为法线的方向余弦，则因

$$\alpha l+\beta m=0,\quad l^2+m^2=1,\qquad \begin{vmatrix}\alpha & l\\ \beta & m\end{vmatrix}=1$$

故 $\quad l=-\beta,\ m=\alpha$

切线的方程式为

$$\beta(\xi-x)-\alpha(\eta-y)=0 \tag{1.4}$$

法线的方程式为

$$\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)=0 \tag{1.5}$$

式中ξ和η为变坐标。

例. 试分析$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$的曲线，则当$t=0$、$t=\dfrac{\pi}{2}$、$t=\pi$、$t=\dfrac{3\pi}{2}$时，$\dfrac{dx}{dt}$和$\dfrac{dy}{dt}$均为0，而$\dfrac{d^2x}{dt^2}$和$\dfrac{d^2y}{dt^2}$则不同时为0，故曲线有四尖点。因此，若将曲线表示为参数方程$x=x(s)$、$y=y(s)$，则$x'(s)$和$y'(s)$不连续。

§2. 曲率和曲率半径

2.1

设平面曲线上s点和$s+\Delta s$点两切线的夹角为$\Delta\theta$，又设函数$x(s)$和$y(s)$的一阶、二阶导数均连续。则

$$\Delta\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta(s+\Delta s)}{\alpha(s+\Delta s)}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

当$s+\Delta s$点无限接近s点，$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$的极限值存在时，称此极

限值为曲线在s点的曲率。其倒数称为曲率半径，用ρ表示曲率半径，则

$$\frac{1}{\rho}=\lim\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

$$=\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}=x'y''-y'x''$$

即 $$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=x'y''-y'x'' \tag{2.1}$$

因 $x'x''+y'y''=0$

故 $$-\frac{x''}{y'}=\frac{y''}{x'}$$

$$-\frac{x''}{y'}=\frac{y''}{x'}=\frac{x'y''-x''y'}{y'^2+x'^2}=x'y''-x''y'$$

所以 $$\frac{1}{\rho}=-\frac{x''}{x'}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=-\frac{\beta}{\rho},\qquad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=\frac{\alpha}{\rho} \tag{2.2}$$

称之为平面曲线的Frenet-Serret公式。给曲率半径ρ定向时，可令手指指向s增加的方向，手指弯曲如左手，则曲率为正，手指弯曲如右手，则曲率为负。

以ξ、η为变坐标时，曲线上s点的法线方程式为

$$\alpha(s)\{\xi-x(s)\}+\beta(s)\{\eta-y(s)\}=0$$

在$s+\Delta s$点的法线方程式为

$$\alpha(s+\Delta s)\{\xi-x(s+\Delta s)\}+\beta(s+\Delta s)\{\eta-y(s+\Delta s)\}=0$$

所以其交点坐标为

$$\xi=\{\alpha(s)x(s)\beta(s+\Delta s)-\beta(s)\alpha(s+\Delta s)x(s+\Delta s)$$
$$+\beta(s)y(s)\beta(s+\Delta s)-\beta(s)\beta(s+\Delta s)y(s+\Delta s)$$
$$\div\{\alpha(s)\beta(s+\Delta s)-\beta(s)\alpha(s+\Delta s)\}$$

$$\eta=\{\alpha(s)\beta(s+\Delta s)y(s+\Delta s)-\beta(s)y(s)\alpha(s+\Delta s)$$
$$+\alpha(s)x(s+\Delta s)\alpha(s+\Delta s)-\alpha(s)x(s)\alpha(s+\Delta s)\}$$
$$\div\{\alpha(s)\beta(s+\Delta s)-\beta(s)\alpha(s+\Delta s)\}$$

当$\Delta s=0$时，交点的坐标ξ、η为$\frac{0}{0}$的不定式，所以取 $\Delta s\to 0$

时两式的极限值，根据微分学中的l'Hospital定理，得

$$\lim_{\Delta s\to 0}\xi=\{\alpha x\beta'-\beta\alpha'\alpha-\beta\alpha^2+\beta y\beta'-\beta^3-\beta\beta' y\}$$
$$\div(\alpha\beta'-\alpha'\beta)$$
$$=\left\{\frac{\alpha^2}{\rho}x+\frac{\beta^2}{\rho}x-\beta\alpha^2+\frac{\alpha\beta}{\rho}y-\beta^3-\frac{\alpha\beta}{\rho}y\right\}$$
$$\div\left(\frac{\alpha^2}{\rho}+\frac{\beta^2}{\rho}\right)$$
$$=x-\beta\rho$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\eta=\left\{\alpha\beta' y+\alpha\beta^2-\beta y\alpha'+\alpha^3+\alpha x\alpha'-\alpha x\alpha'\right\}$$
$$\div\left(\frac{\alpha^2}{\rho}+\frac{\beta^2}{\rho}\right)$$
$$=\left\{\frac{\alpha^2}{\rho}y+\alpha\beta^2-\frac{\beta^2}{\rho}y+\alpha^3-\frac{\alpha\beta}{\rho}x+\frac{\alpha\beta}{\rho}x\right\}\rho$$
$$=y+\alpha\rho$$

