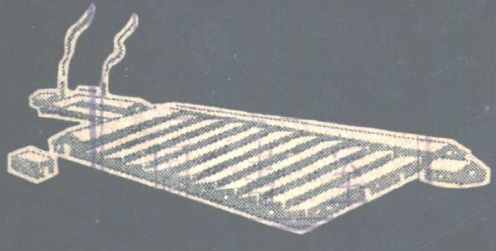
單層廠房連續結構分析

張有齡 著



科学技術出版社

單層廠房連續結構分析

張有齡著

中国科学技术大学 图书馆章

科学技術出版社

內 容 提 要

本書主要介紹丹麥奧斯登非教授的形變法，在連續廠房的剛構分析中應用逐結推算法，可得完全準確的結果．書中除簡單述及必要的理論外，大部分是把它的應用推廣到變截面及拱形杆件的結構上，並用實例來說明，使讀者能很快地掌握這一個適用于高度超靜定結構的分析方法．

書中特別注意變截面梁和曲梁的影響，同時結合近代通用的幾種剛構分析法，作出了全面固定彎矩系數表，不論計算法或圖解法均便檢用．

本書可供大專土建工程系作爲參考書，亦可供從事廠房設計工作人員作爲研究與參考之用．

單層廠房連續結構分析

著 者 張 有 齡

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版
（上海建國西路336弄1號）
上海市書刊出版業營業許可證出〇七九號

光藝印刷廠印刷 新華書店上海發行所總經售

*

統一書號：15119・270
開本 787×1092耗 1/16・印張 12 1/2 插頁 2・字數 246,000
一九五六年七月第一版
一九五六年七月第一次印刷・印數 1—4,000

定价：(11)二元三角

序　言

廠房結構均屬高度及跨度巨大，荷載複雜繁重，爲求增加勁度節約材料計，自宜采用剛性結構進行設計爲佳．又以廠房排間當屬一律，一兩個平面計算就解決了整個廠房設計問題，因此有必要采用精確合理的分析方法．同時爲了節省時間起見，所用方法更須便捷簡單，是以近年來學者對此多有研究貢獻，惟目標偏重于"近似法"或"迭代法"，用于民用建築自屬適當；以其構架中每個結點至少有三個、四個杆件會于一點，如按正確方法進行分析，不但繁複無止境，且于其精確度亦無多大補助，故采用如柯勞塞克❶之形變分配法最爲得宜．而廠房類結構，根據上述理由，并不必要尋求一"複雜的簡便近似方法"．相反地應考慮到每個對結構有影響的細微因素，如變截面、結點性質、桁架梁的勁度、拱的作用等問題似更迫切．

吾人不能諱言中國研究結構工程者受克勞斯❷的影響至深且廣，克勞斯于 1930 年同時發表兩大貢獻，即"力矩分配法"與"柱比法"，使結構分析方法趨于同一方向，互相呼應，極一時之盛，此項功績自不可泯沒．若論二者之價值孰大，愚意"柱比法"之觀念新穎（將超靜定問題變爲靜定的單向力的平衡），應用簡便（自然的包括了側欹作用在內），實勝于"力矩分配法"．無論何種分配法，其實質無非是逐次的求解若干聯立方程式，因此僅是一個數學中近似分析法的問題，不過克勞斯補充了結點的"鎖緊"與"放鬆"觀念，因而使人印像清晰，易于掌握．此二方法用者之評價不一，然由于實用範圍之廣泛及深入研究者之衆多（迄今廿五年仍在進展），不能不認爲此二法在解決超靜定結構問題中掀起了無比的高潮，并大大地推進了這一方面的新成就．

這裏更可以補充一點，變梁和曲梁（即拱）的新分析方法都屬于柱比法的進一步推廣．戴爾❸簡化了折梁（即鋸齒形屋架）的推力計算，也是與柱比法异曲而同工．

至此作者願介紹丹麥學者奧斯登菲❹對于結構分析的貢獻．其所著丹麥文的"技術靜力學"❺二冊刊行于 1925 年，并曾于 1923 年發表"形變法"❻．所謂克勞斯之"柱比法"與"力矩分配法"，雖于表現形式上稍有不同于奧斯登菲者，實已在哥本哈根❼大學講授多年

---

❶ C.V. Klouček　❷ H. Cross　❸ G. H. Dell
❹ A. Ostenfeld　❺ Teknisk statik　❻ Die Deformationsmethode
❼ Copenhagen

矣，惜以其文字非國人所熟諗，以致美玉藏匱，未能早見其光輝耳．

作者在以往多年工作中，試用奧斯登菲的"形變法"．尤着重其所創之逐結推算法，頗覺可取；更進而結合柱比法的觀念，以求成立變截面曲梁常數的通式；又試將戴爾公式推廣到曲梁上的應用．至于桁架梁的勁度計算，引用茅氏❶始用于桁架分析的功能法，證明一般的估計過高，是值得注意的．以上不過是把業務學習中的一些問題提出了初步看法，自然必須還要更進一步來研究的．