所以$\Delta s\to 0$时，平面曲线上s和 $s+\Delta s$ 两点的法线，其交点的

极限位置坐标为

$$\xi=x-\beta\rho,\qquad \eta=y+\alpha\rho \tag{2.3}$$

这点就是由曲线上s点沿法线截取长度ρ时的端点。这点就称为平面曲线上 s 点的**曲率中心**。

以曲率中心为圆心，ρ为半径所作的圆，称为**曲率圆**。

用任意参数 t 表示的平面曲线曲率半径 ρ 和曲率中心坐标，可由（2.1）和（2.2）式通过参数的变换求得。即

$$x=x(t),\qquad y=y(t)$$

及

$$\rho=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}},$$

又曲率中心(ξ、η)的坐标为

$$\xi=x-\frac{\frac{dy}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$\eta=y+\frac{\frac{dx}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

例． 将椭圆的方程式写成

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t$$

则曲率半径 $\rho=\frac{\{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t\}^{\frac{3}{2}}}{ab}$

如图 2 所示，自原点O向平面曲线上 P 点的有向切线引一垂线，令它的长度为p，OP 的长度为 r，试求曲线曲率半

径的公式。自原点O引垂线ON，使垂直于曲线上P点的有向切线，令其长度为p；又自原点O引垂线ON'，使垂直于曲线上邻近P点的P'点有向切线令其长度为$p+dp$。又令P和P'两点上平面曲线法线的交点为C，且$OP=r$，$OP'=r+dr$，连OC，

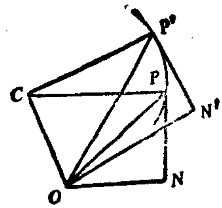


图 2

则因

$$OC^2=OP^2+CP^2-2OP\cdot CP\cos OPC$$

令$OC=\delta$，$CP=\rho$，于是

$$\delta^2=r^2+\rho^2-2\rho p$$

同样，因

$$OC^2=OP'^2+CP'^2-2OP'\cdot CP'\cos OP'C$$

故 $$\delta^2=(r+dr)^2+\rho^2-2\rho(p+dp)$$

两式相减，得

$$(r+dr)^2-r^2=2\rho dp$$

即 $$2rdr=2\rho dp$$

当PP'无限接近时，

$$\rho=\frac{rdr}{dp}$$

这就是曲线的曲率半径。

2.2

渐屈线和渐开线

平面曲线曲率中心的轨迹曲线，一般与原曲线的法线相切于与之对应的曲率中心。

曲率中心的轨迹曲线，称为原曲线的渐屈线；原曲线则

称为此曲线的渐开线。

将(2.3)式对s求导，得

$$\frac{d\xi}{ds}=\alpha-\frac{d\beta}{ds}\rho-\beta\frac{d\rho}{ds}=\alpha-\frac{\alpha}{\rho}\rho-\beta\frac{d\rho}{ds}$$

$$=-\beta\frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{d\eta}{ds}=\beta+\frac{d\alpha}{ds}\rho+\alpha\frac{d\rho}{ds}=\beta-\frac{\beta}{\rho}\rho+\alpha\frac{d\rho}{ds}=\alpha\frac{d\rho}{ds}$$

假定$\frac{d\rho}{ds}\neq 0$，则有

$$\frac{d\xi}{ds}:\frac{d\eta}{ds}=-\beta:\alpha$$

的关系。这说明在某点的曲率中心，原曲线的法线与其渐屈线相切。

$\frac{d\rho}{ds}=0$ 就意味着渐屈线有尖点。所以，在渐屈线没有尖点时

$$\frac{d\xi}{ds}:\frac{d\eta}{ds}=-\beta:\alpha$$

若令$\bar{s}$为渐屈线的长度，则

$$\frac{d\xi}{d\bar{s}}=-\beta,\quad \frac{d\eta}{d\bar{s}}=\alpha$$

因而

$$d\bar{s}=\frac{d\rho}{ds}ds$$

渐屈线没有尖点时，若从曲线上的$S_1(\bar{s}_1)$点积分到$S_2(\bar{s}_2)$点，则令原曲线上对应于S_1和S_2点的曲率半径分别为ρ_1和ρ_2时(图 3)，