書中內容所分析的一些問題仍是廠房中最簡單的例子，分析的問題也不全面．如軸應力、溫度應力、地震應力，以及廠房之局部有平台者等特殊問題，尚付缺如．希望以後有機會加以補充．還有一點應特別在此向讀者致歉的，就是荷載及長度多處引用了英制：一則因爲若干例題係取自英美書籍，藉資參比；二則係作者舊稿，如將內容一律改用公制，需費不少時間，故仍沿用．在本書中作者建議符號上角加一小圈者表示固定的意思，如 M° 是固端力矩；符號下角加一小圈者表示靜定的意思，如 $S_{\circ}$ 是靜定力；應注意者 $Z_{\circ}$ 雖是一靜定力，但可等于固端力矩 M°，因爲後者在分析前是作爲靜定的已知值的．如承國內先進贊同，希望能將這類符號逐漸統一的確定下來．

全書經蔡方蔭先生詳細核閱，提出了不少寶貴意見，已逐一加以修正；排版之前復承顧世楫先生仔細編校，都應在此表示感謝．書中不妥之處，恐尚難免，幸讀者隨時指正．

張有齡　一九五五年九月卅日于北京

❶ L. G. Maugh

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　錄

序　言 …… 1
第一節　角變位移法公式 …… 1
第二節　單架分析 …… 3
第三節　逐結推算法 …… 10
第四節　單位變位彈性方程式解 …… 21
第五節　疊式廠房分析 …… 24
第六節　拱形屋頂分析 …… 35
第七節　逐結推算法的闡明 …… 66
第八節　鋸齒形構架的分析 …… 71
第九節　變梁常數表及單階柱公式 …… 81
第十節　變梁的角變位移法通式 …… 88
第十一節　變梁剛構的逐結推算法 …… 125
第十二節　桁架剛構的分析 …… 138
附錄一　等截面梁固定彎矩係數表 …… 172
附錄二　魯貝兒矩形截面變梁常數表 …… 176
附錄三　慣常係數表及其應用 …… 186
附錄四　參考文獻 …… 193

第一節　角變位移法公式

近代結構分析方法無非根據于構件連續觀念的擴展，但繁簡難易須視運用者之得心應手與否，苟就扼要主旨而言，皆源出變位或虛功觀點．據文獻所載，此法于 1868 年創自莫耳❶，八十年來經各專家加以推廣；然其用于實際工作中，需解多數聯立方程式，費時太久，爲其缺點．1923 年奧斯登菲創單位變位法新解，其優點在可以逐結推算，不必解多數聯立方程式，應用遂覺簡便。本書所舉各例，悉以說明此點，其基本方程式僅變位法兩公式耳．

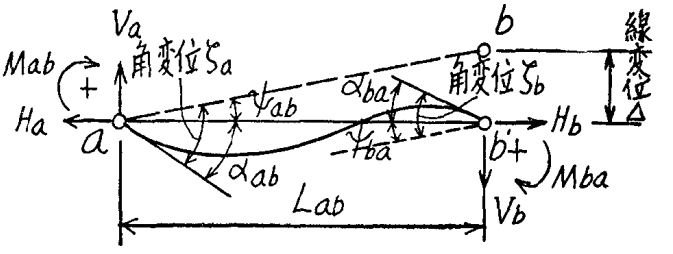


圖 1

圖 1 示杆 ab，兩端之角變位各爲 ζ_a（讀如 zeta）、ζ_b，兩端之相對綫變位爲 Δ．由圖 $\zeta_a = \alpha_{ab} + \psi_{ab}$，$\zeta_b = \alpha_{ba} + \psi_{ba}$；圖示各值均爲正號．設 $\mu_{ab} = \dfrac{I_{ab}}{L_{ab}}\dfrac{L_c}{I_c}$，爲任一 ab 杆勁度對 c 杆而言的相對比值，則

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= M^{\circ}_{ab} + 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b - 3\psi_{ab}) \\ M_{ba} &= M^{\circ}_{ba} + 2\mu_{ab}(2\zeta_b + \zeta_a - 3\psi_{ab}) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 M°_{ab}、M°_{ba} 爲 ab 杆兩端之定端力矩．如梁之 b 端固定，稱之爲 i，則 $\zeta_b = 0$

$$\left.\begin{aligned} M_{ai} &= M^{\circ}_{ai} + 2\mu_{ai}(2\zeta_a - 3\psi_{ai}) \\ M_{ia} &= M^{\circ}_{ia} + 2\mu_{ai}(\zeta_a - 3\psi_{ai}) \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

如梁之 b 端係鉸結，稱之爲 k，則 $M_{ka} = 0$，于是

$$\left.\begin{aligned} \zeta_k &= -\frac{1}{2}\zeta_a + \frac{3}{2}\psi_{ak} \\ M_{ak} &= M^{\circ}_{ak} + 3\mu_{ak}(\zeta_a - \psi_{ak}) \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

如 b 端係一連續結點，其彎矩之大小恒在此二限以內．設梁 ab 兩端之實際彎矩爲 M_{ab}、M_{ba}，解式(1)可得

$$\zeta_a - \psi_{ab} = \frac{1}{3\mu_{ab}}\left[\left(M_{ab} - \frac{M_{ba}}{2}\right) - \left(M^{\circ}_{ab} - \frac{M^{\circ}_{ba}}{2}\right)\right] \tag{2}$$

茲暫不論側欹，使 $\psi_{ab} = 0$；如兩端固定，則 $M_{ab} = M^{\circ}_{ab}$，$M_{ba} = M^{\circ}_{ba}$，$\zeta_a = 0$；如兩端鉸結

❶ O. Mohr

或簡支，則 $M_{ab} = M_{ba} = 0$，$\zeta_a = -\frac{1}{3\mu_{ab}}\left(M^{\circ}_{ab} - \frac{M^{\circ}_{ba}}{2}\right)$，由式(2)求角變位至爲捷便，試如圖 2，由著者所編之固定彎矩係數表(附錄一)查得：$M^{\circ}_{ab} = -\frac{WL}{10}$，$M^{\circ}_{ba} = \frac{WL}{15}$

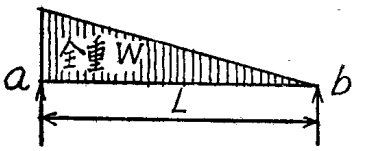


圖 2

$$\zeta_a = -\frac{1}{3\mu}\left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{30}\right)WL = \frac{8}{180}\frac{WL^2}{EI}$$

$$\zeta_b = -\frac{1}{3\mu}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right)WL = -\frac{7}{180}\frac{WL^2}{EI}$$

第二節　單架分析

剛構中最簡單者爲單架．許多剛構在進行設計時每可簡化使成單架，故實際應用最廣．單架剛構的基本性質每用表格列舉，最全備者當推克蘭勞蓋❶[3]"剛架公式"一書，共列舉 1,643 種單架，用者稱便．但所舉僅限于對稱單架，且各構件均爲等截面者，因之在剛構分析中仍未能普遍適用．其實普通單架僅有兩個結點，亦即只有兩個角變爲未知數，殊易求其通式，并使其不僅限用于等截面．茲爲敘述便利起見，由簡而繁，從淺入深，分別以(甲)無側欹、(乙)側欹校正及(丙)單位變位彈性方程式解，三個步驟分析之．

(甲)無側欹　圖 3 示單架于 a 結點置一支杆 oa 爲側支，故無側欹．

$$M_{ab} = M^{\circ}_{ab} + 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b)$$

$$M_{a1} = M^{\circ}_{a1} + 2\mu_{a1}(2\zeta_a)$$

$$\Sigma M_a = 0 = \Sigma M^{\circ}_a + 4\zeta_a\Sigma\mu_a + 2\zeta_b\mu_{ab}$$

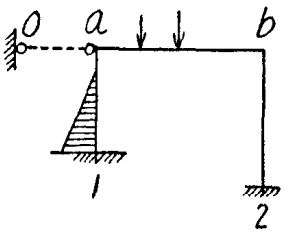


圖 3

同此

$$\Sigma M_b = 0 = \Sigma M^{\circ}_b + 4\zeta_b\Sigma\mu_b + 2\zeta_a\mu_{ab}$$

解之

$$\left.\begin{aligned}\zeta_a &= \frac{\mu_{ab}\Sigma M^{\circ}_b - 2\Sigma\mu_b\Sigma M^{\circ}_a}{8\Sigma\mu_a\Sigma\mu_b - 2\mu^2_{ab}}\\ \zeta_b &= \frac{\mu_{ab}\Sigma M^{\circ}_a - 2\Sigma\mu_a\Sigma M^{\circ}_b}{8\Sigma\mu_a\Sigma\mu_b - 2\mu^2_{ab}}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

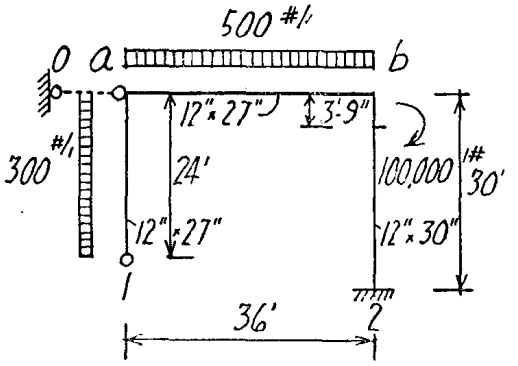


圖 4

如柱之下端 1 或 2 結點非固定而乃簡支或鉸結時，須將上式中之 μ_{a1} 或 μ_{a2} 乘以 3/4．

[例一(甲)]

杆件	L	I	I/L	μ
$a1$	$L_c=24$	$I_c=8.0$	1/3.00	$1.00\times0.75=0.75$
ab	36	19.7	1/1.83	1.64
$b2$	30	27.0	1/1.11	2.70

$$\Sigma\mu_a = 2.39,\quad \Sigma\mu_b = 4.34$$

$$M^{\circ}_{a1} = \frac{300\times 24^2}{12} = 14{,}400'\#,\quad M^{\circ}_{ab} = -\frac{500\times 36^2}{12} = -54{,}000'\#$$

$$\Sigma M^{\circ}_a = -39{,}600'\#$$

❶ A. Kleinlogel

$$M^{\circ}_{ba} = 54{,}000'^{\#}, \quad M^{\circ}_{b2} = -(1 - 4a + 3a^2)M = -\left(1 - \frac{4}{8} + \frac{3}{64}\right)100{,}000$$

$$= -\frac{35}{64}100{,}000 = -54{,}687'^{\#}$$ ❶

$$\Sigma M^{\circ}_{b} = -687'^{\#}, \quad M^{\circ}_{2b} = a(2 - 3a)M = \frac{1}{8}\left(2 - \frac{3}{8}\right)100{,}000 = \frac{13}{64}100{,}000$$

$$= 20{,}312'^{\#}$$

$$\zeta_a = \frac{1.64(-687) - 2 \times 4.34(-39{,}600)}{8 \times 2.39 \times 4.34 - 2 \times 1.64^2} = \frac{342{,}601}{77.60} = +4{,}415$$

$$\zeta_b = \frac{1.64(-39{,}600) - 2 \times 2.39(-687)}{8 \times 2.39 \times 4.34 - 2 \times 1.64^2} = \frac{-61{,}660}{77.60} = -795$$