$$\rho_2-\rho_1=s_2-s_1$$

由此可得如下定理：

一段平面曲线上两端点的曲率半径之差，等于原曲线上对应

图 3

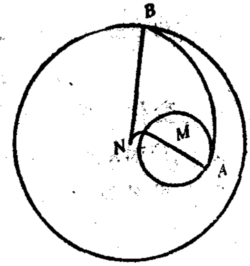


图 4

点两法线所切渐屈线上两点间的弧长，这里假定渐屈线上没有尖点。

∞^1根平面曲线分别在另一平面曲线上的各点与之相切时，称此平面曲线为∞^1根平面曲线的包络线。

这样一来，上面的结果可表述为：

平面曲线的渐屈线是原曲线法线的包络线。

例. Vogt定理。如图 4 所示，**平面曲线上由A点至B点的曲率半径若连续不断地增大，则 A 点的曲率圆将整个包围在B点的曲率圆之内。**

令曲线上A点的曲率中心为M，其曲率半径为ρ_A，B点的曲率中心为N，其曲率半径为ρ_B，则因曲率半径不断增大，由前定理

$$\rho_B-\rho_A=\widehat{MN}>MN,$$

式中$\widehat{MN}$表示渐屈线的弧长。

由此可知，B点的曲率圆将包在整个A点的曲率圆之外。

§3 包络线

3.1

我们称∞^1根平面曲线为**平面曲线族**，其包络线的求法

如下：令曲线族的方程式为

$$f(x,y,t)=0 \tag{3.1}$$

随着 t 的变化，依次表示曲线族中的一根根曲线。这里，假定$f(x,y,t)$对x、y、t可偏微分二次，其导函数连续。

若此曲线族有包络线，则因其切点在各曲线上，故切线的坐标x和y必为t的函数。假定该函数可对 t 微分一次，且导函数连续，分别为$x(t)$和 $y(t)$，那么，这就是包络线的解析表示。因该点总在曲线族的曲线上，故

$$f(x(t),\ y(t),t)=0 \tag{3.2}$$

那么，曲线族中曲线的切线方向，由

$$f_x(x,y,t)\mathrm{d}x:f_y(x,y,t)\mathrm{d}y=0 \tag{3.3}$$

确定的$\mathrm{d}y:\mathrm{d}x$所决定。这里，假定f_x和f_y不同时为0。f_x和f_y同时为0的点，称为曲线的**奇点**。

可是由(3.2)式得

$$f_x(x(t),y(t),t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+f_y(x(t),y(t),t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$+f_t(x(t),y(t),t)=0 \tag{3.4}$$

包络线的切线方向由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

决定，因包络线与曲线族的曲线相切，故由（3.3）式得

$$f_t(x(t),y(t),t)=0$$

因为f_x和f_y不同时为 0，即曲线族的曲线无奇点，故可得下列结果。

曲线族的曲线若无奇点，则包络线必由满足

$$f(x,y,t)=0,\ f_t(x,y,t)=0 \tag{3.5}$$

的$x(t)$和$y(t)$所决定。

这一论证是在对 $f(x,y,t)$ 的假定下反推回去，这样一来，所得函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 就给出包络线。也就是由(3.5)式的两式消去 t，也可得包络线的方程。

例. a、b 变化使斜角坐标系中 $ab=k^2=$ 常数时，试求直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

的包络线。

将直线的方程式写成

$$k^2x+a^2y-ak^2=0$$

若把它对 a 求导，则得

$$2ay-k^2=0$$

由此二式消去 a，则

$$k^2x+\left(\frac{k^2}{2y}\right)^2 y-\frac{k^2}{2y}k^2=0,$$

即 $$4xy=k^2$$

由此得如下结果：

两定直线相交于A点。在定直线上分别取B、C两点，若移动B、C使△ABC的面积一定时，BC边的包络线即以此二定直线为渐近线的双曲线。

3.2

下面讨论平面曲线族的曲线用

$$x=x(u,t),\qquad y=y(u,t) \tag{3.6}$$

给出时的情形。式中 t 为确定曲线的参数。即确定 t 后置换 u 时，曲线族的曲线即给定。另外，还假定这些曲线没有奇点，而且所论函数都可偏微分两次，导函数都连续。

现在假定曲线族有包络线，则其包络线与曲线族曲线之

切点坐标，必须由t的函数确定。也就是说，u由t的函数$u(t)$决定，包络线则必须由

$$x=x(u(t),t), \qquad y=y(u(t),t)$$

给定。

因为曲线族的曲线没有奇点，所以$x_u(u,t)$和$y_u(u,t)$不同时为0。故曲线族曲线的切线方向，由

$$dy:dx=y_u(u,t):x_u(u,t)$$

决定，包络线的切线方向，由

$$dy:dx=y_t+y_u\frac{du}{dt}:x_t+x_u\frac{du}{dt}$$

决定，因为二者是一致的，故得

$$\begin{vmatrix} y_u(u,t) & x_u(u,t) \\ y_t(u,t) & x_t(u,t) \end{vmatrix}=0 \tag{3.7}$$

若由(3.7)式以t的函数形式确定了u，则它应当给出包络线

$$x=x(u(t),t), \quad y=y(u(t),t)$$

也就是说，由(3.6)式和(3.7)式消去u，t，则应给出包络线方程。

反之，若将上述对所论函数所作假定进行的论证加以反推，则如上求得的曲线即所求的包络线。

若采用Gauss的复数法几何表示，假定平面曲线族用$z=x(u,t)+iy(u,t)$　$(i=\sqrt{-1})$的复数给出，则求包络线的(3.7)式变成

$$\frac{\partial z}{\partial u}:\frac{\partial z}{\partial t}=\text{实函数}$$

这就是对包络线确定$u(t)$的条件式。

3.3

由同一平面上的定点O向平面曲线的切线引垂线ON时，