V

$$\begin{cases} M_{a1} = M^{\circ}_{a1} + 3\mu_{a1}\zeta_a = 14{,}400 + 3 \times 1(4{,}415) \\ \quad = 27{,}645'^{\#} \\ M_{ab} = M^{\circ}_{ab} + 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b) = -54{,}000 + 2 \times 1.64(8{,}830 - 795) \\ \quad = -27{,}645'^{\#} \end{cases} \qquad 27{,}645/24 = 1{,}152^{\#}$$

$$\begin{cases} M_{ba} = M^{\circ}_{ba} + 2\mu_{ab}(2\zeta_b + \zeta_a) \\ \quad = 54{,}000 + 2 \times 1.64(4{,}415 - 1{,}590) = 63{,}266'^{\#} \\ M_{b2} = M^{\circ}_{b2} + 2\mu_{b2}(2\zeta_b) = -54{,}687 + 2 \times 2.70(-1{,}590) \\ \quad = -63{,}266'^{\#} \\ M_{2b} = M^{\circ}_{2b} + 2\mu_{b2}\zeta_b = 20{,}312 + 2 \times 2.70(795) \\ \quad = 16{,}019'^{\#} \end{cases} \qquad -47{,}247/30 = -1{,}575^{\#}$$

$-423^{\#} \rightarrow$

不平衡側力 3,600 ←

不平衡剪力 3,177# ←

其中不平衡側力係指在 oa 側支上之反力.

(乙)側欹校正　根據所產生之不平衡剪力 3,177#,如無拉杆 oa 承受之，剛架即應向右傾斜,故用一相等而相反之力 $-3{,}177^{\#}$ 加諸 a 結點,予以側欹校正,可使彎矩與側力成平衡,稱爲側欹校正.

設柱 ai 之 i 端爲固定端,當 a 端受單位側欹時,可以 $-6\mu_{ai}\psi_{ai}$ 代 M°_{ai} 與 M°_{ia}; 設柱

❶ 式中 $a = \frac{3.75}{30} = \frac{1}{8}$,參閱附錄(一)固定彎矩係數表第 51 式,正負號亦可由附圖決定之

ak 之 k 端爲鉸結，則以 $-3\mu_{ak}\psi_{ak}$ 代 $M_{ak}^{\cdot}$. 前者結點 a 之彎矩爲

$$M_{a1} = 2\mu_{a1}(2\zeta_a - 3\psi_{a1})$$

$$M_{ab} = 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b - 3\psi_{ab})$$

$$\Sigma M_a = 0 = 4\zeta_a\Sigma\mu_a + 2\zeta_b\mu_{ab} - 6\Sigma\mu_a\psi_a$$

同此

$$\Sigma M_b = 0 = 4\zeta_b\Sigma\mu_b + 2\zeta_a\mu_{ab} - 6\Sigma\mu_b\psi_b$$

解之

$$\left.\begin{aligned}\zeta_a &= \frac{-3\mu_{ab}\Sigma\mu_b\psi_b + 6\Sigma\mu_b\Sigma\mu_a\psi_a}{4\Sigma\mu_a\Sigma\mu_b - \mu_{ab}^2}\\ \zeta_b &= \frac{-3\mu_{ab}\Sigma\mu_a\psi_a + 6\Sigma\mu_a\Sigma\mu_b\psi_b}{4\Sigma\mu_a\Sigma\mu_b - \mu_{ab}^2}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

當 k 端爲鉸結時 μ_{ak} 應乘以 $\frac{3}{4}$，　ψ_{ak} 應乘以 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

[例一(乙)]　設 a 節點向右移位 1，　$\psi_{a1} = \frac{1}{24}$，　$\psi_{b2} = \frac{1}{30}$，　$\psi_{ab} = 0$

$$\Sigma\mu_a\psi_a = 0.75\left(\frac{1}{24}\times\frac{2}{3}\right) = 0.0208,\quad \Sigma\mu_b\psi_b = 2.70\left(\frac{1}{30}\right) = 0.0900$$

$$\zeta_a = \frac{-3\times 1.64(0.0900) + 6\times 4.34(0.0208)}{38.80} = \frac{0.0988}{38.80} = 0.00255$$

$$\zeta_b = \frac{-3\times 1.64(0.0208) + 6\times 2.39(0.0900)}{38.80} = \frac{1.1883}{38.80} = 0.03063$$

$$M_{a1} = 3\mu_{a1}(\zeta_a - \psi_{a1}) = 3\times 1\left(0.00255 - \frac{1}{24}\right) = -0.1173$$

$$-0.1173/24 = -0.00489$$

$$M_{ab} = 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b) = 2\times 1.64(0.00510 + 0.03063) = 0.1173$$

$$M_{ba} = 2\mu_{ab}(2\zeta_b + \zeta_a) = 2\times 1.64(0.00255 + 0.06126) = 0.2093$$

$$M_{b2} = 2\mu_{b2}(2\zeta_b - 3\psi_{b2}) = 2\times 2.70\left(0.06126 - \frac{1}{10}\right)$$

$$= -0.2093$$

$$M_{2b} = 2\mu_{b2}(\zeta_b - 3\psi_{b2})$$

$$= 2\times 2.70\left(0.03063 - \frac{1}{10}\right) = -0.3746$$

$$-0.5839/30 = -0.01946$$

不平衡剪力 $= -0.02435\rightarrow$

此與(甲)所得之比爲 $\frac{3{,}177}{-0.02435} = -130{,}472$，用 130,472 乘以上各值，即得側欹校正

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

彎矩，再加無側欹之彎矩，即爲實際彎矩.

	側欹校正	無側欹	實際彎矩		
M_{a1}	− 15,304	27,645	12,341	12,341/24 =	514#
M_{ab}	15,304	− 27,645	− 12,341	78,332/36 = 2,176#	
M_{ba}	27,308	63,266	90,574		
M_{b2}	− 27,308	− 63,266	− 90,574	− 123,430/30 =	− 4,114#
M_{2b}	− 48,875	16,019	− 32,856		
					− 3,600#

(丙)單位變位彈性方程式解　在超靜定結構中已知結點 n 之靜定變位爲 δ_{no}，如分別使超靜定力 $X_a = 1, X_b = 1\cdots$其于 n 點所產生之變位爲 $\delta_{na}, \delta_{nb}\cdots$則其總變位爲

$$\delta_n = \delta_{no} + X_a\delta_{na} + X_b\delta_{nb} + \cdots + X_p\delta_{np} \tag{5}$$

此式稱爲單位應力彈性方程式. 同理，設已知結點 n 在靜定狀態下之力爲 Z_{no}，如分別使超靜定變位 $\zeta_a = -1, \zeta_b = -1\cdots$其于 n 點所產生之力爲 $Z_{na}, Z_{nb}\cdots$則其總力爲

$$Z_n = Z_{no} - Z_{na}\zeta_a - Z_{nb}\zeta_b - \cdots - Z_{np}\zeta_p \tag{6}$$

此式稱爲單位變位彈性方程式，其結果可由式(1)導得：設剛構無側欹，令 $M^\circ_{ab} = \zeta_b = 0$，幷 $\zeta_a = -1$，則 $M_{ab} = -4\mu_{ab} = -M'_{ab}$；再令 $M^\circ_{ab} = \zeta_a = 0$，幷 $\zeta_b = -1$，則 $M_{ab} = -2\mu_{ab} = -M''_{ab}$，故式(1)可寫成

$$M_{ab} = M^\circ_{ab} - M'_{ab}\zeta_a - M''_{ab}\zeta_b \tag{7}$$

設剛構有 p 個結點，上式乃包括 p 個角變，M 係杆端的彎矩，用于結點 n 時正負號相反，即

$$Z_n = -M_{ab},\quad Z_{no} = -M^\circ_{ab},\quad Z_{na} = -M'_{ab},\quad Z_{nb} = -M''_{nb}\cdots \tag{8}$$

即得式(6)；其中 Z 自然也可作爲力，則 ζ 爲其相當位移.

此與分析超靜定桁架之單位應力彈性方程式同一意義

$$S = S_o + s'X + s''Y + s'''Z + \cdots \tag{9}$$

其中 S 爲實際應力，S_o 爲其靜定應力，$s'、s''、s'''\cdots$爲分別使 $X = 1、Y = 1、Z = 1\cdots$之應力，所不同者僅改用單位應變而已.

在分析剛構時每個結點之彎矩與每個側支之側力均應平衡，故每結點有一結點公式：

$$Z_a = 0 = Z_{ao} - Z_{aa}\zeta_a - Z_{ab}\zeta_b - \cdots - Z_{ap}\zeta_p \tag{10}$$

每側支有一側支公式：

$$Z_r = 0 = Z_{ro} - Z_{ra}\zeta_a - Z_{rb}\zeta_b - \cdots - Z_{rp}\zeta_p \tag{11}$$

由變位法公式(1)，當 $a、b$ 兩端均固定不動時，則 $M_{ab} = M^\circ_{ab}$，就結點 a 言正負號相反

$$Z_{ao} = -\Sigma M^\circ_a \tag{12}$$

如無側欹，$\psi_{ab}=0$，則 $M_{ab}=2\mu_{ab}(2\zeta_a+\zeta_b)$，當 b 端固定($\zeta_b=0$)，a 端加一負單位角變 ($\zeta_a=-1$)時，$M_{ab}=-4\mu_{ab}$，就圖 5 結點 a 言正負號相反

$$Z_{aa}=-\Sigma M_a=4\Sigma\mu_{ab}+4\Sigma\mu_{ai}+3\Sigma\mu_{ak} \tag{13}$$

當 a 端固定 ($\zeta_a=0$)，b 端加一負單位角變 ($\zeta_b=-1$)時，$M_{ab}=-2\mu_{ab}$，就結點 a 言正負號相反

$$Z_{ab}=2\mu_{ab} \tag{14}$$

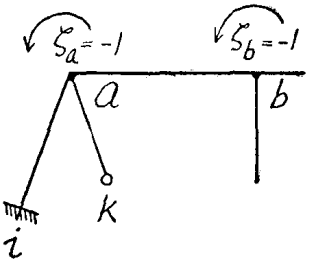


圖 5

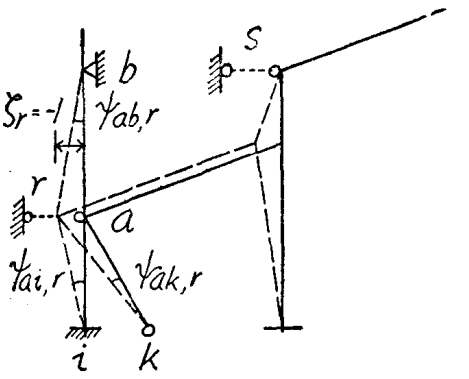


圖 6

仍就公式(1)，惟僅考慮側欹如圖 6，當側支 s 不動，側支 r 有一負單位變位 $\zeta_r=-1$ 時，則在固定狀態下之 r 側支力爲

$$Z_{ro}=-\Sigma P\delta \tag{15}$$

其中 P 爲側力，δ 爲側力作用方向的變位．因而在杆件 ab 之兩端產生彎矩 $M_{ab,r}=M_{ba,r}=-6\mu_{ab}\psi_{ab,r}$，$ab$ 間之剪力 $V_{ab,r}=-12\mu_{ab}\psi_{ab,r}/L_{ab}$，就側支 r 言力相反

$$Z_{ra}=-\Sigma M_a=6\Sigma\mu_{ab}\ \psi_{ab,r}+6\Sigma\mu_{ai}\psi_{ai,r}+3\Sigma\mu_{ak}\psi_{ak,r} \tag{16}$$

每一杆件當受到側欹時，其兩端即有彎矩發生，乘以其間之側角 ψ，即其內在功能，側支之力乘以其位移 ζ_r，即其外加功能；使杆 ab 當 $\zeta_r=-1$時之側角爲 $\psi_{ab,r}$，當 $\zeta_s=-1$時之側角爲 $\psi_{ab,s}$，作用于有側支結點上之內外功能應相等，即

$$Z_{rs}\zeta_s=-Z_{rs}=\Sigma P\delta=-12\mu_{ab}\psi_{ab,r}\frac{\zeta_s}{L_{ab}}-12\mu_{ai}\psi_{ai,r}\frac{\zeta_s}{L_{ai}}-3\mu_{ak}\psi_{ak,r}\frac{\zeta_s}{L_{ak}}$$

故

$$Z_{rs}=12\mu_{ab}\psi_{ab,r}\psi_{ab,s}+12\mu_{ai}\psi_{ai,r}\psi_{ai,s}+3\mu_{ak}\psi_{ak,r}\psi_{ak,s}$$

當結點同類杆件不止一個時，

$$Z_{rs}=12\Sigma\mu_{ab}\psi_{ab,r}\psi_{ab,s}+12\Sigma\mu_{ai}\psi_{ai,r}\psi_{ai,s}+3\Sigma\mu_{ak}\psi_{ak,r}\psi_{ak,s} \tag{17}$$

當杆件之僅受一個側支影響時，$r=s$，則

$$Z_{rr}=12\Sigma\mu_{ab}\psi^2_{ab,r}+12\Sigma\mu_{ai}\psi^2_{ai,r}+3\Sigma\mu_{ak}\psi^2_{ak,r} \tag{18}$$

當結點同時受彎矩與側欹時，結點之平衡公式爲

$$\left.\begin{aligned} Z_a = 0 &= Z_{ao} - Z_{aa}\zeta_a - Z_{ab}\zeta_b - \cdots - Z_{ar}\zeta_r - Z_{as}\zeta_s - \cdots \\ &\cdots\cdots \\ Z_r = 0 &= Z_{ro} - Z_{ra}\zeta_a - Z_{rb}\zeta_b - \cdots - Z_{rr}\zeta_r - Z_{rs}\zeta_s - \cdots \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

根據麥克斯威❶互等定律

$$Z_{ar} = Z_{ra}\cdots\cdots \qquad Z_{rs} = Z_{sr}\cdots\cdots \quad (20)$$

[例一(丙)]

$Z_{ao} = 39{,}600'^{\#}$, $Z_{aa} = 4\Sigma\mu_a = 4 \times 2.39 = 9.56$, $Z_{ab} = 2\mu_{ab} = 2 \times 1.64 = 3.28$

$Z_{bo} = 687'^{\#}$, $Z_{bb} = 4\Sigma\mu_b = 4 \times 4.34 = 17.36$

$$Z_{ro} = 3{,}600 + \frac{14{,}400}{24} - \frac{34{,}375}{30} = 3{,}600 + 600 - 1{,}146 = 3{,}054^{\#}$$

$$Z_{ar} = 3\Sigma\mu_a\psi_a = -3 \times \frac{1}{24} = -0.1250(\text{或} -6 \times 0.0208 = -0.1250)$$

$$Z_{br} = 6\Sigma\mu_b\psi_b = 6 \times 0.0900 = -0.5400$$

$$Z_{rr} = 3 \times 1 \times \frac{1}{24^2} + 12 \times 2.70 \times \frac{1}{30^2} = 0.0052 + 0.0360 = 0.0412$$

結點公式二：

$$Z_a = 0 = 39{,}600 - 9.56\zeta_a - 3.28\zeta_b + 0.1250\zeta_r$$

$$Z_b = 0 = 687 - 3.28\zeta_a - 17.36\zeta_b + 0.5400\zeta_r$$

側支公式一：

$$Z_r = 0 = 3{,}054 + 0.1250\zeta_a + 0.5400\zeta_b - 0.0412\zeta_r$$

解前二式，得

$$\zeta_a = 4{,}415 + 0.00255\zeta_r$$

$$\zeta_b = -795 + 0.03063\zeta_r$$

式中前項常數即無側欹之答案，次項 ζ_r 之係數乘以 -1，乃側欹校正，代進以上側支公式，$Z_r = 0$ 得：

$$0 = 3{,}177 - 0.02435\zeta_r$$

$$\zeta_r = \frac{3{,}177}{0.02435} = 130{,}472$$

---

❶ J.C. Maxwell

即前甲乙兩項之比值，由此解得

$$\zeta_a = 4{,}748,\quad \zeta_b = 3{,}201,\quad \psi_{a1} = \frac{130{,}472}{24} = 5{,}436,\quad \psi_{b2} = \frac{130{,}472}{30} = 4{,}349$$

$$\left\{\begin{aligned} M_{a1} &= M^{\circ}_{a1} + 3\mu_{a1}(\zeta_a - \psi_{a1}) = 14{,}400 + 3 \times 1(4{,}748 - 5{,}436) \\ &= 12{,}336 \qquad\qquad 12{,}336/24 = \ 514^{\#} \\ M_{ab} &= M^{\circ}_{ab} + 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b) = -\ 54{,}000 \\ &\quad + 2 \times 1.64(9{,}496 + 3{,}201) = -\ 12{,}354 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} M_{ba} &= M^{\circ}_{ba} + 2\mu_{ab}(2\zeta_b + \zeta_a) \\ &= 54{,}000 + 2 \times 1.64(6{,}402 + 4{,}748) = 90{,}572 \end{aligned}\right\} \quad 78{,}218/36 = 2{,}172^{\#}$$

$$\left\{\begin{aligned} M_{b2} &= M^{\circ}_{b2} + 2\mu_{b2}(2\zeta_b - 3\psi_{b2}) = -\ 54{,}687 \\ &\quad + 2 \times 2.70(6.402 - 13{,}047) = -\ 90{,}570 \\ M_{2b} &= M^{\circ}_{2b} + 2\mu_{b2}(\zeta_b - 3\psi_{b2}) \\ &= 20{,}313 + 2 \times 2.70(3{,}201 - 13{,}047) = -\ 32{,}855 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-\ 123{,}425/30 \\ &= -\ 4{,}114^{\#} \end{aligned}$$

$$-\ 3{,}600^{\#}$$

結果示如圖 7．　取杆件 $a1$，可得 $300 \times \frac{24^2}{2} - 3{,}086 \times 24 = 86{,}400 - 74{,}064$

$= 12{,}336$，證明平衡．

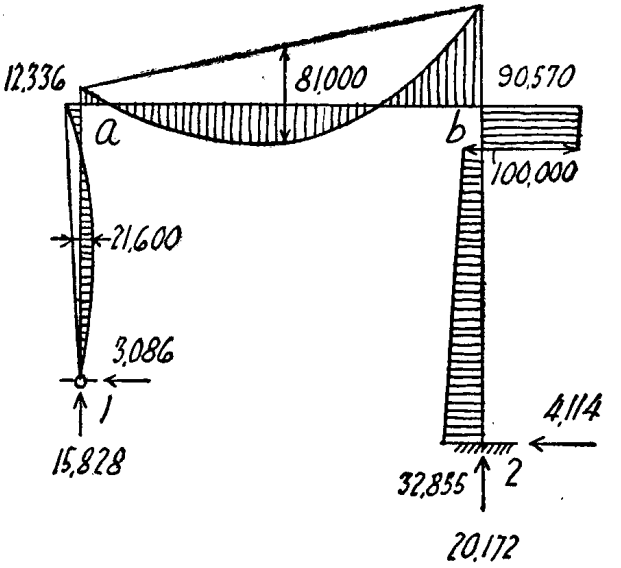


圖 7

第三節　逐結推算法

上節所述彈性方程式解顯見簡捷，然此係用于單架剛構，若多跨連續廠房則結點側支增多，形式與荷重亦多變化，無法作出一般性的分析公式；即或用單位變位彈性方程式，亦以聯立方程式過多，求解費時．本節所述之逐結推算法旨在解除此項困難．

由其命名或謂逐結推算法當屬漸近法❶或迭代法❷，著者將留于第七節舉例說明此法，決非一般之求略值者可比，而係一正確之解法；其出發點仍以引用單位變位進行分析，正如超靜定力學公式(9)之引用單位應力，其分析過程初不經任何數學上之收斂步驟也．

梁 ba 之變位法公式爲

$$M_{ba} = M^{\circ}_{ba} + 2\mu_{ab}(2\zeta_b + \zeta_a - 3\psi_{ab})$$

$$M_{ab} = M^{\circ}_{ab} + 2\mu_{ab}(2\zeta_a + \zeta_b - 3\psi_{ab})$$

第一式中 ba 杆 b 端之彎矩 M_{ba} 與該端之角變 ζ_b 成正比，設其他各項暫不動；又因以前單位角變均用 -1，故 b 端角變與彎矩之關係可以下式表明之：

$$\zeta_b = \zeta_{ob} - \tau_b M_{ba} \tag{21}$$

其中 ζ_{ob} 爲 b 節點原有之角變位，τ_b 爲一比例係數；將其代入第一式，得

$$M_{ba}(1 + 4\mu_{ab}\tau_b) = M^{\circ}_{ba} + 2\mu_{ab}(2\zeta_{ob} + \zeta_a - 3\psi_{ab}) \tag{22}$$

再代入第二式，解 M_{ab} 得

$$M_{ab} = \frac{2\mu_{ab}}{1 + 4\mu_{ab}\tau_b}[\zeta_{ob} + 2(1 + 3\mu_{ab}\tau_b)\zeta_a - 3(1 + 2\mu_{ab}\tau_b)\psi_{ab}]$$

$$+ M^{\circ}_{ab} - \frac{2\mu_{ab}\tau_b}{1 + 4\mu_{ab}\tau_b} M^{\circ}_{ba} \tag{23}$$

逐結推算法之步驟由 a 點起算逐結向 a、b、c…方向推算，惟因在 a 點起算時，除已假定 $Z_{ao} = 1$（即在 a 結點加單位負彎矩）外，并分別以 $\zeta_a = -1, \zeta_b = -1, \zeta_c = -1$… 進行分析，而實際每結點皆受到以前諸結點之影響，故當推算到前向最末一個結點時，經符合該剛構最遠一端之邊界條件後，乃需倒算一次，以回到 a 結點；如此所得皆成實際數值，亦即平衡數值．此法之要旨在每次單獨分析一個角變位．正如前言，用超靜定力學公式(9)分別將超靜定力 X、Y、Z…代以 1，最後各杆之實際應力再乘以 X、Y、Z…其旨盡同．

當無側欹時，$\psi_{ab} = 0$，式(23)成爲

❶ Method of approximation　　❷ Method of iteration

$$M_{ab}=\frac{2\mu_{ab}}{1+4\mu_{ab}\tau_b}\left[\zeta_{ob}+2(1+3\mu_{ab}\tau_b)\zeta_a\right]+M^{\circ}_{ab}-\frac{2\mu_{ab}\tau_b}{1+4\mu_{ab}\tau_b}M^{\circ}_{ba} \tag{24}$$

分別以"結點固定"及"每結點分別給予單位負角變"兩步驟進行分析；前者先設 $\zeta_a=\zeta_b=\zeta_c=\cdots=0$，由上式

$$Z_{ao}=-\left[M^{\circ}_{ab}+\frac{2\mu_{ab}}{1+4\mu_{ab}\tau_b}(\zeta_{ob}-\tau_bM^{\circ}_{ba})\right]-M^{\circ}_{ai}-M^{\circ}_{ak} \tag{25}$$

再以 $\zeta_a=-1$，其他各角變 $\zeta_b,\zeta_c\cdots$仍等于零，則

$$Z_{aa}=4\mu_{ab}\frac{1+3\mu_{ab}\tau_b}{1+4\mu_{ab}\tau_b}+4\Sigma\mu_{ai}+3\Sigma\mu_{ak} \tag{26}$$

以 a 結點起始推算，式(10)即變爲

$$Z_a=0=Z_{ao}-Z_{aa}\zeta_a \tag{27}$$

已假定 $Z_{ao}=1$(即 $M_{ab}=-1$)，故 $\zeta_a=\frac{1}{Z_{aa}}$，由式(21)并設該結點原無角變，得

$$\zeta_a=\tau_a=\frac{1}{Z_{aa}} \tag{28}$$

由 a 結點開始後，即可用(25)、(26)兩式，循 a、b、$c\cdots$ 次序推進，以迄最後一結點；推進時係根據式(21)，故倒算時仍應根據此式，代入式(22)

$$(\zeta_{ob}-\zeta_b)(1+4\mu_{ab}\tau_b)=\tau_bM^{\circ}_{ba}+2\mu_{ab}\tau_b(2\zeta_{ob}+\zeta_a)$$

解 ζ_b，得倒算公式

$$\zeta_b=\frac{1}{1+4\mu_{ab}\tau_b}(\zeta_{ob}-2\mu_{ab}\tau_b\zeta_a-\tau_bM^{\circ}_{ba}) \tag{29}$$

用此式倒算回到 a 結點，即得各結點之實際角變.

[例二(甲)]

此例係通用于一般輕工業之鋸齒形廠房，尤以紡織廠最爲適宜. 近年采用薄壳屋面漸趨普遍，或以采光要求將 ab 梁做成拱式，或以結構上之要求，做成變梁. 本例先取圖 8 所示之最簡單等截面梁開始，以後逐例分論較複雜之剛架，仍以此爲藍本：一則說明此

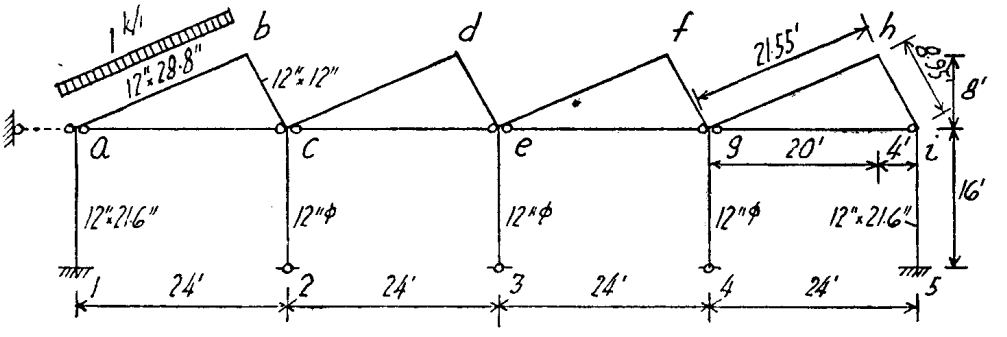


圖 8

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com